수학영역(B형)

1. 정답 ④

[해설]

$A+2B=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\6&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\7&4\end{pmatrix}$

2. 정답 ⑤

[해설]

$8^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{2}}=2+3=5$

3. 정답 ③

[해설]

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sqrt{3}x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}x}\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$

4. 정답 ⑤

[해설]

$\tan\theta=\dfrac{1}{7}$ 로부터 $\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{10}$, $\cos\theta=\pm\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

따라서 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{10}\right)\times\left(\pm\dfrac{7\sqrt{2}}{10}\right)=\dfrac{7}{25}$

5. 정답 ①

[해설]

$\int_0^1 e^{x+4}dx=\left[e^{x+4}\right]_0^1=e^5-e^4$

6. 정답 ③

[해설]

$(4,\ 1)\xrightarrow{f^{-1}}(a,\ b)\Leftrightarrow(a,\ b)\xrightarrow{f}(4,\ 1)$

으로부터 $\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2a\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\quad\therefore\ a+b=3$

7. 정답 ⑤

[해설]

$f(x)=a\sin x+\sqrt{11}\cos x=\sqrt{a^2+11}\sin(x+\alpha)$

(단, $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+11}}$, $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{a^2+11}}$)

이므로 $\sqrt{a^2+11}=6\quad\therefore\ a=5$

8. 정답 ②

[해설]

$S_n=\dfrac{a_1(3^n-1)}{3-1}=\dfrac{a_1(3^n-1)}{2}$ 이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{3^n}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{a_1(3^n-1)}{2}}{3^n}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_1(3^n-1)}{2\cdot 3^n}=\dfrac{a_1}{2}=5$ 로부터

$a_1=10$

9. 정답 ①

[해설]

서로 다른 종류의 연필 5자루를 서로 다른 학생 A, B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_4\Pi_5=4^5=1024$(가지)이다.

10. 정답 ④

[해설]

직선 $y=2nx$ 위의 점 $\mathrm{P}(n,\ 2n^2)$을 지나고 이 직선과 수직인 직선의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{2n}(x-n)+2n^2$ 이므로 $y=0$을 대입하면

$0=-\dfrac{1}{2n}(x-n)+2n^2\Leftrightarrow\dfrac{1}{2n}(x-n)=2n^2$

으로부터 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(4n^3+n,\ 0)$이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{l_n}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3+n}{n^3}=4$

11. 정답 ②

[해설]

$\dfrac{2}{f(x)-1}=\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}$

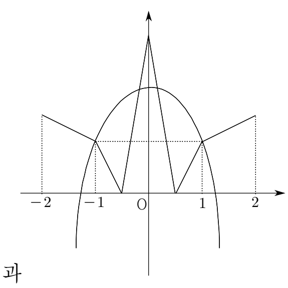
$\Leftrightarrow\ \dfrac{2}{f(x)-1}=\dfrac{2}{1-x^2}$

$\Leftrightarrow\ f(x)=-x^2+2$ and $x\neq\pm1$

$y=f(x)$와 $y=-x^2+2$의

교점은 $x=-1,\ -3+2\sqrt{2}$,

$3-2\sqrt{2}$, 1이지만, 무연근인 $x=1$과



$x = -1$은 주어진 식을 만족하지 않으므로 구하고자 하는 실근의 개수는 2개이다.

12. 정답 ④

[해설]

$\overline{\mathrm{PF}} = c$, $\overline{\mathrm{PF'}} = 4-c$, $\overline{\mathrm{FF'}} = 2c$이고, 삼각형 PFF′은 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$(2c)^2 = (4-c)^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 - 4c + 8 = 0 \quad \therefore\ c = -2+2\sqrt{3}$

13. 정답 ①

[해설]

곡선 $y = f(x) = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x$와 $y = g(x) = 2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int_1^3\left(2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x - 2\right)dx &= \left[-\frac{8\sqrt{2}}{\pi}\cos\frac{\pi}{4}x - 2x\right]_1^3 \\ &= \left(-\frac{8\sqrt{2}}{\pi}\cos\frac{3}{4}\pi - 6\right) - \left(-\frac{8\sqrt{2}}{\pi}\cos\frac{\pi}{4} - 2\right) \\ &= \left(\frac{8}{\pi} - 6\right) - \left(-\frac{8}{\pi} - 2\right) \\ &= \frac{16}{\pi} - 4\end{aligned}$$

14. 정답 ③

[해설]

일차함수 $g(x)$에 대하여 $f(x) \le g(x)$를 만족하기 위해서는 $y = g(x)$가 $y = f(x)$의 접선이어야 한다.

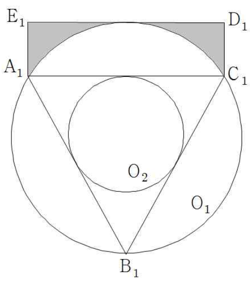
$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\cos\frac{\pi}{4}x$로부터 $f'(1) = \frac{\pi}{2}$이므로

$y = g(x) = \frac{\pi}{2}(x-1)+2$

$\therefore\ g(3) = \pi + 2$

15. 정답 ①

[해설]



원의 중심을 O라 하면 S_1은 (직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$)+(삼각형 $\mathrm{OA_1C_1}$)−(부채꼴 $\mathrm{OA_1C_1}$)이 됨을 알 수 있다. 즉,

$S_1 = (2\sqrt{3}\times 1) + \left(\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 1\right) - \left(\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{2\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$

또한 O_2의 반지름의 길이는 O_1의 반지름의 $\frac{1}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \frac{3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right) = 4\sqrt{3} - \frac{16}{9}\pi$$

16. 정답 ⑤

[해설]

$g(x) = 2^x + 2^{-x}$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$(g\circ f)(x) = \begin{cases} 2^{ax}+2^{-ax} & (x<1) \\ 2^{-3x+4}+2^{3x-4} & (x\ge 1)\end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되기 위해서는 다음을 만족하여야 한다.

$\lim_{x\to 1-0}(g\circ f)(x) = \lim_{x\to 1+0}(g\circ f)(x) = (g\circ f)(1)$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1-0}(2^{ax}+2^{-ax})(x) = \lim_{x\to 1+0}(2^{-3x+4}+2^{3x-4})(x) = 2^{-3+4}+2^{3-4}$

$\Leftrightarrow 2^a + 2^{-a} = 2^1 + 2^{-1}$

이 때, $2^a = t$라고 놓으면

$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \xrightarrow{\times 2t} 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2^a = \frac{1}{2}$ 또는 2

$\therefore\ a = 1,\ -1$

17. 정답 ⑤

[해설]

식 $(*)$의 양변에 S_n을 더하여 정리하면

$S_{n+1}+1 = 2^n(S_n+1)$

이다. $b_n = \log_2(S_n+1)$이라 하면 $b_1 = 1$이고

$b_{n+1} = \boxed{n} + b_n$

이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$b_n = \frac{n^2-n+2}{2}\ \ (n\ge 1)$

이므로

$S_n = 2^{\frac{n^2-n+2}{2}} - 1\ \ (n \ge 1)$

이다. 그러므로 $a_1 = 1$이고, $n\ge 2$일 때

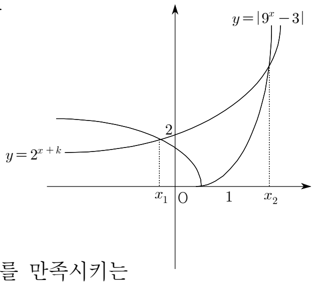
$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2^{\frac{n^2-n+2}{2}} - 2^{\boxed{\frac{n^2-3n+4}{2}}} \\ &= 2^{\boxed{\frac{n^2-3n+4}{2}}}\times(2^{n-1}-1)\end{aligned}$$

$\therefore\ f(12) - g(5) = 12 - 7 = 5$

18. 정답 ②

[해설]

$x_1 < 0$ 이기 위해서는 점 $(0,\ 2)$ 가
$y < 2^{x+k}$ 위에 존재해야 한다.
따라서 $2 < 2^k \Leftrightarrow 1 < k$ … ①
또한 $0 < x_2 < 2$ 이기 위해서는
점 $(2,\ 78)$ 이 $y > 2^{x+k}$ 위의
점이라야 한다.
따라서 $78 > 2^{2+k}$ … ②
①, ② 로부터 $x_1 < 0,\ 0 < x_2 < 2$ 를 만족시키는
모든 자연수 k 의 값의 합은 $2+3+4=9$ 이다.



19. 정답 ④

[해설]
위 그림으로부터 점 P 와 점 Q 는 원점에 대하여 대칭이다.
따라서 $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{QF}},\ \overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{QF'}},\ \overline{\mathrm{PG}}=\overline{\mathrm{QG'}},\ \overline{\mathrm{PG'}}=\overline{\mathrm{QG}}$
또한 쌍곡선의 정의로부터
$\overline{\mathrm{PG'}}-\overline{\mathrm{PG}}=2,\ \overline{\mathrm{QG}}-\overline{\mathrm{QG'}}=2,\ \overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2,\ \overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF'}}=2$
$\Leftrightarrow\ \overline{\mathrm{QG}}-\overline{\mathrm{PG}}=2,\ \overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{PF}}=2$
그런데 문제에서 $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{QF}}=4,\ \overline{\mathrm{PG}}\times\overline{\mathrm{QG}}=8$이라 했으므로
$\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{PF}}\times(\overline{\mathrm{PF}}+2)=4,\ \overline{\mathrm{PG}}\times\overline{\mathrm{QG}}=\overline{\mathrm{PG}}\times(\overline{\mathrm{PG}}+2)=8$
으로부터 $\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{5}-1,\ \overline{\mathrm{QF}}=\sqrt{5}+1,\ \overline{\mathrm{PG}}=2,\ \overline{\mathrm{QG}}=6$
따라서 사각형 PGQF 의 둘레의 길이는 $6+2\sqrt{5}$ 이다.

20. 정답 ③

[해설]
1) $n=4$일 때

$0 \le \log t < \frac{1}{4}$ 일 때,

$f(t^4)+2f(t)=\log t^4+2\log t=1\ \therefore\ \log t=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{4} \le \log t < \frac{2}{4}$ 일 때,

$f(t^4)+2f(t)=(\log t^4-1)+2\log t=1\ \therefore\ \log t=\frac{1}{3}$

$\frac{2}{4} \le \log t < \frac{3}{4}$ 일 때,

$f(t^4)+2f(t)=(\log t^4-2)+2\log t=1\ \therefore\ \log t=\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4} \le \log t < 1$일 때,

$f(t^4)+2f(t)=(\log t^4-3)+2\log t=1\ \therefore\ \log t=\frac{2}{3}$ (×)

$1 \le \log t < \frac{5}{4}$ 일 때,

$f(t^4)+2f(t)=(\log t^4-4)+2(\log t-1)=1\ \therefore\ \log t=\frac{7}{6}$

$\frac{5}{4} \le \log t < \frac{6}{4}$ 일 때,

$f(t^4)+2f(t)=(\log t^4-5)+2(\log t-1)=1\quad \therefore\ \log t=\frac{8}{6}$

$\frac{6}{4} \le \log t < \frac{7}{4}$ 일 때,

$f(t^4)+2f(t)=(\log t^4-6)+2(\log t-1)=1\ \therefore\ \log t=\frac{9}{6}$

$\frac{7}{4} \le \log t < \frac{8}{4}$ 일 때,

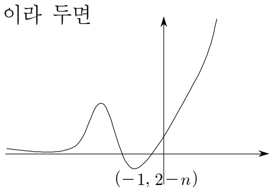
$f(t^4)+2f(t)=(\log t^4-7)+2(\log t-1)=1\ \therefore\ \log t=\frac{10}{6}$ (×)

위 조건을 만족하는 양수 t 의 개수는 6 개다.

2) $n=5$ 일 때
마찬가지의 방법으로 $f(t^5)+2f(t)=1$를 만족하는 양수 t 의 개수는 6 개다.

21. 정답 ④

[해설]
$y=f(x)$ 가 역함수를 갖기 위해서는 증가함수 또는 감소함수이어야 하므로 극값이 존재하지 않아야 한다.
그런데 $\lim_{x\to\infty} f(x)$가 양의 무한대로 발산하므로
$f'(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)+a \ge 0 \Leftrightarrow e^{x+1}(x^2+nx+1) \ge -a$
을 만족하면 된다.
$y=g(x)=f'(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)$ 이라 두면
$g'(x)=e^{x+1}(x^2+(n+2)x+n+1)$
$\quad\ =e^{x+1}(x+1)(x+n+1)=0$
으로부터 $y=g(x)$ 가 $x=-1$ 일 때, 극소이자 최소인 값 $2-n$ 을 가짐을 알 수 있다.



따라서 $2-n \ge -a \Leftrightarrow n-2 \le a$로부터 $g(n)=n-2$
따라서 $1 \le g(n) \le 8 \Leftrightarrow 1 \le n-2 \le 8 \Leftrightarrow 3 \le n \le 10$을 만족시키는 모든 n 의 값의 합은 $3+4+5+6+7+8+9+19=52$

22. 정답 9

[해설]
$\sqrt{7x+1}=x-1$의 양변을 제곱하면
$x+1=(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-9x=0 \Leftrightarrow x=0,\ 9$
그런데 $x=0$은 주어진 식을 만족시키지 않으므로 답은 9 뿐이다.

23. 정답 11

[해설]
공차를 d 라 하면
$a_7+a_{11}=20 \Leftrightarrow (2+6d)+(2+10d)=10 \Leftrightarrow 16d=16 \quad \therefore\ d=1$
$\therefore\ a_{10}=2+9d=11$

24. 정답 10

[해설]

$y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx+\dfrac{p}{m}$

이므로 구하고자 하는 식은 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}x+10$

25. 정답 6

[해설]

$x=t^2+1$의 양변을 t에 관하여 미분하면 $\dfrac{dx}{dt}=2t$ … ①

$y=\dfrac{2}{3}t^3+10t-1$의 양변을 t에 관하여 미분하면 $\dfrac{dy}{dt}=2t^2+10$ … ②

②÷①로부터 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t^2+5}{t}$ $\quad\therefore\ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}=6$

26. 정답 2

[해설]

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 4a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ay\\ 2x-y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 4a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1-a\\ -3 & 4a+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

위 식이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖기 위해서는 다음이 성립해야 한다.

$\dfrac{1}{-3}=\dfrac{-1-a}{4a+1} \Leftrightarrow 3+3a=4a+1 \quad\therefore\ a=2$

27. 정답 68

[해설]

$x+y+z+w=6$을 만족하는 음이 아닌 정수 $x,\ y,\ z,\ w$의 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_6={}_9\mathrm{C}_6=84$

그런데 $x=u=0,\ 1,\ 2,\ 3$일 경우의 수가 각각

${}_2\mathrm{H}_6={}_7\mathrm{C}_6=7,\ {}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4=5,\ {}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3,\ {}_2\mathrm{H}_0={}_1\mathrm{C}_0=1$

이므로 구하고자 하는 경우의 수는

$84-(1+3+5+7)=68$(가지)

28. 정답 4

[해설]

점 B는 합성변환 $f\circ g$에 의해서 $\mathrm{A}(4,\ 0)$이 옮겨지는 점이므로

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cos\theta\\ 2\sin\theta\end{pmatrix}$$

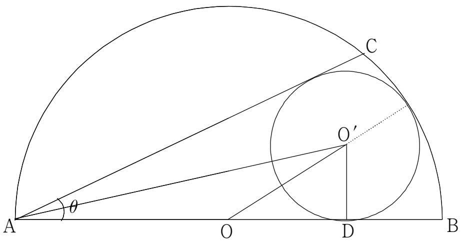
이고, 점 C는 합성변환 $g\circ f^{-1}$에 의해서 점 $\mathrm{B}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$가 옮겨지는 점이므로

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\cos\theta\\ 2\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

세 점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$, $\mathrm{B}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$, $\mathrm{C}(1,\ 0)$을 꼭짓점으로 갖는 삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times3\times2\sin\theta=3\sin\theta=1 \quad\therefore\ p+q=4$

29. 정답 25

[해설]



선분 AB의 중점을 O라 하고, 부채꼴 ACB에 내접하는 원의 중심을 O′, 이 원과 선분 AB의 접점을 D라 하면

$\overline{\mathrm{O'D}}=f(\theta)$, $\overline{\mathrm{OO'}}=\dfrac{1}{2}-f(\theta)$, $\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{f(\theta)}{\tan\dfrac{\theta}{2}}$, $\overline{\mathrm{OD}}=\dfrac{f(\theta)}{\tan\dfrac{\theta}{2}}-\dfrac{1}{2}$이고 삼각형 O′OD는 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의해서

$$\left(\frac{1}{2}-f(\theta)\right)^2=\left(\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{2}\right)^2+(f(\theta))^2$$

$\therefore\ f(\theta)=-\tan^2\dfrac{\theta}{2}+\tan\dfrac{\theta}{2}$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to+0}\frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}=\frac{1}{4}$$

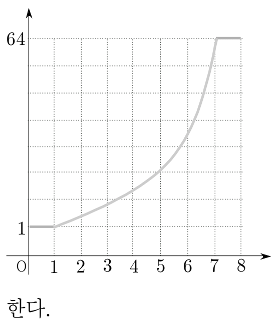
$\therefore\ 100\alpha=25$

30. 정답 128

[해설]

$f(k+t)=f(k)$로부터 $f(x)$는 구간 $[k,\ k+1]$에서 상수함수,

$f(k+t)=2^t\times f(k)$로부터 $f(x)$는 구간 $[k,\ k+1]$에서 $f(x)=2^{x-p}$ (p는 정수)의 형태로 표현이 된다.



상수함수보다는 지수함수를 적분한 값이 더 크지만 주어진 그래프가 모든 범위에서 지수함수를 따르게 되면 $f(8)=2^8=256$이 되어 조건 (가)에 모순이 된다.

또한 열린 구간 $(0,\ 8)$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수가 2개이려면 상수함수와 지수함수를 세 번 번갈아 사용하여야 한다.

이상의 모든 조건을 만족하면서 $\int_0^8 f(x)\,dx$가 최대일 때는

$f(x)=\begin{cases} 1 & (1 \le x < 2) \\ 2^{x-1} & (2 \le x < 3) \\ 64 & (7 \le x < 8) \end{cases}$인 경우이다.

$\therefore \int_0^8 f(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx + \int_2^7 2^{x-1}\,dx + \int_7^8 64\,dx = 65 + \frac{63}{\ln 2}$