[수학1] [4로그함수] 교사평경 최근 3개년

03 수1 04 로그함수

01 로그함수의 그래프

02 로그함수의 그래프2 (평행이동과 대칭이동)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 8

1. 함수$y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프가 점 (9, 3)을 지날 때, 상수 a의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 7

2. 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프가 점 $(5, a)$을 지날 때, 상수 a의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

03 수1 04 로그함수

01 로그함수의 그래프

05 로그함수의 그래프의 해석1 (기본)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 6

3. 함수 $y=a+\log_2 x$의 그래프가 점 $(4,\ 7)$을 지날 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 9

4. 함수 $y=2^x-1$의 그래프의 점근선과 함수 $y=\log_2(x+k)$의 그래프가 만나는 점이 y축 위에 있을 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 29

5. 자연수 k $(k \le 39)$에 대하여 함수

$$f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x-7+k)+2$$

의 그래프와 원 $x^2+y^2=64$가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 a, b라 하자. 다음 조건을 만족시키는 k의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

(가) $ab<0$

(나) $f(a)f(b)<0$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 16

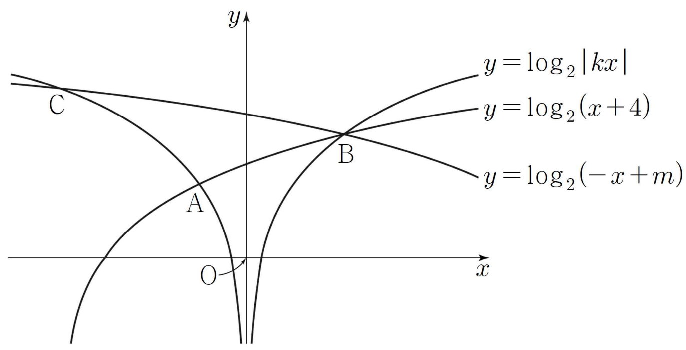
6. 함수$y=\log_2 x$의 그래프 위에 서로 다른 두 점 A, B가 있다. 선분 AB의 중점이 x축 위에 있고, 선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점이 y축 위에 있을 때, 선분 AB의 길이는?

① 1 ② $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$

④ $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 15

7. 그림과 같이 1보다 큰 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_2|kx|$와 $y=\log_2(x+4)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하고, 점 B를 지나는 곡선 $y=\log_2(-x+m)$이 곡선 $y=\log_2|kx|$와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1 < x_2$이고, m은 실수이다.)



<보 기>

ㄱ. $x_2=-2x_1$이면 $k=3$이다.

ㄴ. ${x_2}^2=x_1x_3$

ㄷ. 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기의 합이 0일 때, $m+k^2=19$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 10

8. $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x,\ y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은?

① 30 ② 35 ③ 40
④ 45 ⑤ 50

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 9

9. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $y=\log_2(x-a)+1$의 그래프가 점 $(7,\ b)$를 지나고 점근선이 직선 $x=3$일 때, $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 28

10. 두 자연수 a, b에 대하여 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(a,\ \log_4 b)$, $\mathrm{B}(1,\ \log_8 \sqrt[4]{27})$이 있다. 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점이 곡선 $y=-\log_4(3-x)$ 위에 있고, 집합

$$\{n \mid b < 2^n \times a \leq 32b,\ n\text{은 정수}\}$$

의 모든 원소의 합은 25이다. $a+b$의 최댓값을 구하시오.

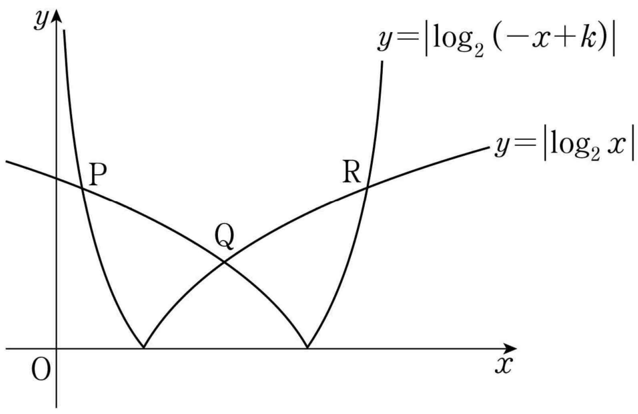
[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 8

11. 2보다 큰 상수 k에 대하여 두 곡선

$$y=|\log_2(-x+k)|,\ y=|\log_2 x|$$

가 만나는 세 점 P, Q, R의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 하자. $x_3-x_1=2\sqrt{3}$일 때, x_1+x_3의 값은? (단, $x_1<x_2<x_3$)

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4
④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$



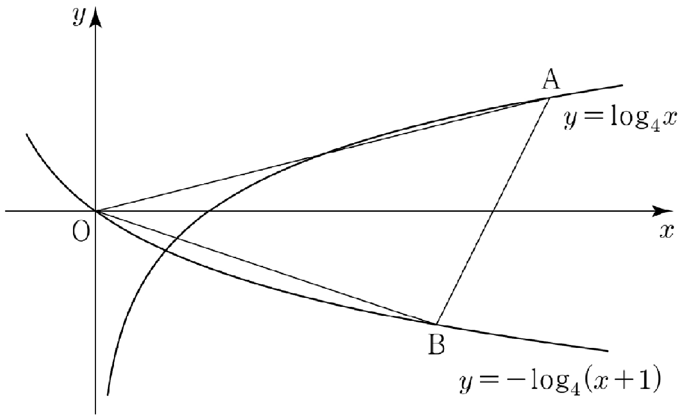
[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 9

12. 곡선 $y=|\log_2(-x)|$를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=|\log_2(-x+8)|$이 세 점에서 만나고 세 교점의 x좌표의 합이 18일 때, k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 11

13. 그림과 같이 곡선 $y=\log_4 x$ 위의 점 A와 곡선 $y=-\log_4(x+1)$ 위의 점 B가 있다.
점 A의 y좌표가 1이고, x축이 삼각형 OAB의 넓이를 이등분할 때, 선분 OB의 길이는? (단, O는 원점이다.)



① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{14}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 10

14. $a>1$인 실수 a에 대하여 두 곡선

$$y=-\log_2(-x),\ y=\log_2(x+2a)$$

가 만나는 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB의 중점이 직선 $4x+3y+5=0$ 위에 있을 때, 선분 AB의 길이는?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2
④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

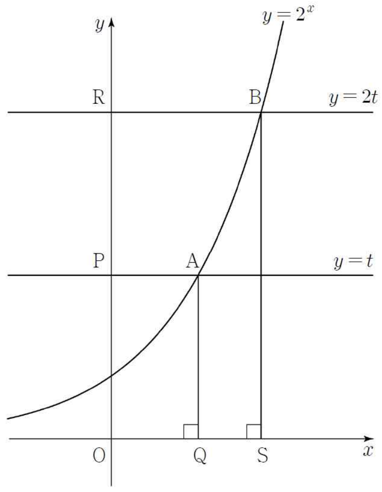
03 수1 04 로그함수

01 로그함수의 그래프

06 로그함수의 그래프의 해석2 (길이와 넓이)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 19

15. 그림과 같이 실수 $t(1<t<100)$에 대하여 점 $\mathrm{P}(0,\ t)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 A, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 점 $\mathrm{R}(0,\ 2t)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 B, 점 B에서 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 B, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 S라 하자. 사각형 ABRP의 넓이를 $f(t)$, 사각형 AQSB의 넓이를 $g(t)$라 할 때, $\dfrac{f(t)}{g(t)}$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 t의 값의 곱은?



① 2^{11} ② 2^{12} ③ 2^{13}
④ 2^{14} ⑤ 2^{15}

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 20

16. 1보다 큰 실수 a에 대하여 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{a+2}x$가 직선 $y=2$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{a+2}x$와 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 D라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 점 A의 x좌표는 a^2이다.

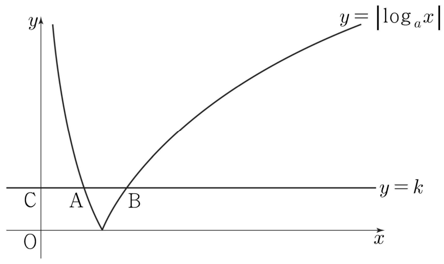
ㄴ. $\overline{\mathrm{AC}}=1$이면 $a=2$이다.

ㄷ. 삼각형 ACB와 삼각형 ABD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $\dfrac{S_2}{S_1}=\log_a(a+2)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

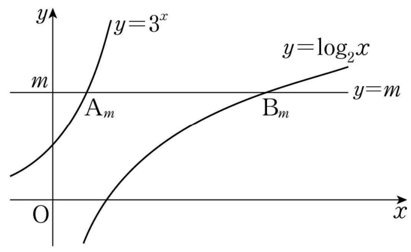
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 28

17. 그림과 같이 1보다 큰 실수 a에 대하여 곡선 $y=|\log_a x|$가 직선 $y=k(k>0)$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k$가 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{AB}}$일 때, 곡선 $y=|\log_a x|$와 직선 $y=2\sqrt{2}$가 만나는 두 점 사이의 거리는 d이다. $20d$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.)



[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 16

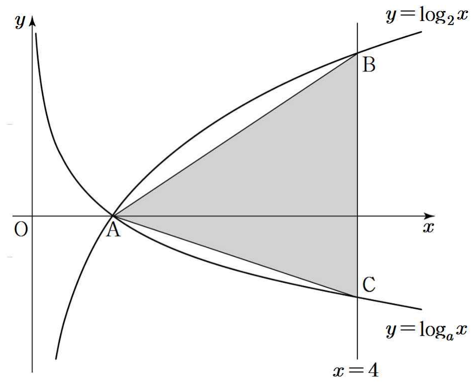
18. 그림과같이 자연수 m에 대하여 두 함수 $y=3^x$, $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=m$이 만나는 점을 각각 A_m, B_m이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m$의 길이 중 자연수인 것을 작은 수부터 크기순으로 나열하여 a_1, a_2, a_3, $\cdots$이라 할 때, a_3의 값은?



① 502 ② 504 ③ 506
④ 508 ⑤ 510

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 10

19. 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_a x\,(0<a<1)$이 x축 위의 점 A에서 만난다. 직선 $x=4$가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 B, 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 상수 a의 값은?

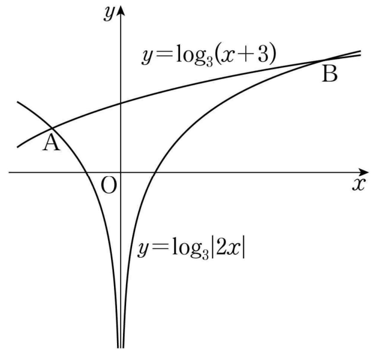


① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$

④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 14

20. 함수 $y=\log_3|2x|$의 그래프와 함수 $y=\log_3(x+3)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 직선 AB와 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?
(단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.)



① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$

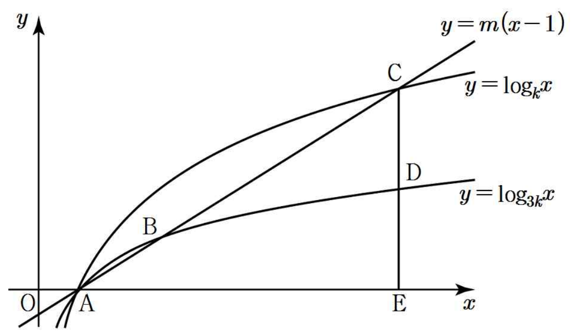
④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 27

21. $k>1$인 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_{k}x$가 만나는 점을 A라 하자. 양수 m에 대하여 직선 $y=m(x-1)$이 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_{k}x$와 제 1사분면에서 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{3k}x$, x축과 만나는 점을 각각 D, E라 할 때, 세 삼각형 ADB, AED, BDC가 다음 조건을 만족시킨다.

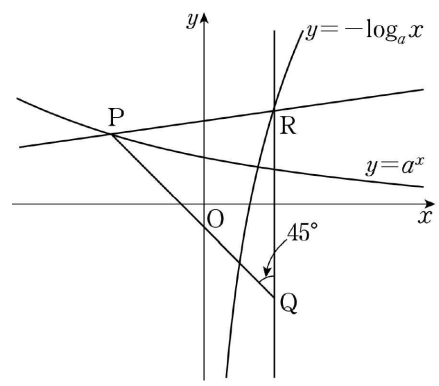
> (가) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 ADB의 넓이의 3배이다.
>
> (나) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 AED의 넓이의 $\frac{3}{4}$배이다.

$\frac{k}{m}$의 값을 구하시오.



[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 15

22. 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=a^x$ $(0<a<1)$위의 점 P가 제 2사분면에 있다. 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 Q와 곡선 $y=-\log_a x$위의 점 R에 대하여 $\angle PQR=45°$이다. $\overline{PR}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$이고 직선 PR의 기울기가 $\frac{1}{7}$일 때, 상수 a의 값은?



① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 13

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 18

23. $\frac{1}{4}<a<1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=1$이 두 곡선 $y=\log_{a}x$, $y=\log_{4a}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-1$이 두 곡선 $y=\log_{a}x$, $y=\log_{4a}x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 $a=\frac{1}{2}$이다.

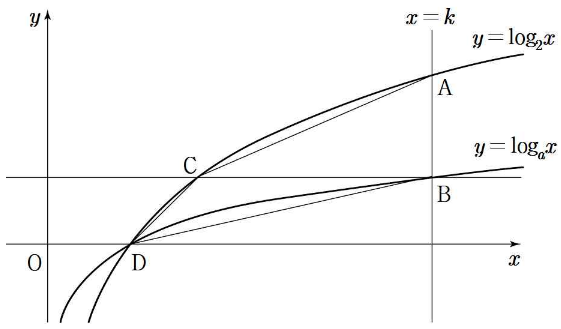
ㄷ. $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{CD}}$이면 $\frac{1}{2}<a<1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 16

24. 상수 k에 대하여 그림과 같이 직선 $x=k(k>1)$이 두 함수 $y=\log_{2}x$, $y=\log_{a}x\,(a>2)$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=\log_{2}x$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. 함수 $y=\log_{2}x$의 그래프가 x축과 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 ACB와 삼각형 BCD의 넓이의 비는 $3:2$이다. 상수 a의 값은?



① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$

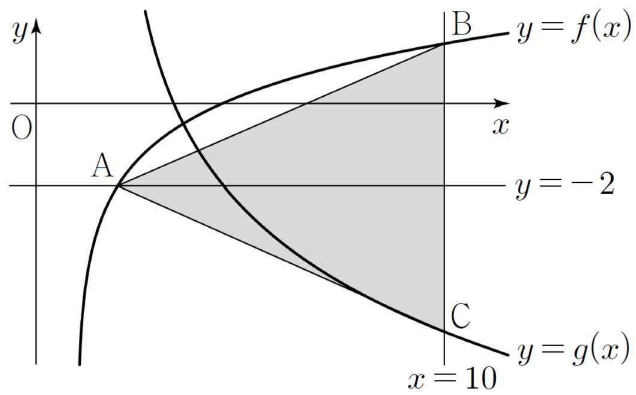
④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 11

25. $a>1$인 실수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=\frac{1}{2}\log_a(x-1)-2,\ g(x)=\log_{\frac{1}{a}}(x-2)+1$$

이 있다. 직선 $y=-2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점을 A라 하고, 직선 $x=10$과 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ACB의 넓이가 28일 때, a^{10}의 값은?



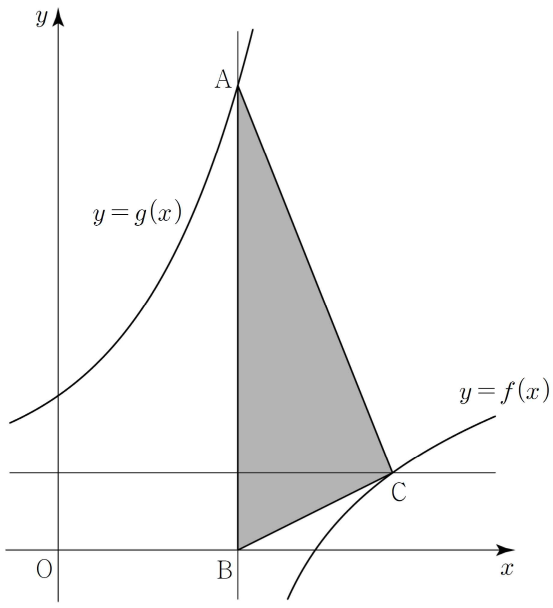
① 15 ② 18 ③ 21
④ 24 ⑤ 27

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 11

26. 양수 p에 대하여 두 함수

$$f(x)=\log_2(x-p),\ g(x)=2^x+1$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$의 점근선이 곡선 $y=g(x)$, x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=g(x)$의 점근선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 6일 때, p 의 값은?



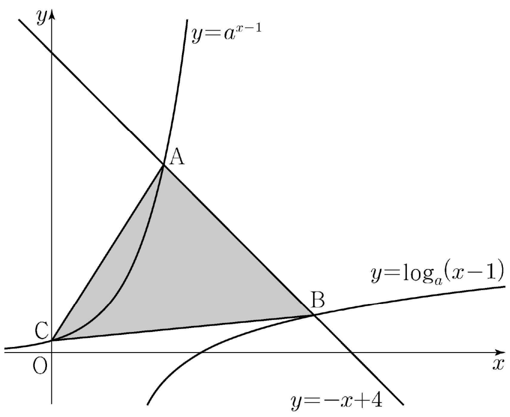
① 2 ② $\log_2 5$ ③ $\log_2 6$
④ $\log_2 7$ ⑤ 3

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 21

27. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

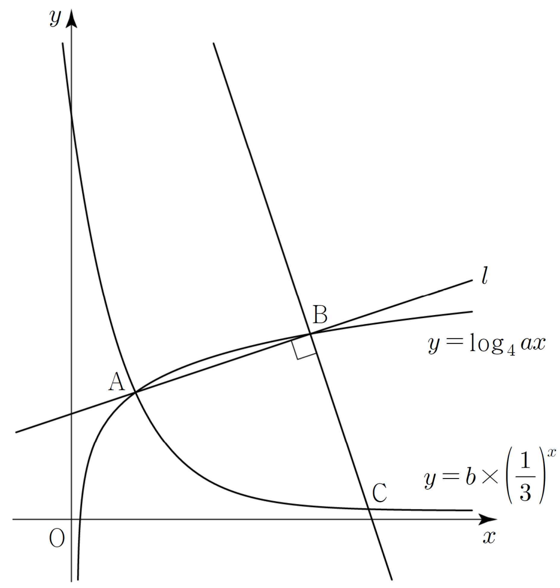
$$y=a^{x-1},\ y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오.



[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 20

28. 그림과 같이 기울기가 $\frac{1}{3}$인 직선 l이 곡선 $y=\log_4 ax$와 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에서 만나고, 곡선 $y=b\times\left(\frac{1}{3}\right)^x$이 점 A를 지난다. 점 B를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 곡선 $y=b\times\left(\frac{1}{3}\right)^x$과 만나는 점을 $\mathrm{C}(x_3, y_3)$이라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{10}$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 양수이고 $x_1<x_2<x_3$이다.)



<보 기>

ㄱ. $x_2-x_1=3$

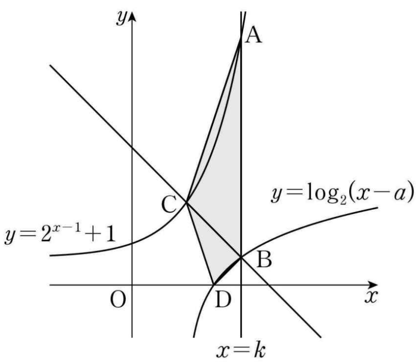
ㄴ. $x_3-x_1=2(y_1-y_3)$

ㄷ. $a^2=4^b$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 11

29. 그림과 같이 두 상수 a, k에 대하여 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2^{x-1}+1$, $y=\log_2(x-a)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-1}+1$과 만나는 점을 C라 하자.
$\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=2\sqrt{2}$일 때, 곡선 $y=\log_2(x-a)$가 x축과 만나는 점 D에 대하여 사각형 ACDB의 넓이는?
(단, $0<a<k$)

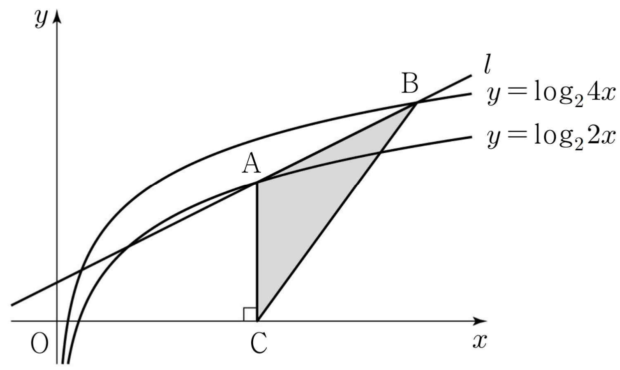


① 14 ② 13 ③ 12
④ 11 ⑤ 10

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 11

30. 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선 l이 곡선 $y=\log_2 2x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 A라 하고, 직선 l이 곡선 $y=\log_2 4x$와 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 B라 하자. $\overline{AB}=2\sqrt{5}$일 때, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발 C에 대하여 삼각형 ACB의 넓이는?

① 5 ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{11}{2}$
④ $\frac{23}{4}$ ⑤ 6



03 수1 04 로그함수

02 로그함수의 최대와 최소

01 Mm1 (기본 그래프)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 23

31. $1 \le x \le 7$에서 정의된 함수 $y = \log_2(x+1)+2$의 최댓값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 9

32. 함수 $f(x) = 2\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$가 닫힌구간 $[0,\ 12]$에서 최댓값 -4, 최솟값 m을 갖는다. $k+m$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① -1 ② -2 ③ -3

④ -4 ⑤ -5

03 수1 04 로그함수

02 로그함수의 최대와 최소

02 Mm2 (진수가 함수식)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 14

33. $0 \le x \le 5$에서 함수

$$f(x)=\log_3(x^2-6x+k)\,(k>9)$$

의 최댓값과 최솟값의 합이 $2+\log_3 4$가 되도록 하는 상수 k의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

03 수1 04 로그함수

02 로그함수의 최대와 최소

03 Mm3 (치환)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 17

34. $\angle A=90^\circ$ 이고 $\overline{AB}=2\log_2 x$, $\overline{AC}=\log_4 \dfrac{16}{x}$ 인 삼각형 ABC의 넓이를 $S(x)$라 하자. $S(x)$가 $x=a$에서 최댓값 M를 가질 때, $a+M$의 값은? (단, $1<x<16$)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

03 수1 04 로그함수

03 지수함수와 로그함수의 역함수 관계

01 역함수1 (역함수의 함숫값)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 20

35. 두 함수

$$f(x)=2^{x},\ g(x)=2^{x-2}$$

에 대하여 두 양수 a, $b(a<b)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

(가) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $y=a$, $y=b$로 둘러싸인 부분의 넓이가 6이다.

(나) $g^{-1}(b)-f^{-1}(a)=\log_{2}6$

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 14

36. 함수$y=3^{x}-a$의 역함수의 그래프가 두 점 $(3,\ \log_{3}b)$, $(2b,\ \log_{3}12)$를 지나도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 13

37. 함수 $f(x)=\log_{2}(x+a)+b$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 곡선 $y=g(x)$의 점근선이 $y=1$이고, 곡선 $y=g(x)$가 점 $(3,2)$를 지날 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 8

38. 함수 $y=\log_3(2x+1)$의 역함수의 그래프가 점 $(4,\ a)$를 지날 때, a의 값은?

① 40 ② 42 ③ 44
④ 46 ⑤ 48

03 수1 04 로그함수

03 지수함수와 로그함수의 역함수 관계

03 역함수3 (y=x대칭)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 26

39. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프와 일치한다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 5)$를 지날 때, $f(m)$의 값을 구하시오.
(단, m은 상수이다.)

03 수1

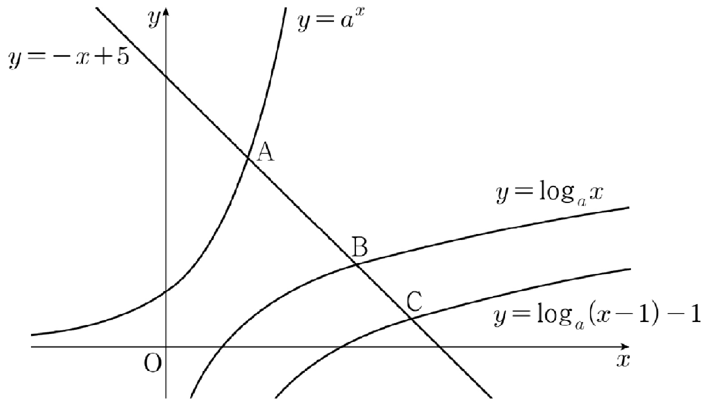
04 로그함수

03 지수함수와 로그함수의 역함수 관계

04 역함수4 (y=x대칭의 발견)

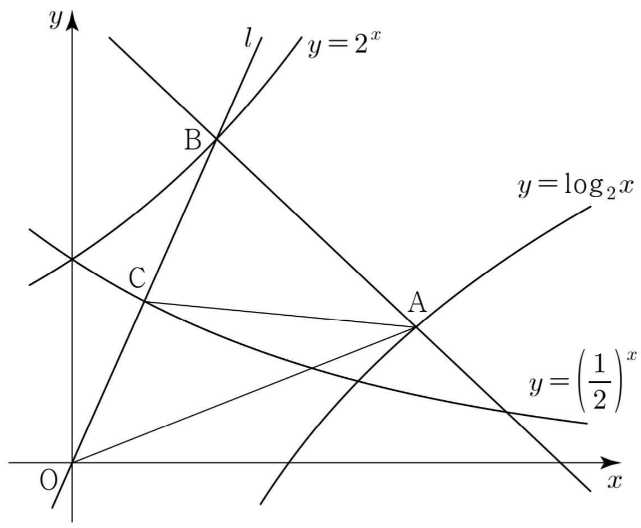
[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 27

40. $a>2$인 실수 a에 대하여 그림과 같이 직선 $y=-x+5$가
세 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$, $y=\log_a(x-1)-1$과 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자.
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=2:1$일 때, $4a^3$의 값을 구하시오.



[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 19

41. 그림과 같이 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 한 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 $\mathrm{B}(x_2, y_2)$라 하고, 두 점 B, O를 지나는 직선 l이 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$과 만나는 점을 $\mathrm{C}(x_3, y_3)$이라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 삼각형 OAC의 넓이의 2배일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, $x_1>1$이고, O는 원점이다.)



<보 기>

ㄱ. $\overline{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}}$

ㄴ. $x_2+y_1=4x_3$

ㄷ. 직선 l의 기울기는 $3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1 04 로그함수

03 지수함수와 로그함수의 역함수 관계

05 역함수5 (원함수와 역함수의 교점)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 19

42. 함수 $f(x)=\log_2 kx$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 두 점 A, B에서 만나고 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$이다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(5)$의 값을 구하시오.
(단, k는 0이 아닌 상수이고, O는 원점이다.)

03 수1 04 로그함수

04 로그방정식과 부등식

01 로그방정식1 (기본)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 23

43. 방정식 $\log_2(x+5)=4$의 해를 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 24

44. 방정식$\log_2 x=1+\log_4(2x-3)$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 1

45. $\log_3(\log_{27}x)=\log_{27}(\log_3 x)$가 성립할 때, $(\log_3 x)^2$의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{27}$ ③ 3

④ 9 ⑤ 27

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 23

46. 방정식 $\log_3(x-2)=1$의 해를 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 24

47. 방정식 $2\log_4(x-3)+\log_2(x-10)=3$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 21

48. 방정식 $\log_2(x+4)+\log_{\frac{1}{2}}(x-4)=1$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 23

49. 방정식 $\log_5(x+1)=2$의 해를 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 16

50. 방정식 $\log_2(x+2)+\log_2(x-2)=5$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월

51. 방정식

$$\log_2(3x+2)=2+\log_2(x-2)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 16

52. 방정식 $\log_3(x-4)=\log_9(x+2)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.

03 수1 04 로그함수

04 로그방정식과 부등식

03 로그방정식3 (연립방정식)

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 22

53. 실수 a, b, c가

$$\log\frac{ab}{2}=(\log a)(\log b),$$

$$\log\frac{bc}{2}=(\log b)(\log c),$$

$$\log(ca)=(\log c)(\log a)$$

를 만족시킬 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.
(단, a, b, c는 모두 10보다 크다.)

03 수1 04 로그함수

04 로그방정식과 부등식

05 로그방정식5 (해석)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 14

54. $x>0$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (0<x\le 1) \\ \log_3 x & (x>1) \end{cases}$$

에 대하여 $f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right)=2$를 만족시키는 모든 양수 t의 값의 합은?

① $\frac{76}{9}$ ② $\frac{79}{9}$ ③ $\frac{82}{9}$

④ $\frac{85}{9}$ ⑤ $\frac{88}{9}$

03 수1 04 로그함수

04 로그방정식과 부등식

06 로그부등식1 (기본)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 6

55. 부등식 $\log_{18}(n^2-9n+18)<1$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은?

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 24

56. 부등식 $2+\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)>0$을 만족시키는 모든 정수 x의 개수를 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 6

57. 부등식 $\log 3x<2$를 만족시키는 정수 x의 최댓값은?

① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 8

58. 부등식 $\log_2(x^2-7x)-\log_2(x+5)\le 1$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은?

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 27

59. 부등식

$$\log|x-1|+\log(x+2)\leq 1$$

을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 12

60. 부등식

$$\log_3(x+5)<8\log_9 2$$

를 만족시키는 정수 x의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 5

61. 부등식 $\log_2 x \leq 4-\log_2(x-6)$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은?

① 15 ② 19 ③ 23
④ 27 ⑤ 31

03 수1 04 로그함수

04 로그방정식과 부등식

09 로그부등식4 (해의 조건)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 8

62. x에대한 연립부등식

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} \geq \left(\frac{1}{16}\right)^{x-1} \\ \log_2 4x < \log_2 (x+k) \end{cases}$$

의 해가 존재하지 않도록 하는 양수 k의 최댓값은?

① 3 ② 4 ③ 5

④ 6 ⑤ 7

03 수1 04 로그함수

04 로그방정식과 부등식

10 로그부등식5 (해석)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 15

63. $-1 \leq x \leq 1$에서 정의된 함수 $f(x) = -\log_3(mx+5)$에 대하여 $f(-1) < f(1)$이 되도록 하는 모든 정수 m의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

03 수1 04 로그함수

05 로그함수의 활용

02 활용2 (방정식의 실근 조건, 치환)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 21

64. 상수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 좌표평면의 점 $\mathrm{A}(a, b)$가 오직 하나 존재한다.

(가) 점 A는 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위의 점이다.
(나) 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 곡선 $y=4^{x+k}+2$ 위에 있다.

$a\times b$의 값을 구하시오. (단, $a\neq b$)

03 수1 04 로그함수

05 로그함수의 활용

04 활용4 (부등식의 성립조건)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 17

65. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$$3x^2-2(\log_2 n)x+\log_2 n>0$$

이 성립하도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오.

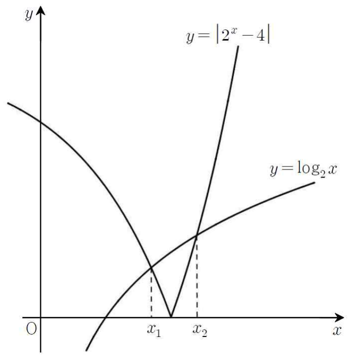
03 수1 04 로그함수

05 로그함수의 활용

05 활용5 (그래프를 이용한 대소비교)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

66. 두 곡선 $y=|2^x-4|$, $y=\log_2 x$가 만나는 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\log_2 3 < x_1 < x_2 < \log_2 6$

ㄴ. $(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})<3$

ㄷ. $2^{x_1}+2^{x_2}>8+\log_2(\log_3 6)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 21

67. 두 곡선 $y=2^{-x}$과 $y=|\log_2 x|$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1<x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\frac{1}{2}<x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$

ㄴ. $\sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$

ㄷ. $y_1-y_2<\frac{3\sqrt{2}-2}{6}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 20

68. $1<a<4$인 실수 a에 대하여 함수 $y=\log_a x$의 그래프와 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프가 만나는 점을 $\mathrm{A}(p,\ q)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $pq=1$

ㄴ. $a=2$일 때, $p>\sqrt{2}$이다.

ㄷ. 원점 O와 점 $\mathrm{B}(p+q,\ 0)$에 대하여 삼각형 AOB의 넓이를 $S(p)$라 할 때, $S(p)<\dfrac{a+1}{2a}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1 04 로그함수

05 로그함수의 활용

06 활용6 (추론과 해석)

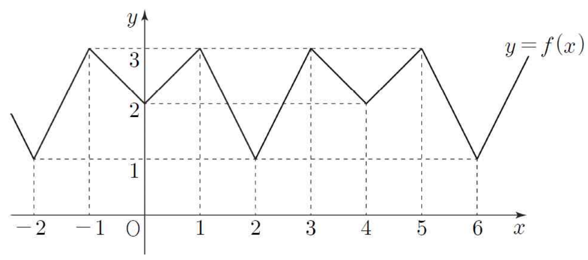
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 21

69. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=\begin{cases} x+2 & (0\le x<1) \\ -2+5 & (1\le x\le 2)\end{cases}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이고 $f(x)=f(x+4)$이다.

n이 자연수일 때, 함수 $y=\log_{2^n}(x+2n)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 모든 점의 개수를 a_n이라 하자. $a_1+a_2+a_3$의 값은?



① 532 ② 535 ③ 538
④ 541 ⑤ 544

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 16

70. 두함수 $f(x)=x^2-6x+11$, $g(x)=\log_3 x$가 있다. 정수 k에 대하여

$$k<(g\circ f)(n)<k+2$$

를 만족시키는 자연수 n의 개수를 $h(k)$라 할 때, $h(0)+h(3)$의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15

④ 17 ⑤ 19

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 20

71. 자연수 n에 대하여 직선 $y=1$이 곡선 $y=2^x-1$, 직선 $y=-(1+\log_2 n)x+7$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 두 점 A, B 사이의 거리를 $f(n)$이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(2)=2$

ㄴ. $f(n)\geq 1$을 만족시키는 n의 개수는 4이다.

ㄷ. $|f(n)-1|\geq \frac{2}{3}$를 만족시키는 n의 개수는 245이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월

72. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}\left|3^{x+2}-n\right| & (x<0)\\ \left|\log_2(x+4)-n\right| & (x\geq 0)\end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

03 수1

04 로그함수

05 로그함수의 활용

07 활용7 (격자점 문제)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 21

73. 상수 k에 대하여 정의역과 공역이 각각 실수 전체의 집합인 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{-x-2} & (x<k) \\ -\log_2(x+2)-2 & (x\ge k) \end{cases}$$

가 일대일대응이다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \log_2(2-x)+2 & (x<-k) \\ -2^{x-2}+2 & (x\ge -k) \end{cases}$$

라 할 때, $f(a)\le b\le g(a)$를 만족시키는 정수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는? (단, $-2\le a\le 2$)

① 31　② 33　③ 35
④ 37　⑤ 39

[수학1] [4로그함수] 교사평경 최근 3개년(빠른 정답)

년도별경향 2022.12.27

1. [정답] ①
2. [정답] ①
3. [정답] ⑤
4. [정답] ②
5. [정답] 24

6. [정답] ②
7. [정답] ③
8. [정답] ②
9. [정답] ④
10. [정답] 15

11. [정답] ③
12. [정답] ④
13. [정답] ③
14. [정답] ⑤
15. [정답] ③

16. [정답] ⑤
17. [정답] 75
18. [정답] ⑤
19. [정답] ④
20. [정답] ⑤

21. [정답] 12
22. [정답] ⑤
23. [정답] ③
24. [정답] ③
25. [정답] ④

26. [정답] ②
27. [정답] 192
28. [정답] ②
29. [정답] ⑤
30. [정답] ⑤

31. [정답] 5
32. [정답] ④
33. [정답] ②
34. [정답] ①
35. [정답] ①

36. [정답] ①
37. [정답] ②
38. [정답] ①
39. [정답] 11
40. [정답] 49

41. [정답] ⑤
42. [정답] 16
43. [정답] 11
44. [정답] 12
45. [정답] ⑤

46. [정답] 5
47. [정답] 11
48. [정답] 12
49. [정답] 24
50. [정답] 6

51. [정답] 10
52. [정답] 7
53. [정답] 250
54. [정답] ③
55. [정답] ⑤

56. [정답] 4
57. [정답] ②
58. [정답] ③
59. [정답] 4
60. [정답] ①

61. [정답] ①
62. [정답] ①
63. [정답] ④
64. [정답] 12
65. [정답] 6

66. [정답] ②
67. [정답] ⑤
68. [정답] ⑤
69. [정답] ②
70. [정답] ③

71. [정답] ③

72. [정답] 33

73. [정답] ①

[수학1] [4로그함수] 교사평경 최근 3개년(해설)

년도별경향 2022.12.27

1) [정답] ①

[해설]

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는 $y=\log_2(x-a)+1$이다.

이 함수의 그래프가 점 (9, 3)을 지나므로 $3=\log_2(9-a)+1$에서 $2=\log_2(9-a)$이다.

따라서 $9-a=4$, $a=5$

2) [정답] ①

[해설]
함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는 $y=\log_3(x-2)+5$이다.
이 함수의 그래프가 점 $(5, a)$을 지나므로 $a=\log_3(5-2)+5$에서 $a=1+5$이다.
따라서 $a=6$

3) [정답] ⑤

[해설]

$7=a+\log_2 4=a+2$에서 $a=5$

4) [정답] ②

[해설]

함수 $y=2^x-1$의 그래프의 점근선의 방정식이 $y=-1$이므로 y축과의 교점의 좌표는 $(0,\ -1)$이다.

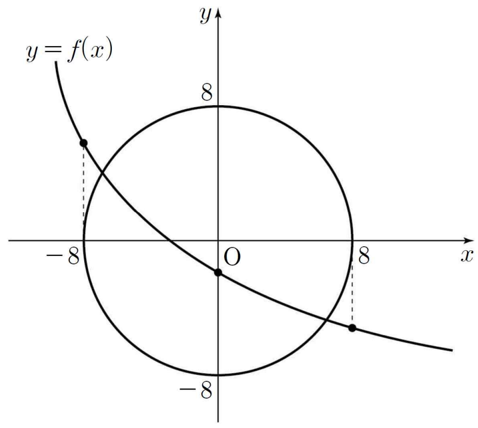
따라서 함수 $y=\log_2(x+k)$의 그래프는 점 $(0,\ -1)$을 지난다.

그러므로 $-1=\log_2 k$이고 $k=\dfrac{1}{2}$이다.

5) [정답] 24

[해설]

x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소하므로 조건 (가)와 (나)를 만족하기 위해서는 두 교점이 제 2사분면과 제 4사분면에 각각 한 개씩 존재하야 한다.



따라서 $-8<f(0)<8$, $f(-8)>0$, $f(8)<0$

(ⅰ) $-8<f(0)<8$일 때,
$f(0)=2\log_{\frac{1}{2}}(-7+k)+2$이므로

$-8<2\log_{\frac{1}{2}}(-7+k)+2<8$에서 $\dfrac{57}{8}<k<39$

(ⅱ) $f(-8)>0$일 때,
$f(-8)=2\log_{\frac{1}{2}}(-15+k)+2$이므로

$2\log_{\frac{1}{2}}(-15+k)+2>0$에서 $k<17$

(ⅲ) $f(8)<0$일 때,
$f(8)=2\log_{\frac{1}{2}}(1+k)+2$이므로 $2\log_{\frac{1}{2}}(1+k)+2<0$에서

$k>1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해서 $\dfrac{57}{8}<k<17$이다.

따라서 k의 최댓값 $M=16$, 최솟값 $m=8$이므로

$M+m=24$

6) [정답] ②

[해설]

두 양수 a, b에 대하여 $\mathrm{A}(a,\ \log_2 a)$, $\mathrm{B}(b,\ \log_2 b)$라 하자.

선분 AB의 중점 $\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{\log_2 a+\log_2 b}{2}\right)$가 x축 위에 있으므로 $\dfrac{\log_2 a+\log_2 b}{2}=0$이다.

따라서 $\log_2 ab=0$이고 $ab=1$이다.

선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점 $\left(\dfrac{b-2a}{1-2},\ \dfrac{\log_2 b-2\log_2 a}{1-2}\right)$가

y축 위에 있으므로 $\dfrac{b-2a}{1-2}=0$이고 $b=2a$이다.

따라서 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\sqrt{2}$이고, $\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$,

$\mathrm{B}\left(\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$이다.

그러므로 선분 AB의 길이는 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$이다.

7) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $\log_2|kx_1|=\log_2(x_1+4)$에서 $x_1<0$이므로

$-kx_1=x_1+4$, $x_1=\dfrac{-4}{k+1}$

$\log_2|kx_2|=\log_2(x_2+4)$에서 $x_2>0$이므로

$kx_2=x_2+4$, $x_2=\dfrac{4}{k-1}$

$x_2=-2x_1$에서

$\dfrac{4}{k-1}=\dfrac{8}{k+1}$, $k+1=2k-2$, $k=3$ (참)

ㄴ. $\log_2|kx_2|=\log_2(-x_2+m)$에서 $x_2>0$이므로

$kx_2=-x_2+m$,

$m=(k+1)x_2=\dfrac{4(k+1)}{k-1}$

$\log_2|kx_3|=\log_2(-x_3+m)$에서 $x_3<0$이므로

$-kx_3=-x_3+m$,

$x_3=\dfrac{-m}{k-1}=\dfrac{-4(k+1)}{(k-1)^2}$

그러므로

$x_1x_3=\dfrac{-4}{k+1}\times\dfrac{-4(k+1)}{(k-1)^2}=\left(\dfrac{4}{k-1}\right)^2=x_2{}^2$ (참)

ㄷ. $x_2{}^2=x_1x_3$에서 $\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_3}{x_2}$

$\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{-k-1}{k-1}=-1-\dfrac{2}{k-1}<-1$

$\dfrac{x_2}{x_1}=r(r<-1)$이라 하면 $x_2=x_1r$, $x_3=x_1r^2$

세 점 A, B, C의 y좌표를 각각 y_1, y_2, y_3이라 하면

두 직선 AB, AC의 기울기의 합이 0이므로

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$$
$$=\frac{\log_2|kx_2|-\log_2|kx_1|}{x_1(r-1)}+\frac{\log_2|kx_3|-\log_2|kx_1|}{x_1(r^2-1)}$$
$$=\frac{\log_2\left|\frac{x_2}{x_1}\right|}{x_1(r-1)}+\frac{\log_2\left|\frac{x_3}{x_1}\right|}{x_1(r^2-1)}$$
$$=\frac{\log_2(-r)}{x_1(r-1)}+\frac{2\log_2(-r)}{x_1(r^2-1)}=0$$

에서 $1+\dfrac{2}{r+1}=0$, $r=-3$

$x_2=x_1r$에서

$\dfrac{4}{k-1}=\dfrac{12}{k+1}$, $k+1=3k-3$, $k=2$이고,

$m=\dfrac{4(k+1)}{k-1}=12$이므로 $m+k^2=16$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

8) [정답] ②

[해설]

$y=\log_n x$, $y=-\log_n(x+3)+1$을 연립하면

$\log_n x=-\log_n(x+3)+1$, $\log_n x+\log_n(x+3)=1$

$\log_n x(x+3)=1$

즉, $x(x+3)=n$이므로 $x^2+3x-n=0$

$f(x)=x^2+3x-n$이라 하면 문제 조건에서 함수 $y=f(x)$의 근이 1보다 크고 2보다 작은 근이 존재한다는 의미이므로 $f(1)<0$, $f(2)>0$이어야 한다.

따라서 $f(1)=4-n<0$, $f(2)=4+6-n>0$

즉, $n>4$, $n<10$이므로 만족하는 n의 범위는 $4<n<10$

따라서 만족하는 자연수 n의 값은 $n=5$, 6, 7, 8, 9

구하고자 하는 n의 값의 합은 $5+6+7+8+9=35$

9) [정답] ④

[해설]

함수 $y=\log_2(x-a)+1$의 그래프가 점 $(7,\ b)$를 지나므로 $b=\log_2(7-a)+1$이다.

함수 $y=\log_2(x-a)+1$의 그래프의 점근선이 $x=3$이므로

$a=3$이고, $b=\log_2(7-3)+1=3$이다.

따라서 $a+b=6$

10) [정답] 15

[해설]

선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2-a}{2-1},\ \dfrac{2\log_8\sqrt[4]{27}-\log_4 b}{2-1}\right)$이고

$$\begin{aligned}2\log_8\sqrt[4]{27}-\log_4 b &= \log_8\sqrt{27}-\log_4 b\\ &=\log_4 3-\log_4 b\\ &=\log_4\frac{3}{b}\end{aligned}$$

이므로 $\left(\dfrac{2-a}{2-1},\ \dfrac{2\log_8\sqrt[4]{27}-\log_4 b}{2-1}\right)=\left(2-a,\ \log_4\dfrac{3}{b}\right)$이다.

이 점이 곡선 $y=-\log_4(3-x)$위에 있으므로

$$\log_4\frac{3}{b}=-\log_4(a+1)=\log_4\frac{1}{a+1}$$

따라서 $b=3(a+1)$이다.

집합 $\{n\,|\,b<2^n\times a\le 32b,\ n\text{은 정수}\}$의 원소의 개수는 5이다.

$$\{n\,|\,b<2^n\times a\le 32b,\ n\text{은 정수}\}$$
$$=\{m,\ m+1,\ m+2,\ m+3,\ m+4\}(m\text{은 정수})$$

라 하면 $m+(m+1)+(m+2)+(m+3)+(m+4)=25$이므로 $m=3$이다.

그러므로 $2\le\log_2\dfrac{b}{a}<3$이다.

$4\le\dfrac{b}{a}<8$이고 $b=3(a+1)$이므로 $\dfrac{3}{5}<a\le 3$이다.

그러므로 $a=1,\ b=6$ 또는 $a=2,\ b=9$ 또는 $a=3,\ b=12$이다.

따라서 $a+b$의 최댓값은 15

11) [정답] ③

[해설]

점 P는 두 곡선 $y=\log_2(-x+k), y=-\log_2 x$의 교점 이므로

$\log_2(-x_1+k)=-\log_2 x_1,\ -x_1+k=\dfrac{1}{x_1}$

즉, $x_1^2-kx_1+1=0$ …… ㉠

점 R는 두 곡선 $y=-\log_2(-x+k), y=\log_2 x$의 교점 이므로

$-\log_2(-x_3+k)=\log_2 x_3,\ \dfrac{1}{-x_3+k}=x_3$

즉, $x_3^2-kx_3+1=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 x_1, x_3은 이차방정식 $x^2-kx+1=0$의 서로 다른 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에서 $x_1x_3=1$

그러므로 $x_3-x_1=2\sqrt{3}$에서

$(x_1+x_3)^2=(x_3-x_1)^2+4x_1x_3=(2\sqrt{3})^2+4\times 1=16$

따라서 $x_1+x_3=4$

12) [정답] ④

[해설]

$f(x)=|\log_2(x-k)|$이므로

$|\log_2(x-k)|=|\log_2(-x+8)|$ …… ㉠

(i) $\log_2(x-k)=\log_2(-x+8)$일 때,

$x-k=-x+8$

$\therefore x=\dfrac{k+8}{2}$

(ii) $\log_2(x-k)=-\log_2(-x+8)$일 때,

$\log_2(x-k)(-x+8)=0$

$-x^2+(k+8)x-8k=1$

$x^2-(k+8)x+8k-1=0$ …… ㉡

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=|\log_2(-x+8)|$이 세 점에서 만나기 위해서는 방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉡이 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이 두 실근을 각각 $\alpha,\ \beta$라 하면 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=k+8$

(i), (ii)에서 세 실근의 합이 18을 만족해야 하므로

$\dfrac{k+8}{2}+(k+8)=18,\ k+8=12$

$\therefore k=4$

[다른 풀이]

$f(x)=|\log_2(x-k)|$이므로 $y=|\log_2(-x+8)|$과 $x=\dfrac{k+8}{2}$에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=|\log_2(-x+8)|$이 세 점에서 만나므로 교점의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha<\beta<\gamma)$라 하면

$\beta=\dfrac{k+8}{2},\ \dfrac{\alpha+\gamma}{2}=k+8$

을 만족한다.

따라서 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}(k+8)=18,\ k+8=12$

$\therefore k=4$

13) [정답] ③

[해설]

곡선 $y=\log_4 x$ 위의 점 A의 y좌표가 1이므로 점 A의 좌표는 $(4,\ 1)$

선분 AB와 x축이 만나는 점을 C라 하면 x축이 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하므로 점 C는 선분 AB의 중점이다.

점 B의 y좌표는 -1이고

점 B는 곡선 $y=-\log_4(x+1)$ 위의 점이므로

점 B의 좌표는 $(3,\ -1)$

따라서 $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{(3-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{10}$

14) [정답] ⑤

[해설]

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자.

$-\log_2(-x)=\log_2(x+2a)$에서

$\log_2(x+2a)+\log_2(-x)=0$

$\log_2\{-x(x+2a)\}=0$

$-x(x+2a)=1$

$x^2+2ax+1=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 두 실근이 x_1, x_2이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=-2a,\ x_1x_2=1$

이다. 이때

$y_1+y_2=-\log_2(-x_1)-\log_2(-x_2)$

$=-\log_2 x_1x_2$

$=-\log_2 1=0$

이므로 선분 AB의 중점의 좌표는 $(-a,\ 0)$이다.

선분 AB의 중점이 직선 $4x+3y+5=0$ 위에 있으므로

$-4a+5=0$에서 $a=\frac{5}{4}$

$a=\frac{5}{4}$를 ㉠에 대입하면

$x^2+\frac{5}{2}x+1=0,\ 2x^2+5x+2=0$

$(x+2)(2x+1)=0$

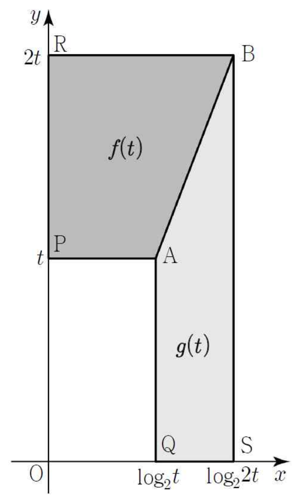
$x=-2$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

따라서 두 교점의 좌표는 $(-2,\ -1)$, $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}=\frac{5}{2}$

15) [정답] ③

[해설]



두 점 A, B의 좌표는 $(\log_2 t,\ t)$, $(\log_2 2t,\ 2t)$이므로 두 사각형의 넓이 $f(t)$, $g(t)$는

$$f(t)=\frac{1}{2}(\log_2 t+\log_2 2t)(2t-t)=\frac{t}{2}\log_2 2t^2$$

$$g(t)=\frac{1}{2}(t+2t)(\log_2 2t-\log_2 t)=\frac{3}{2}t$$

$$\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{1}{3}\log_2 2t^2$$

$\frac{1}{3}\log_2 2t^2=n$ (n은 자연수)라 하면 $2t^2=2^{3n}$이므로

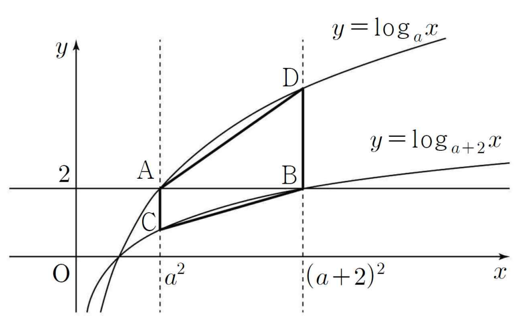
$$t=2^{\frac{3n-1}{2}}$$

$1<t<100$을 만족시키는 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4

따라서 t의 값은 2, $2^{\frac{5}{2}}$, 2^4, $2^{\frac{11}{2}}$이므로 모든 t의 값의 곱은 2^{13}

16) [정답] ⑤

[해설]



ㄱ. 곡선 $y=\log_a x$와 직선 $y=2$가 점 A에서 만나므로

$\log_a x=2$이고 $x=a^2$이다. (참)

ㄴ. $A(a^2,\ 2)$, $C(a^2,\ \log_{a+2}a^2)$에서

$1=\overline{AC}=2-\log_{a+2}a^2$이므로 $\log_{a+2}a^2=1$이다.

$a+2=a^2$, $a^2-a-2=0$에서

$a=-1$ 또는 $a=2$이고 $a>1$이므로 $a=2$이다. (참)

ㄷ. $A(a^2,\ 2)$, $B((a+2)^2,\ 2)$, $C(a^2,\ \log_{a+2}a^2)$,

$D((a+2)^2,\ \log_a(a+2)^2)$에서 $\log_a(a+2)=t$라 하면

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BD}}{\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}$$

$$=\frac{2\log_a(a+2)-2}{2-2\log_{a+2}a}$$

$$=\frac{\log_a(a+2)-1}{1-\log_{a+2}a}$$

$$=\frac{t-1}{1-\frac{1}{t}}$$

$$=\frac{t(t-1)}{(t-1)}$$

$=t$

$=\log_a(a+2)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17) [정답] 75

[해설]

$\overline{OC}=\overline{CA}=\overline{AB}$이므로 점 A의 좌표는 $(k,\ k)$이고, 점 B의 좌표는 $(2k,\ k)$이다.

점 A는 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점이므로

$k=-\log_a k$ …… ㉠

점 B는 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점이므로

$k=\log_a 2k$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면 $\log_a 2k^2=0$에서 $2k^2=1$이므로 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$

곡선 $y=|\log_a x|$와 직선 $y=2\sqrt{2}$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 $-\log_a\alpha=2\sqrt{2}$에서

$\alpha=a^{-2\sqrt{2}}$

$\log_a\beta=2\sqrt{2}$에서 $\beta=a^{2\sqrt{2}}$

㉡에서 $a^k=2k$이므로 $a=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}=2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$d=\beta-\alpha=a^{2\sqrt{2}}-a^{-2\sqrt{2}}$$

$$=\left(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{2\sqrt{2}}-\left(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{-2\sqrt{2}}$$

$$=2^2-2^{-2}=\frac{15}{4}$$

따라서 $20d=20\times\frac{15}{4}=75$

18) [정답] ⑤

[해설]

$m=3^x$에서 $x=\log_3 m$이므로 $A_m(\log_3 m,\ m)$

$m=\log_2 x$에서 $x=2^m$이므로 $B_m(2^m,\ m)$

그러므로 $\overline{A_mB_m}=2^m-\log_3 m$

$\overline{A_mB_m}$이 자연수이기 위해서는 m과 2^m이 자연수이므로 $\log_3 m$이 음이 아닌 정수이다.

그러므로 $m=3^k$(단, k는 음이 아닌 정수이다.)

$m=3^0$일 때, $a_1=2^1-\log_3 1=2$

$m=3^1$일 때, $a_2=2^3-\log_3 3=7$

$m=3^2$일 때, $a_3=2^9-\log_3 9=510$

따라서 $a_3=510$

[보충 설명]

위의 풀이에서 $\overline{A_mB_m}$이 자연수이기 위해서는 $m=3^k$꼴임을 알 수 있다. 이제 m의 값이 3^{n-1}에서 3^n으로 증가하면 $2^m-\log_3 m$의 값도 증가함을 보이자.

모든 자연수 n에 대하여

$$\left(2^{3^n}-n\right)-\left\{2^{3^{n-1}}-(n-1)\right\}$$

$$=2^{3^n}-2^{3^{n-1}}-1$$

$$=2^{3^{n-1}}(2^3-1)-1$$

$$=7\times2^{3^{n-1}}-1$$

$3^{n-1}\geq1$이므로 $2^{3^{n-1}}\geq2$이다.

그러므로 $7\times2^{3^{n-1}}-1>0$

따라서 $2^{3^{n-1}}-(n-1)<2^{3^n}-n$이 성립한다.

19) [정답] ④

[해설]

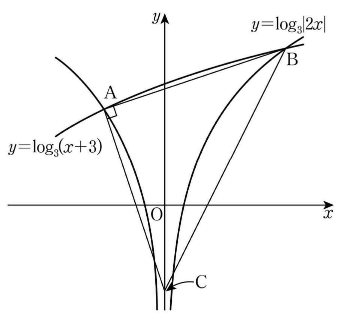
$\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 2)$, $\mathrm{C}(4,\ \log_a 4)$에서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(4-1)\times(2-\log_a 4)=\frac{9}{2}$$

$\log_a 4=-1$이므로 $a=\frac{1}{4}$

20) [정답] ⑤

[해설]



$x<0$일 때의 교점 A의 x좌표는 방정식 $\log_3(-2x)=\log_3(x+3)$의 근이므로

$$-2x=x+3,\ 3x=-3,\ x=-1$$

따라서 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(-1,\ \log_3 2)$

$x>0$일 때의 교점 B의 x좌표는 방정식 $\log_3 2x=\log_3(x+3)$의 근이므로 $2x=x+3,\ x=3$

따라서 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(3,\ \log_3 6)$이다.

두 점 $\mathrm{A}(-1,\ \log_3 2)$, $\mathrm{B}(3,\ \log_3 6)$에 대하여 직선 AB의 기울기는

$\dfrac{\log_3 6-\log_3 2}{3-(-1)}=\dfrac{\log_3\frac{6}{2}}{4}=\dfrac{1}{4}$이므로 점 A를 지나고 직선 AB와 수직인 직선의 방정식은

$$y-\log_3 2=-4(x+1)$$

$$y=-4x-4+\log_3 2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 y축과 만나는 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(0,\ -4+\log_3 2)$이다.

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{4^2+(\log_3 6-\log_3 2)^2}=\sqrt{17}$,

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$이므로 직각삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{17}\times\sqrt{17}=\frac{17}{2}$$

21) [정답] **12**

[해설]

조건 (가)에 의하여 삼각형 ADB의 넓이를 S라 하면 삼각형 BDC의 넓이는 $3S$이다.

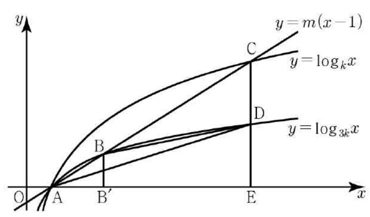
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:3$에서 $\overline{\mathrm{BC}}=3\overline{\mathrm{AB}}$이고 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 B′이라 하면 $\overline{\mathrm{B'E}}=3\overline{\mathrm{AB'}}$이다.

$\overline{\mathrm{AB'}}=\mathrm{a}$라 하면 $\overline{\mathrm{B'E}}=3\mathrm{a}$이므로

$$\mathrm{B}(\mathrm{a}+1,\ \log_{3\mathrm{k}}(\mathrm{a}+1)),\ \mathrm{C}(4\mathrm{a}+1,\ \log_{\mathrm{k}}(4\mathrm{a}+1)),$$

$$\mathrm{D}(4\mathrm{a}+1,\ \log_{3\mathrm{k}}(4\mathrm{a}+1))$$

이다.



조건 (나)에 의하여 삼각형 AED의 넓이는 $4S$이고 삼각형 AEC의 넓이는 $8S$이므로 D는 선분 CE의 중점이다.

$$\log_k(4a+1)=2\log_{3k}(4a+1)$$

$$\frac{\log_k(4a+1)}{\log_k k}=\frac{2\log_k(4a+1)}{\log_k 3k}$$

$\log_k 3k=2$에서 $k^2=3k$이므로 $k=3$

세 점 A, B, C가 직선 $y=m(x-1)$위에 있으므로

$m=\dfrac{\log_9(a+1)-0}{(a+1)-1}=\dfrac{\log_3(4a+1)-0}{(4a+1)-1}$에서

$$2\log_3(a+1)=\log_3(4a+1)$$

$$(a+1)^2=4a+1,\ a^2-2a=0$$

$a>0$이므로 $a=2$

$$m=\frac{\log_9 3}{2}=\frac{1}{4}$$

따라서 $\dfrac{k}{m}=12$

22) [정답] ⑤

[해설]

점 P의 좌표를 $P(t,\ a^t)$ $(t<0)$이라 하면 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는 $(a^t,\ t)$이다.
$\angle PQR=45°$이고 직선 PQ의 기울기가 -1이므로 두 점 Q, R의 x좌표는 같다.

즉 점 R의 좌표는 $(a^t,\ -t)$이다.

직선 PR의 기울기는 $\frac{1}{7}$이므로 $\frac{a^t+t}{t-a^t}=\frac{1}{7}$에서

$$a^t=-\frac{3}{4}t \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{PR}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$이므로 $\sqrt{(t-a^t)^2+(a^t+t)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$$a^{2t}+t^2=\frac{25}{4} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $t^2=4$이고 $t<0$이므로 $t=-2$

㉠에 대입하면 $\frac{1}{a^2}=\frac{3}{2}$이고 $a>0$이므로 $a=\frac{\sqrt{6}}{3}$

23) [정답] ③

[해설]
ㄱ. 점 A의 x좌표는 $\log_a x=1$에서 $x=a$이므로 $A(a,\ 1)$
또 점 B의 x좌표는 $\log_{4a}x=1$에서 $x=4a$이므로 $B(4a,\ 1)$
그러므로 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{1\times 4a-4\times a}{1-4},\ \frac{1\times 1-4\times 1}{1-4}\right)$, 즉 $(0,\ 1)$이다. (참)
ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 선분 AB가 x축과 평행하므로 두 점 A, D의 x좌표는 같아야 한다.
한편, 점 D의 x좌표는 $\log_{4a}x=-1$에서 $x=\frac{1}{4a}$이므로
$D\left(\frac{1}{4a},\ -1\right)$
이때 $A(a,\ 1)$이고 $\frac{1}{4}<a<1$이므로
$a=\frac{1}{4a}$, $a^2=\frac{1}{4}$, $a=\frac{1}{2}$(참)
ㄷ. 점 C의 x좌표는 $\log_a x=-1$에서 $x=\frac{1}{a}$이므로
$C\left(\frac{1}{a},\ -1\right)$
그러므로 $\overline{AB}<\overline{CD}$이면
$4a-a<\frac{1}{a}-\frac{1}{4a}$, $3a<\frac{3}{4a}$, $a^2<\frac{1}{4}$
이때 $\frac{1}{4}<a<1$이므로 $\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$(거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

24) [정답] ③

[해설]
직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 E라 하면 삼각형 ACB와 삼각형 BCD의 넓이의 비가 $3:2$이므로
$\frac{1}{2}\times\overline{CB}\times\overline{AB} : \frac{1}{2}\times\overline{CB}\times\overline{BE}=3:2$이다.

$\overline{AB}:\overline{BE}=3:2$이므로 $\overline{BE}=\frac{2}{5}\overline{AE}$이다.

$\overline{BE}=\log_a k$, $\overline{AE}=\log_2 k$이므로

$\log_a k=\frac{2}{5}\log_2 k$에서 $a=2^{\frac{5}{2}}=4\sqrt{2}$

25) [정답] ④

[해설]
직선 $y=-2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점이 A이므로
$-2=\frac{1}{2}\log_a(x-1)-2$에서 $x=2$
즉, $A(2,\ -2)$
$B\left(10,\ \frac{1}{2}\log_a 9-2\right)$, $C(10,\ -\log_a 8+1)$이고, 점 A와 직선 $x=10$ 사이의 거리는 8이므로 삼각형 ACB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 8\times\left\{\left(\frac{1}{2}\log_a 9-2\right)-(-\log_a 8+1)\right\}$$
$$=4\times(\log_a 24-3)=28$$

따라서 $\log_a 24=10$이므로 $a^{10}=24$

26) [정답] ②

[해설]
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 각각 $x=p$, $y=1$이므로

$A(p,\ 2^p+1)$, $B(p,\ 0)$, $C(p+2,\ 1)$

(삼각형 ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(2^p+1)\times 2=2^p+1$

삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$2^p+1=6$, $2^p=5$

따라서 $p=\log_2 5$

27) [정답] **192**

[해설]

곡선 $y=a^{x-1}$은 곡선 $y=a^x$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=\log_a(x-1)$은 곡선 $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$은 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 직선 $y=-x+4$, $y=x-1$의 교점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $\mathrm{M}\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이고, 점 M은 선분 AB의 중점이므로 $\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{2}$이다.

점 A의 좌표를 $(k,\ -k+4)$라 하면

$\left(k-\frac{5}{2}\right)^2+\left(-k+\frac{5}{2}\right)^2=2$에서 $k=\frac{3}{2}$

즉, $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$이므로

$$\frac{5}{2}=a^{\frac{3}{2}-1},\ a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2},\ a=\frac{25}{4}$$

이때 점 C의 좌표는 $\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$, 즉 $\left(0,\ \frac{4}{25}\right)$이고, 점 C에서 직선 $y=-x+4$에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH의 길이는 점 C와 직선 $y=-x+4$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{\left|0+\frac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{48\sqrt{2}}{25}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

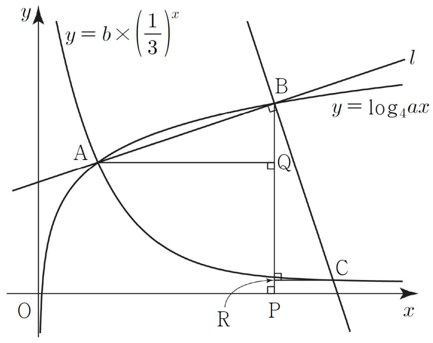
$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CH}}$$
$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{48\sqrt{2}}{25}$$
$$=\frac{96}{25}$$

이므로 $50\times S=50\times\frac{96}{25}=192$

28) [정답] ②

[해설]

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 P, 점 A에서 선분 BP에 내린 수선의 발을 Q, 점 C에서 선분 BP에 내린 수선의 발을 R라 하자.



ㄱ. 직선 l의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로

$$\frac{\overline{\mathrm{BQ}}}{\overline{\mathrm{AQ}}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1}{3},\ y_2-y_1=\frac{1}{3}(x_2-x_1)$$
$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{10}$$
$$\frac{10}{9}(x_2-x_1)^2=10,\ (x_2-x_1)^2=9$$

$x_1<x_2$이므로 $x_2-x_1=3$ (참)

ㄴ. $\angle\mathrm{AQB}=\angle\mathrm{BRC}=\frac{\pi}{2}$이고

$\angle\mathrm{ABQ}+\angle\mathrm{CBR}=\angle\mathrm{CBR}+\angle\mathrm{BCR}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\angle\mathrm{ABQ}=\angle\mathrm{BCR}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{10}$이므로 두 삼각형 ABQ와 BCR는 합동이다.

$$\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BR}}=3,\ \overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{CR}}=1$$
$$x_3-x_1=\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{CR}}=3+1=4$$
$$y_1-y_3=\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{BR}}-\overline{\mathrm{BQ}}=3-1=2$$

$x_3-x_1=2(y_1-y_3)=4$ (참)

ㄷ. ㄱ에 의하여 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_1+3,\ y_1+1)$

두 점 A, B는 곡선 $y=\log_4 ax$위에 있으므로

$y_1=\log_4 ax_1$ ...... ㉠

$y_1+1=\log_4 a(x_1+3)$ ...... ㉡

점 A는 곡선 $y=b\times\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 위에 있으므로

$y_1=\frac{b}{3^{x_1}}$ ...... ㉢

㉠, ㉡을 연립하면 $1=\log_4\frac{x_1+3}{x_1}$, $x_1=1$

㉠, ㉢에 의하여 $\log_4 a=\frac{b}{3}$, $a=4^{\frac{b}{3}}$

$a^2=4^{\frac{2}{3}b}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[참고]

점 $\mathrm{C}(x_1+4,\ y_1-2)$는 곡선 $y=b\times\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 위에 있고 $x_1=1$,

$y_1=\frac{b}{3}$이므로 $\frac{b}{3}-2=b\times3^{-5}$에서 $b=\frac{243}{40}$

$a=4^{\frac{b}{3}}=4^{\frac{81}{40}}=2^{\frac{81}{20}}$

29) [정답] ⑤

[해설]

점 A의 좌표는 $(k,\ 2^{k-1}+1)$이고 $\overline{AB}=8$이므로 점 B의 좌표는 $(k,\ 2^{k-1}-7)$이다.

직선 BC의 기울기가 -1이고 $\overline{BC}=2\sqrt{2}$이므로 두 점 B, C의 x좌표의 차와 y좌표의 차는 모두 2이다.

따라서 점 C의 좌표는 $(k-2,\ 2^{k-1}-5)$이다.

한편 점 C는 곡선 $y=2^{x-1}+1$ 위의 점이므로

$2^{k-3}+1=2^{k-1}-5$

$\frac{1}{2}\times2^k-\frac{1}{8}\times2^k=6,\ 2^k=16$

$k=4$

즉, A$(4,\ 9)$, B$(4,\ 1)$, C$(2,\ 3)$이다.

점 B가 곡선 $y=\log_2(x-a)$ 위의 점이므로 $1=\log_2(4-a)$,

$4-a=2,\quad a=2$

점 D의 x좌표는 $x-2=1$에서 3

사각형 ACDB의 넓이는 두 삼각형 ACB, CDB의 넓이의 합이고 $\overline{BC}\perp\overline{BD}$이므로

$\frac{1}{2}\times8\times2+\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=10$

30) [정답] ⑤

[해설]

두 점 A, B의 좌표를 각각

A$(a,\ \log_2 2a)$, B$(b,\ \log_2 4b)(a<b)$라 하자.

직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{\log_2 4b-\log_2 2a}{b-a}=\frac{1}{2}$에서

$\log_2 4b-\log_2 2a=\frac{1}{2}(b-a)$

$\overline{AB}=\sqrt{(b-a)^2+(\log_2 4b-\log_2 2a)^2}$

$=\sqrt{(b-a)^2+\frac{1}{4}(b-a)^2}$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}\times(b-a)=2\sqrt{5}$

$b-a=4\qquad\cdots\cdots$㉠

$\log_2 4b-\log_2 2a=\log_2\frac{2b}{a}=2,\ b=2a\cdots\cdots$㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=4,\ b=8$

A$(4,\ 3)$, B$(8,\ 5)$, C$(4,\ 0)$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times3\times4=6$

31) [정답] 5

[해설]

함수 $y=\log_2(x+1)+2$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 함수 $y=\log_2(x+1)+2$는 $x=7$일 때 최댓값 5를 갖는다.

32) [정답] ④

[해설]

함수 $f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$는 감소함수이므로

닫힌구간 $[0,\ 12]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)$, 최솟값은 $f(12)$이다.

$f(0)=2\log_{\frac{1}{2}}k=-4$이므로 $\log_{\frac{1}{2}}k=-2,\ k=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$

$f(12)=2\log_{\frac{1}{2}}(12+4)=-2\log_2 16=-8$이므로 $m=-8$

따라서 $k+m=4+(-8)=-4$

33) [정답] ②

[해설]

$0\le x\le5$에서 함수 $f(x)=\log_3\{(x-3)^2+k-9\}$는

$x=0$일 때, 최댓값 $\log_3 k$,

$x=3$일 때, 최솟값 $\log_3(k-9)$를 갖는다.

$\log_3 k+\log_3(k-9)=2+\log_3 4$

$\log_3 k(k-9)=\log_3 36$

$k^2-9k-36=0,\ (k-12)(k+3)=0$

$k>9$이므로 $k=12$

34) [정답] ①

[해설]

$\angle A=90^\circ$이고 $\overline{AB}=2\log_2 x$, $\overline{AC}=\log_4\frac{16}{x}$인 삼각형 ABC의 넓이를 $S(x)$는

$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}$

$=\frac{1}{2}\times 2\log_2 x\times\log_4\frac{16}{x}$

$=\frac{1}{2}\times 2\log_2 x\times\frac{1}{2}(\log_2 16-\log_2 x)$

$=\frac{1}{2}\times\log_2 x\times(4-\log_2 x)\ (1<x<16)$

식에서 $\log_2 x=t$로 치환하면

$f(t)=\frac{1}{2}t(4-t)\ (0<t<4)$

$=\frac{1}{2}(t-2)^2+2$

따라서 $t=2$일 때, $f(t)$가 최댓값 2를 갖는다.

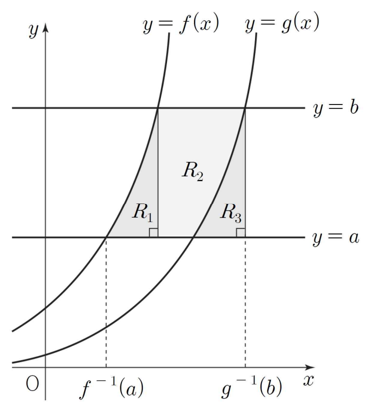
즉 $\log_2 x=2$, $x=4$일 때, $S(x)$는 최댓값 2를 갖는다.

따라서 $a=4$, $M=2$이므로 $a+M=6$

35) [정답] ①

[해설]

두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=2^{x-2}$의 그래프는 다음과 같다.



세 영역 R_1, R_2, R_3의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자.

함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $S_1=S_3$

조건 (가)에서

$S_1+S_2=S_3+S_2=2\times(b-a)=6$

$b-a=3$ …… ㉠

조건 (나)에서

$f^{-1}(a)=p$, $g^{-1}(b)=q$ (p, q는 실수)라 하면

$2^p=a$, $2^{q-2}=b$

$p=\log_2 a$, $q=\log_2 b+2=\log_2 4b$

$q-p=\log_2 4b-\log_2 a=\log_2\frac{4b}{a}=\log_2 6$

$3a=2b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=9$

$a+b=15$

36) [정답] ①

[해설]

함수 $y=3^x-a$의 역함수의 그래프가 두 점 $(3,\ \log_3 b)$, $(2b,\ \log_3 12)$를 지나므로 함수 $y=3^x-a$의 그래프는 두 점 $(\log_3 b,\ 3)$, $(\log_3 12,\ 2b)$를 지난다.

따라서 $3=3^{\log_3 b}-a$, $2b=3^{\log_3 12}-a$이다.

$3=b-a$, $2b=12-a$에서 $a=2$이고 $b=5$이다.

$\therefore a+b=7$

37) [정답] ②

[해설]

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)=\log_2(x+a)+b$의 역함수이므로

$g(x)=2^{x-b}-a$

곡선 $y=g(x)$의 점근선이 직선 $y=-a$이므로

$a=-1$

곡선 $y=g(x)$가 점 $(3,\ 2)$를 지나므로

$g(3)=2^{3-b}+1=2$에서

$b=3$

따라서 $a+b=-1+3=2$

38) [정답] ①

[해설]

함수 $y=\log_3(2x+1)$의 그래프가 점 $(a,\ 4)$를 지나므로

$4=\log_3(2a+1)$, $2a+1=3^4$

따라서 $a=40$

39) [정답] 11

[해설]

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프는 $y=\log_2(x-m)$이고 이 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프는 $y=2^x+m$이다.

$f(x)=2^x+m$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1,\ 5)$를 지나므로 $5=2+m$에서 $m=3$이다.

따라서 $f(3)=2^3+3=11$

40) [정답] 49

[해설]
직선 $y=-x+5$의 기울기가 -1이고 곡선 $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이 곡선 $y=\log_a(x-1)-1$이므로 점 B를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점이 C이다.
$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=2:1$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$이다.
점 A의 x좌표를 t라 하면 $\mathrm{A}(t,\ 5-t)$이고 두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$는 역함수 관계이므로 $\mathrm{B}(5-t,\ t)$이다. 그런데 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$이므로 두 점 A, B의 x좌표의 차는 2이고 $(5-t)-t=2$, 즉 $t=\dfrac{3}{2}$이다.

점 $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$이 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로

$a^{\frac{3}{2}}=\dfrac{7}{2}$, 즉 $a^3=\dfrac{49}{4}$이다.

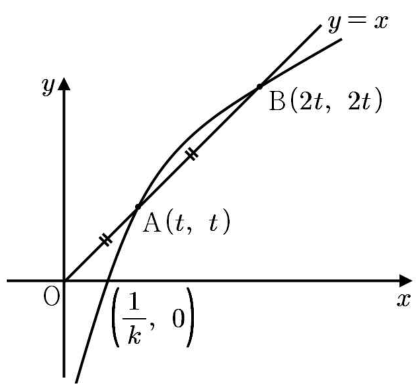
따라서 $4a^3=49$

41) [정답] ⑤

[해설]
ㄱ. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$는
직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로
$x_1=y_2$, $y_1=x_2$, $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$
삼각형 OAB의 넓이가 삼각형 OAC의 넓이의 2배이므로
$\overline{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}}$ (참)
ㄴ. 점 C는 선분 OB의 중점이므로
$x_3=\dfrac{1}{2}x_2$, $y_3=\dfrac{1}{2}y_2$
$x_2=y_1=2x_3$
$x_2+y_1=2y_1=4x_3$ (참)
ㄷ. $y_2=2^{x_2}$, $y_3=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x_3}$
세 점 O, B, C는 직선 l 위의 점이므로
직선 l의 기울기는 $\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{y_3}{x_3}$, $\dfrac{2^{x_2}}{x_2}=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x_3}}{x_3}$
㉡에서 $x_2=2x_3$이므로
$\dfrac{2^{2x_3}}{2x_3}=\dfrac{2^{-x_3}}{x_3}$, $2^{2x_3-1}=2^{-x_3}$
$2x_3-1=-x_3$이므로 $x_3=\dfrac{1}{3}$
직선 l의 기울기는 $\dfrac{y_3}{x_3}=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x_3}}{x_3}=3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

42) [정답] 16

[해설]



그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$이고, 두 점 A, B가 $y=x$위의 점이므로
두 점 A, B의 좌표는 $\mathrm{A}(t,\ t)$, $\mathrm{B}(2t,\ 2t)$이다.
$y=\log_2 kt$에 점 $(t,\ t)$, $(2t,\ 2t)$를 대입하면
$t=\log_2 kt$ …… ㉠
$2t=\log_2 2kt$ …… ㉡
㉠$\times 2$를 하면 $2t=2\log_2 kt$
$\therefore 2t=\log_2(kt)^2$ …… ㉢
㉡과 ㉢를 연립하면 $\log_2 2kt=\log_2(kt)^2$,
$(kt)^2=2kt$, $kt=2\,(\because\ kt>0)$
㉠에서 $kt=2$이므로 $t=\log_2 2=1$
$\therefore k=2$
$\therefore f(x)=\log_2 2x$
$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $g(5)=a$로 놓으면 $f(a)=5$이므로
$\log_2 2a=5$, $2a=2^5$
$\therefore a=16$
따라서 $g(5)=16$

43) [정답] 11

[해설]

방정식 $\log_2(x+5)=4$에서 $x+5=2^4$이다.

$x=16-5$이므로 $x=11$이다.

44) [정답] 12

[해설]

진수 조건에 의하여 $x>0$이고 $2x-3>0$이므로

$x>\frac{3}{2}$ …… ㉠

$\log_2 x=1+\log_4(2x-3)$에서

$\log_4 x^2=\log_4 4(2x-3)$

$x^2=4(2x-3)$, $x^2-8x+12=0$

$(x-2)(x-6)=0$

따라서 ㉠을 만족하는 x의 값은 $x=2$ 또는 6이므로 실수 x의 값의 곱은 $2\times6=12$

45) [정답] ⑤

[해설]

$\log_3 x=t$라 하면 $\log_{27}x=\frac{1}{3}t$이므로

(좌변)$=\log_3(\log_{27}x)=\log_3\left(\frac{1}{3}t\right)=\log_{27}\left(\frac{1}{3}t\right)^3$

(우변)$=\log_{27}t$

$\therefore\ \frac{1}{27}t^3=t$, $t^2=27$

$\therefore (\log_3 x)^2=27$

46) [정답] 5

[해설]

$\log_3(x-2)=1$에서 $x-2=3$이다.

따라서 $x=5$

47) [정답] 11

[해설]

$x-3$, $x-10$은 로그의 진수이므로

$x-3>0$, $x-10>0$에서 $x>10$

방정식 $2\log_4(x-3)+\log_2(x-10)=3$에서

$\log_2(x-3)+\log_2(x-10)=\log_2 8$

$\log_2(x-3)(x-10)=\log_2 8$

$(x-3)(x-10)=8$

$(x-2)(x-11)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=11$

따라서 $x>10$이므로 $x=11$

48) [정답] 12

[해설]

진수 조건에 의해 $x+4>0$, $x-4>0$

$\therefore\ x>4$

$\log_2(x+4)+\log_{\frac{1}{2}}(x-4)=\log_2(x+4)-\log_2(x-4)$

$=\log_2\frac{x+4}{x-4}=1$

따라서 $\frac{x+4}{x-4}=2$이므로 $2x-8=x+4$

$\therefore\ x=12$

49) [정답] 24

[해설]

진수 조건에 의해 $x>-1$이고

$\log_5(x+1)=2$에서 $x+1=5^2$이므로 $x=24$

50) [정답] 6

[해설]

진수조건에서

$x+2>0$이고 $x-2>0$

이어야 하므로

$x>2\cdots$㉠

$\log_2(x+2)+\log_2(x-2)$

$=\log_2(x+2)(x-2)$

$=\log_2(x^2-4)$

$=5$

에서

$x^2-4=2^5$

$x^2=36\cdots$㉡

㉠, ㉡에서

$x=6$

51) [정답] 10

[해설]

$\log_2(3x+2)=2+\log_2(x-2)$에서

$3x+2>0$, $x-2>0$이므로 $x>2$

$\log_2(3x+2)=\log_2 2^2+\log_2(x-2)$

$\log_2(3x+2)=\log_2 4(x-2)$

이므로

$3x+2=4(x-2)$

$\therefore\ x=10$

52) [정답] 7

[해설]

$\log_3(x-4)=\log_9(x+2)$에서 진수 조건은 $x>4$, $x>-2$이다.

따라서 $x>4$

로그의 성질에 의하여 $\log_3(x-4)=\log_{3^2}(x-4)^2$이므로

$\log_9(x-4)^2=\log_9(x+2)$에서

$(x-4)^2=(x+2)$

$x^2-9x+14=0$

$(x-2)(x-7)=0$

따라서 $x=7(\because x>4)$

53) [정답] 250

[해설]

$\log a=A$, $\log b=B$, $\log c=C$라 하고 준 식을 정리하면

$A+B-\log 2=AB$ …… ㉠

$B+C-\log 2=BC$ …… ㉡

$C+A=CA$ …… ㉢

(단, $A>1$, $B>1$, $C>1$)

㉠−㉡에서 $A-C=B(A-C)$이므로 $A=C$ ($\because B>1$)

㉢에 대입하면 $2C=C^2$ 즉, $C=2$ ($\because C>1$)

$\therefore A=2$

㉠에 대입하면 $2+B-\log 2=2B$

$\therefore B=\log 50$

$\log a=2$에서 $a=100$

$\log b=\log 50$에서 $b=50$

$\log c=2$에서 $c=100$

$\therefore a+b+c=250$

[다른 풀이]

$\log a=A$, $\log b=B$, $\log c=C$라 하면

$\log\dfrac{ab}{2}=(\log a)(\log b)$에서

$A+B-\log 2=AB$, $(A-1)(B-1)=\log 5$ …… ㉠

$\log\dfrac{bc}{2}=(\log b)(\log c)$에서

$B+C-\log 2=BC$, $(B-1)(C-1)=\log 5$ …… ㉡

$\log(ca)=(\log c)(\log a)$에서

$C+A=CA$, $(C-1)(A-1)=1$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 곱하면

$\{(A-1)(B-1)(C-1)\}^2=(\log 5)^2$

$A>1$, $B>1$, $C>1$이므로

$(A-1)(B-1)(C-1)=\log 5$ …… ㉣

㉣÷㉠을 하면 $C-1=1$, $\log c=2$

$\therefore c=100$

㉣÷㉡을 하면 $A-1=1$, $\log a=2$

$\therefore a=100$

㉣÷㉢을 하면 $B-1=\log 5$, $\log b=\log 50$

$\therefore b=50$

이상에서 $a+b+c=250$

54) [정답] ③

[해설]

(ⅰ) $0<t<1$일 때, $\dfrac{1}{t}>1$이므로

$f(t)+f\left(\dfrac{1}{t}\right)=0+\log_3\dfrac{1}{t}=2$에서 $t=\dfrac{1}{9}$이다.

(ⅱ) $t=1$일 때, $f(t)+f\left(\dfrac{1}{t}\right)=0\neq 2$

(ⅲ) $t>1$일 때, $0<\dfrac{1}{t}<1$이므로

$f(t)+f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\log_3 t+0=2$에서 $t=9$이다.

따라서 $f(t)+f\left(\dfrac{1}{t}\right)=2$를 만족시키는 모든 양수 t의 값의 합은

$\dfrac{1}{9}+9=\dfrac{82}{9}$

55) [정답] ⑤

[해설]

진수 조건에 의해

$n^2-9n+18>0,\ (n-6)(n-3)>0$

$n<3$ 또는 $n>6$ …… ㉠

$\log_{18}(n^2-9n+18)<1$에서 $n^2-9n+18<18$이므로

$n^2-9n<0,\ n(n-9)<0$

$0<n<9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 n의 값의 범위는

$0<n<3$ 또는 $6<n<9$

이를 만족시키는 자연수는 1, 2, 7, 8이므로 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은 $1+2+7+8=18$

56) [정답] 4

[해설]

$\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)$에서 진수조건에 의해 $2x-5>0$이므로 $x>\frac{5}{2}$

$2+\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)>0$이므로 $\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)>-2$

$2x-5<9,\ 2x<14$

$\therefore x<7$

$\therefore \frac{5}{2}<x<7$

따라서 만족하는 정수 x는 3, 4, 5, 6이고, 개수는 4개다.

57) [정답] ②

[해설]

$\log 3x<2,\ \log 3x<\log 100$

상용로그의 밑이 1보다 크므로

$0<3x<100,\ 0<x<\frac{100}{3}$

따라서 정수 x의 최댓값은 33

58) [정답] ③

[해설]

$\log_2(x^2-7x)-\log_2(x+5)\le 1$의 진수조건에서

$-5<x<0$ 또는 $x>7$ …… ㉠

$\log_2(x^2-7x)\le \log_2 2(x+5)$이므로

$x^2-7x\le 2x+10,\ x^2-9x-10\le 0$

$(x-10)(x+1)\le 0,\ -1\le x\le 10$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-1\le x<0$ 또는 $7<x\le 10$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는 -1, 8, 9, 10이므로 그 합은 26이다.

59) [정답] 4

[해설]

$|x-1|$과 $x+2$는 로그의 진수이므로

$|x-1|>0,\ x+2>0$

$\therefore x\ne 1,\ x>-2$

(i) $-2<x<1$인 경우

$\log(-x+1)+\log(x+2)\le 1$

$(-x+1)(x+2)\le 10,\ x^2+x-2\ge -10$

$x^2+x+8=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{31}{4}\ge 0$

$-2<x<1$인 모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.

x는 정수이므로 $x=-1$ 또는 $x=0$

(ii) $x>1$인 경우

$\log(x-1)+\log(x+2)\le 1$

$(x-1)(x-2)\le 10,\ (x+4)(x-3)\le 0$

$-4\le x\le 3$

$x>1$이므로 $1<x\le 3$

x는 정수이므로 $x=2$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에 의하여 모든 정수 x의 값의 합은

$(-1)+0+2+3=4$

60) [정답] ①

[해설]

진수 조건에서 $x+5>0$, 즉 $x>-5$ ……㉠

$\log_3(x+5)<8\log_{3^2}2$에서

$\log_3(x+5)<\log_3 2^4$

$x+5<16$, 즉 $x<11$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여 $-5<x<11$이므로 정수 x의 최댓값은 10, 최솟값은 -4이다.

따라서 정수 x의 최댓값과 최솟값의 합은 6이다.

61) [정답] ①

[해설]
x, $x-6$은 로그의 진수이므로 $x>0$, $x-6>0$에서
$x>6 \cdots\cdots$ ㉠
$\log_2 x \le 4-\log_2(x-6)$
$\log_2 x(x-6) \le \log_2 16$
$x^2-6x-16 \le 0$에서 $-2 \le x \le 8 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $6<x \le 8$
따라서 모든 정수 x의 값의 합은 $7+8=15$

62) [정답] ①

[해설]
$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{4x-4}$에서 $1-x \le 4x-4$

$\therefore x \ge 1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\log_2 4x < \log_2(x+k)$에서 $0<4x<x+k$

$\therefore 0<x<\frac{k}{3} \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x가 존재하지 않으므로

양수 k는 $0<\frac{k}{3} \le 1 \quad \therefore \ 0<k \le 3$

따라서 최대가 되는 k의 값은 3

63) [정답] ④

[해설]
함수 $f(x)=-\log_3(mx+5)$는 $-1 \le x \le 1$에서 정의되므로

$-5<m<5$

$f(-1)<f(1)$이므로 $m<0$

따라서 $-5<m<0$인 모든 정수 m의 개수는 4

64) [정답] 12

[해설]
점 $A(a, b)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하면 $B(b, a)$이다.
조건 (가)에서 점 $A(a, b)$가 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위의 점이므로
$b=\log_2(a+2)+k \cdots\cdots$ ㉠
조건 (나)에서 점 $B(b, a)$가 곡선 $y=4^{x+k}+2$ 위의 점이므로
$a=4^{b+k}+2 \cdots\cdots$ ㉡
㉠에서
$b-k=\log_2(a+2)$, $2^{b-k}=a+2$
$a=2^{b-k}-2 \cdots\cdots$ ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 정리하면
$4^{b+k}+2=2^{b-k}-2$
$4^k \times 4^b-2^{-k} \times 2^b+4=0 \ \cdots\cdots$ ㉣
조건을 만족시키는 점 A가 오직 하나이므로 방정식 ㉣을 만족시키는 실수 b는 오직 하나이고
$2^b=t(t>0)$으로 놓으면 t에 대한 이차방정식
$4^k t^2-2^{-k}t+4=0 \ \cdots\cdots$ ㉤
은 오직 하나의 양의 실근을 갖는다. t에 대한 이차방정식 ㉤의 두 근의 곱은 $\frac{4}{4^k}=4^{1-k}>0$이므로 t에 대한 이차방정식 ㉤이 오직 하나의 양의 실근을 가지려면 ㉤의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이어야 한다.
$D=(-2^{-k})^2-4 \times 4^k \times 4$
$=4^{-k}-16 \times 4^k=0$
위의 방정식의 양변에 4^k을 곱하여 정리하면
$2^{4k+4}=1$, $k=-1$
㉤에 대입하여 정리하면
$\frac{1}{4}t^2-2t+4=0$, $\frac{1}{4}(t-4)^2=0$
$t=4$
즉, $2^b=4$에서 $b=2$이다.
$k=-1$, $b=2$를 ㉡에 대입하여 정리하면
$a=4^{2+(-1)}+2=6$
따라서 $a \times b=6 \times 2=12$

65) [정답] 6

[해설]
이차방정식 $3x^2-2(\log_2 n)x+\log_2 n=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하기 위해서는

$\frac{D}{4}=(\log_2 n)^2-3 \times \log_2 n<0$,

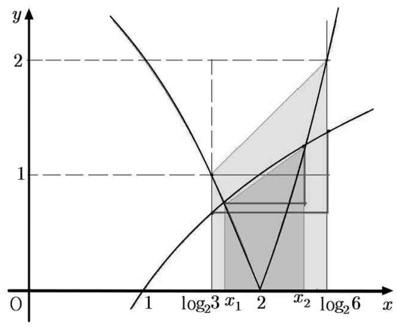
$(\log_2 n-3)\log_2 n<0$, $0<\log_2 n<3$, $1<n<8$

n은 자연수이므로 $n=2, 3, 4, 5, 6, 7$

따라서 조건을 만족하는 자연수 n의 개수는 6

66) [정답] ②

[해설]



ㄱ. 그림에서 $\log_2 3 < x_1 < x_2 < \log_2 6$이 성립한다. (참)

ㄴ. 그림에서 색칠한 사다리꼴의 넓이에서

$\frac{1}{2}(x_2 - x_1)(2^{x_2} - 2^{x_1}) < \frac{3}{2}$ (참)

ㄷ. 그림에서 빨간 직각삼각형의 높이에서

$(2^{x_2} - 4) - (4 - 2^{x_1}) < \log_2(\log_2 6) - \log_2(\log_2 3)$

$2^{x_1} + 2^{x_2} < 8 + \log_2(\log_3 6)$

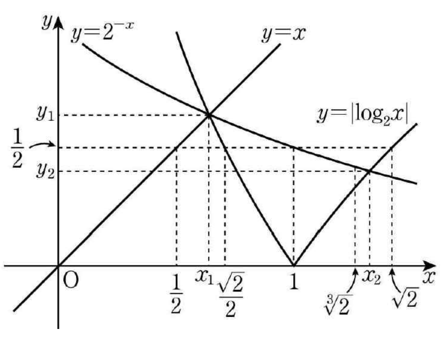
(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

67) [정답] ⑤

[해설]

$y = 2^{-x}$, $y = \left|\log_2 x\right|$, $y = x$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $0 < x < 1$일 때,

두 곡선 $y = 2^{-x}$, $y = -\log_2 x$의 교점은 직선 $y = x$위에 있으므로 $x_1 = y_1$이고 $x_1 < 1$, $y_1 < 1$

그림에서 $y = 2^{-x}$은 감소함수이므로

$2^{-1} < 2^{-x_1} = y_1$

즉, $\frac{1}{2} < y_1 = x_1$

한편, $-\log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} < y_1 = -\log_2 x_1$이고

$y = -\log_2 x$는 감소함수이므로 $x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$

그러므로 $\frac{1}{2} < x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (참)

ㄴ. $2^{-\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2^{\sqrt[3]{2}}}$이고 $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$

그런데 $8 < 9$이므로 $2^{\frac{3}{2}} < 3$

…… ㉠

$\sqrt[3]{2}$와 $\frac{3}{2}$을 각각 세제곱하면 $(\sqrt[3]{2})^3 < \left(\frac{3}{2}\right)^3$이므로

$\sqrt[3]{2} < \frac{3}{2}$ 즉, $2^{\sqrt[3]{2}} < 2^{\frac{3}{2}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2^{\sqrt[3]{2}} < 2^{\frac{3}{2}} < 3$이므로

$\log_2 \sqrt[3]{2} < 2^{-\sqrt[3]{2}}$

그러므로 $\sqrt[3]{2} < x_2$

또, $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, $2^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$이므로 $\log_2 \sqrt{2} > 2^{-\sqrt{2}}$

그림에서 $x_2 < \sqrt{2}$

그러므로 $\sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2}$ (참)

ㄷ. $y_1 = x_1$이므로 ㄱ에서 $\frac{1}{2} < y_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y_2 = \log_2 x_2$이고 $\sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2}$,

$\log_2 \sqrt[3]{2} < \log_2 x_2 < \log_2 \sqrt{2}$이므로

$\frac{1}{3} < y_2 < \frac{1}{2}$

그러므로 $y_1 - y_2 < \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} < \frac{3\sqrt{2} - 2}{6}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

68) [정답] ⑤

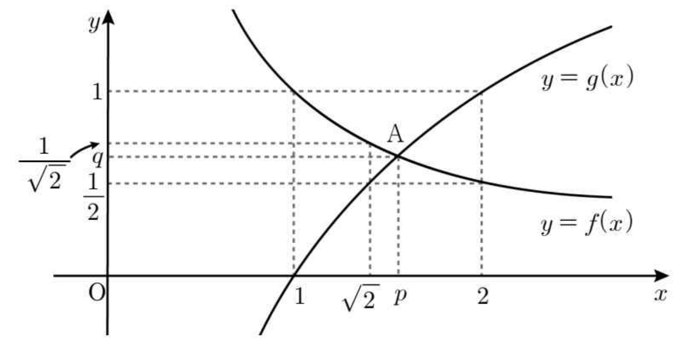
[해설]

$f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \log_a x$라 하자.

ㄱ. 점 $A(p, q)$는 함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$q = \frac{1}{p}$, 즉 $pq = 1$ (참)

ㄴ. $f(x) > g(x)$이면 $0 < x < p$이고 $f(x) < g(x)$이면 $x > p$이다.



$f(\sqrt{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}$이고 $a=2$이므로 $g(\sqrt{2})=\frac{1}{2}$이다.

$f(\sqrt{2})>g(\sqrt{2})$이다.

따라서 $p>\sqrt{2}$ (참)

ㄷ. 점 $B(p+q,\ 0)$에 대하여 삼각형 AOB의 넓이 $S(p)$는

$S(p)=\frac{1}{2}\times(p+q)\times q=\frac{pq}{2}+\frac{q^2}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2p^2}$

이다.

한편, $f(\sqrt{a})=\frac{1}{\sqrt{a}}$이고 $g(\sqrt{a})=\frac{1}{2}$이다.

$1<\sqrt{a}<2$이므로 $f(\sqrt{a})>g(\sqrt{a})$이다.

따라서 $p>\sqrt{a}$이고, $\frac{1}{p}<\frac{1}{\sqrt{a}}$이다.

그러므로 $S(p)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2p^2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2a}=\frac{a+1}{2a}$ (참)

69) [정답] ②

[해설]

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (0\le x<1) \\ -2x+5 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

$f(-x)=f(x)$, $f(x)=f(x+4)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고 주기는 4이다.

$1\le f(x)\le 3$이므로

$\log_{2^n}(x+2n)=1,\ x+2n=2^n,\ x=2^n-2n$

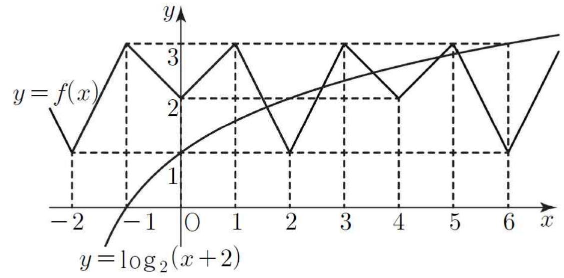
$\log_{2^n}(x+2n)=2,\ x+2n=2^{2n},\ x=2^{2n}-2n$

$\log_{2^n}(x+2n)=3,\ x+2n=2^{3n},\ x=2^{3n}-2n$

함수 $y=\log_{2^n}(x+2n)$의 그래프는 세 점 $(2^n-2n,\ 1)$, $(2^{2n}-2n,\ 2)$, $(2^{3n}-2n,\ 3)$을 지난다.

(ⅰ) $n=1$일 때, 함수 $y=\log_2(x+2)$의 그래프는 세 점 $(0,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(6,\ 3)$을 지난다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_2(x+2)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 5

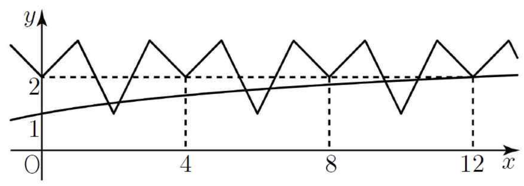


따라서 $a_1=5$

(ⅱ) $n=2$일 때, 함수 $y=\log_4(x+4)$의 그래프는 세 점 $(0,\ 1)$, $(12,\ 2)$, $(60,\ 3)$을 지난다.

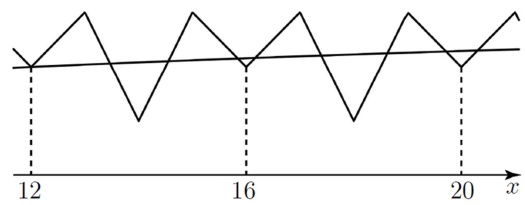
$1\le f(x)<2$일 때, $0\le x\le 4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수는 2이고 함수 $y=f(x)$는 주기가 4이므로 $0\le x<12$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_4(x+4)$의 그래프가 만나는 모든 점의 개수는

$$2\times\frac{12}{4}=6$$



$2\le f(x)\le 3$일 때, $12\le x\le 16$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_4(x+4)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 4이고 함수 $y=f(x)$는 주기가 4이므로 $12\le x\le 60$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_4(x+4)$의 그래프가 만나는 모든 점의 개수는

$$4\times\frac{60-12}{4}=48$$



따라서 $a_2=6+48=54$

(ⅲ) $n=3$일 때, 함수 $y=\log_8(x+6)$의 그래프는 세 점 $(2,\ 1)$, $(58,\ 2)$, $(506,\ 3)$을 지난다.

$1\le f(x)<2$일 때 $2\le x\le 6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_8(x+6)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 2이고 함수 $y=f(x)$는 주기가 4이므로 $2\le x<58$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_8(x+6)$의 그래프와 만나는 모든 점의 개수는

$$2\times\frac{58-2}{4}=28$$

$2\le f(x)\le 3$일 때, $58\le x\le 62$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_8(x+6)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 4이고 함수 $y=f(x)$는 주기가 4이므로 $58\le x\le 506$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수

$y=\log_8(x+6)$의 그래프가 만나는 모든 점의 개수는

$$4\times\frac{506-58}{4}=448$$

따라서 $a_3=28+448=476$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$$a_1+a_2+a_3=5+54+448=476$$

70) [정답] ③

[해설]

정수 k에 대하여 $k<\log_3 f(n)<k+2$

밑 3이 1보다 크므로 $3^k<(n-3)^2+2<3^{k+1}$을 만족시키는 자연수 n의 개수가 $h(k)$이다.

(ⅰ) $k=0$인 경우
$1<(n-3)^2+2<9$, $-1<(n-3)^2<7$에서
$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$이므로 $h(0)=5$

(ⅱ) $k=3$인 경우
$27<(n-3)^2+2<243$, $25<(n-3)^2<241$에서
$n=9,\ 10,\ \cdots,\ 18$이므로 $h(3)=10$

따라서 $h(0)+h(3)=15$

71) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $n=2$일 때, $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 1)$이므로

$f(2)=2$ (참)

ㄴ. 점 B의 좌표는 $\left(\dfrac{6}{1+\log_2 n},\ 1\right)$이므로 $f(n)\ge 1$을 만족시키는 $f(n)$은 $f(n)=\dfrac{6}{1+\log_2 n}-1$이다.

$\dfrac{6}{1+\log_2 n}-1\ge 1$에서 $1+\log_2 n\le 3$이므로

$1\le n\le 4$이다. 따라서 $f(n)\ge 1$을 만족시키는 자연수 n의 개수는 4 (참)

ㄷ. $|f(n)-1|\ge\dfrac{2}{3}$에서 $f(n)\ge\dfrac{3}{5}$ 또는 $0\le f(n)\le\dfrac{1}{3}$이다.

(ⅰ) $f(n)\ge\dfrac{5}{3}$를 만족시키는 $f(n)$은

$f(n)=\dfrac{6}{1+\log_2 n}-1$이다. $\dfrac{6}{1+\log_2 n}-1\ge\dfrac{5}{3}$에서

$\dfrac{6}{1+\log_2 n}\ge\dfrac{8}{3}$이므로 $\log_2 n\le\dfrac{5}{4}$이다. 따라서

$1\le n\le 2^{\frac{5}{4}}$이고 $2<2^{\frac{5}{4}}<3$이므로 자연수 n은 1, 2이다.

(ⅱ) $0\le f(n)\le\dfrac{1}{3}$을 만족시키는 $f(n)$은

$f(n)=\left|\dfrac{6}{1+\log_2 n}-1\right|$이다.

$0\le\left|\dfrac{6}{1+\log_2 n}-1\right|\le\dfrac{1}{3}$에서

$\dfrac{2}{3}\le\dfrac{6}{1+\log_2 n}\le\dfrac{4}{3}$이므로 $\dfrac{7}{2}\le\log_2 n\le 8$이다.

따라서 $2^{\frac{7}{2}}\le n\le 2^8$이고 $11<2^{\frac{7}{2}}<12$이므로 자연수 n은 12, 13, 14, $\cdots$, 256이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $n=1,\ 2,\ 12,\ 13,\ 14,\ \cdots,\ 256$이므로

$|f(n)-1|\ge\dfrac{2}{3}$를 만족시키는 자연수 n의 개수는 247

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

72) [정답] 33

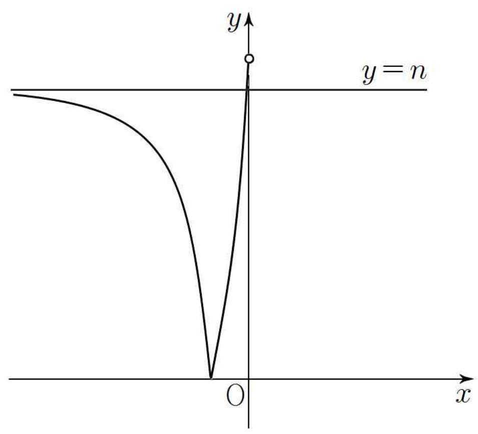
[해설]

(ⅰ) $x<0$일 때

함수 $y=3^{x+2}-n$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 $-n$만큼 평행이동한 그래프이다.

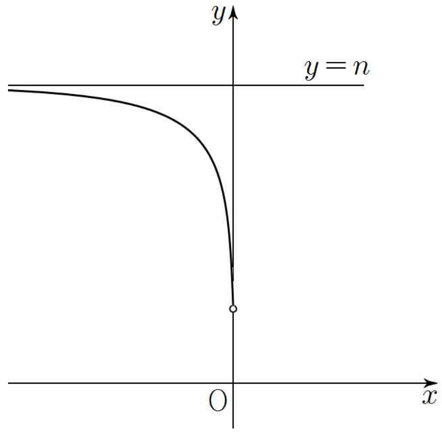
자연수 n의 값에 따른 함수 $y=\left|3^{x+2}-n\right|$의 그래프는 다음과 같다.

(1) $9-n>0$일 때



따라서 방정식 $f(x)=t$의 실근의 개수의 최댓값은 2이다.

(2) $9-n\le 0$일 때



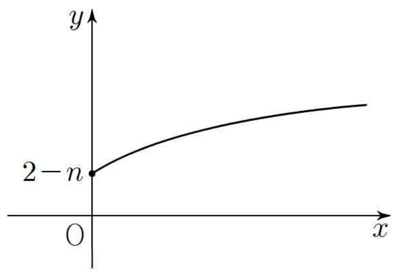
따라서 방정식 $f(x)=t$의 실근의 개수의 최댓값은 1이다.

(ii) $x \geq 0$일 때

함수 $y=\log_2(x+4)-n$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 $-n$만큼 평행 이동한 그래프이다.

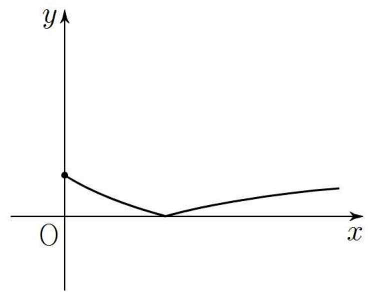
자연수 n의 값에 따른 함수 $y=|\log_2(x+4)-n|$의 그래프는 다음과 같다.

(1) $2-n \geq 0$일 때



따라서 방정식 $f(x)=t$의 실근의 개수의 최댓값은 1이다.

(2) $2-n<0$일 때



따라서 방정식 $f(x)=t$의 실근의 개수의 최댓값은 2이다.

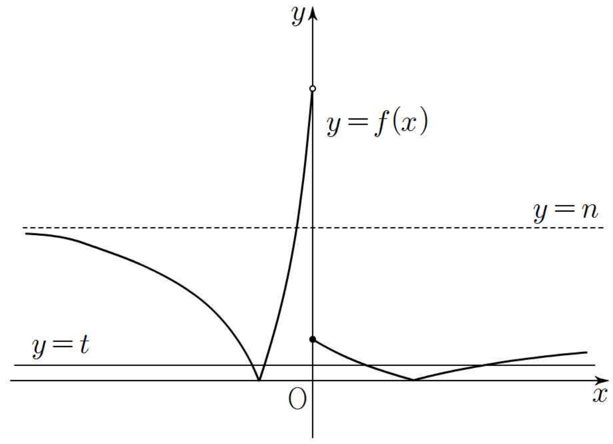
함수 $g(t)$의 최댓값이 4이므로 $9-n>0$이고 $2-n<0$이어야 한다.

즉, $2<n<9$이므로 자연수 n의 값은

$3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$

이고, 그 합은

$3+4+5+6+7+8=33$

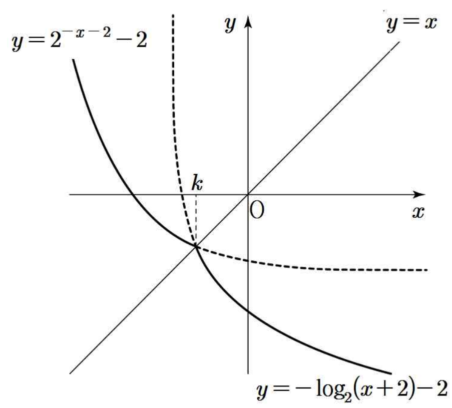


73) [정답] ①

[해설]

두 곡선 $y=-\log_2(x+2)-2$와 $y=2^{-x-2}-2$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

정의역과 공역이 각각 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$가 일대일대응이므로 상수 k의 값은 두 곡선의 교점의 x좌표이다.



곡선 $y=-\log_2(x+2)-2$와 x축의 교점의 x좌표가 $-\frac{7}{4}$이므로 $k>-\frac{7}{4}$이다.

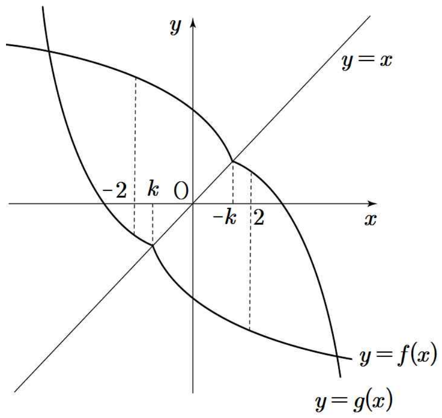
$k \geq -1$이라 가정하면 $k=-\log_2(k+2)-2$이므로

$$k=-\log_2(k+2)-2 \leq -\log_2\{(-1)+2\}-2=-2$$

가 되어 모순이므로 $k<-1$이다.

따라서 k의 값의 범위는 $-\frac{7}{4}<k<-1$이다.

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(ⅰ) $-2 \le x < k$일 때,

$f(x)=2^{-x-2}-2,\ g(x)=\log_2(2-x)+2$이고

$f(-2)=-1,\ g(-2)=4$이므로

$(-2,\ -1),\ (-2,\ 0),\ (-2,\ 1),\ (-2,\ 2),\ (-2,\ 3),$

$(-2,\ 4)$: 6개

(ⅱ) $k \le x < -k$일 때,

$f(x)=-\log_2(x+2)-2,\ g(x)=\log_2(2-x)+2$이고

① $f(-1)=-2,\ 3<g(-1)<4$이므로

$(-1,\ -2),\ (-1,\ -1),\ (-1,\ 0),\ (-1,\ 1),$

$(-1,\ 2),\ (-1,\ 3)$: 6개

② $f(0)=-3,\ g(0)=3$이므로

$(0,\ -3),\ (0,\ -2),\ (0,\ -1),\ (0,\ 0),\ (0,\ 1),$

$(0,\ 2),\ (0,\ 3)$: 7개

③ $-4<f(1)<-3,\ g(1)=2$이므로

$(1,\ -3),\ (1,\ -2),\ (1,\ -1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1),$

$(1,\ 2)$: 6개

(ⅲ) $-k \le x \le 2$일 때,

$f(x)=-\log_2(x+2)-2,\ g(x)=-2^{x-2}+2$이고

$f(2)=-4,\ g(2)=1$이므로

$(2,\ -4),\ (2,\ -3),\ (2,\ -2),\ (2,\ -1),$

$(2,\ 0),\ (2,\ 1)$: 6개

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $6+6+7+6+6=31$

따라서 $f(a) \le b \le g(a)$를 만족시키는 정수 $a,\ b$의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 31