지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00043463424

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

https://atom.ac/books/9395

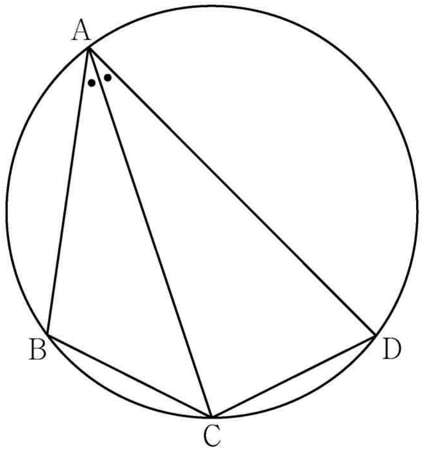
입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex
공통

1. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$$\overline{AB}=5,\ \overline{AC}=3\sqrt{5},\ \overline{AD}=7,\ \angle BAC=\angle CAD$$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는? 〔2023학년도 수능 11〕



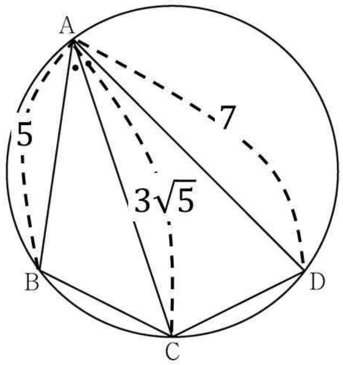
① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$　③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$

④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$　⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

1. 정답 ① 〔2023학년도 수능 11〕

1) 그림 있으면 그림 보면서,

조건을 표시하면



이렇게 되네요. 이때 원의 반지름 r을 구하랍니다.

일단 삼각형 ABC와 ACD가 있는데 변 AC를 공유하고 있죠? 거기에 $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$이구요. 이 두 삼각형의 관계에 초점을 맞추고 가야겠어요.

일단 두 삼각형 모두 같은 삼각형에 내접하고 있으니까 사인법칙을 생각할 수 있어요. $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\mathrm{BAC}}=2r$인데 $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\mathrm{CAD}}=2r$이므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\mathrm{BAC}}=\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\mathrm{CAD}}$입니다. 이때 $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$이니까 $\sin\mathrm{BAC}=\sin\mathrm{CAD}$이죠? 따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}$입니다.

그러면 두 삼각형에서 두 변의 길이와 한 각이 나온 셈이니까 코사인법칙을 사용하면 $\cos\mathrm{BAC}=\dfrac{5^2+(3\sqrt{5})^2-\overline{\mathrm{BC}}^2}{2\times5\times3\sqrt{5}}=\dfrac{70-\overline{\mathrm{BC}}^2}{30\sqrt{5}}$이고 $\cos\mathrm{CAD}=\dfrac{7^2+(3\sqrt{5})^2-\overline{\mathrm{CD}}^2}{2\times7\times3\sqrt{5}}=\dfrac{94-\overline{\mathrm{CD}}^2}{42\sqrt{5}}$입니다.

이때 $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$이니까 $\cos\mathrm{BAC}=\cos\mathrm{CAD}$이고, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}=k$라 하면 $\dfrac{70-k^2}{30\sqrt{5}}=\dfrac{94-k^2}{42\sqrt{5}}$이고 정리하면 $k^2=10$, $k=\sqrt{10}$입니다.

이때 $\cos\mathrm{BAC}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$이므로 $\cos^2+\sin^2=1$에 의하여 $\sin\mathrm{BAC}^2=1-\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{1}{5}$이고

$\sin \mathrm{BAC} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 입니다. 따라서 반지름의 길이는 $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin \mathrm{BAC}} = \dfrac{\frac{\sqrt{10}}{1}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 5\sqrt{2} = 2r$에서 $r = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ 입니다. 답은

①번이네요.

2. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$n-1 \le x < n$일 때, $\lvert f(x) \rvert = \lvert 6(x-n+1)(x-n) \rvert$이다. (단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0,\ 4)$에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt - \int_x^4 f(t)dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx$의 값은?

〔2023학년도 수능 12〕

① $-\frac{3}{2}$　② $-\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{5}{2}$

2. 정답 ② 〔2023학년도 수능 12〕

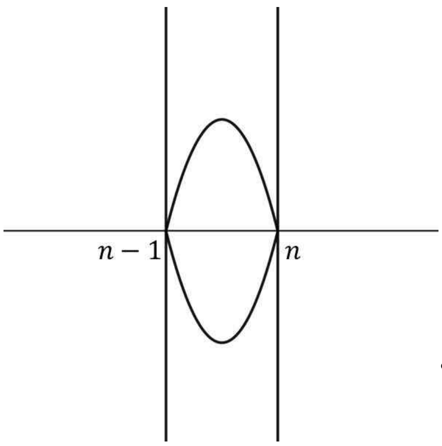
1) 정적분의 위끝과 아래끝에 변수가 있는 경우, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속인데 $n-1 \leq x < n$에서 $|f(x)|=|6(x-n+1)(x-n)|$이라고 합니다.

모든 자연수 n에 대하여 그렇다고 해석할게요. 그러면 $f(x)=6(x-n+1)(x-n)$ 이거나

$f(x)=-6(x-n+1)(x-n)$이죠?

거기에 $n-1 \leq x < n$에서인데 x축과 만나는 점도 $x=n-1$, $x=n$입니다. 이차함수의 모양이니까



에서 위쪽을 택하거나 아래쪽을 택해야 합니다. 도중에 바꾸는 건 안 되겠죠? $f(x)$는 연속이니까요. $n-1 \leq x < n$의 범위 안에서는 계속 $f(x)=6(x-n+1)(x-n)$ 이거나 계속 $f(x)=-6(x-n+1)(x-n)$이어야 합니다.

이때 $0 < x < 4$에서 $g(x)=\int_0^x f(t)dt-\int_x^4 f(t)dt$인데 $x=2$에서 최솟값 0을 가진답니다.

일단 $g(2)=0$인 거니까 $\int_0^2 f(t)dt=\int_2^4 f(t)dt$입니다. 0부터 2까지의 정적분 값이랑 2부터 4까지의 정적분 값이 같아야 한다는 거죠.

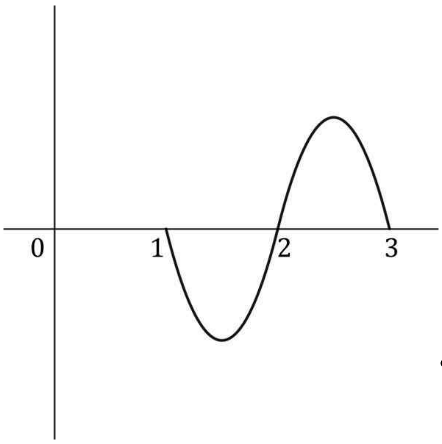
그리고 정적분의 위끝과 아래끝에 모두 변수가 있네요? $-\int_x^4 f(t)dt=\int_4^x f(t)dt$이죠? 따라서

$g(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_4^x f(t)dt$를 미분하면 $g'(x)=2f(x)$가 됩니다.

여기서 $x=2$에서 "최솟값"을 갖는다는 의미에 대해서 생각해볼게요. $x=a$에서 최소가 되려면 도함수는 어떻게 되어야 할까요? 다항함수에서 최소가 된다는 건 결국 감소하다가 증가하게 되는 그 지점을 말하는 거잖아요?

그러면 도함수는 x축 아래에 있다가 x축 위로 올라오게 되는 그 지점이겠네요.

그런데 도함수는 $g'(x)=2f(x)$입니다. $x=2$에서 왼쪽에서는 x축 아래에 있다가 오른쪽에서는 x축 위로 올라오게 하려면 $g'(x)=2f(x)$의 그래프는 결국

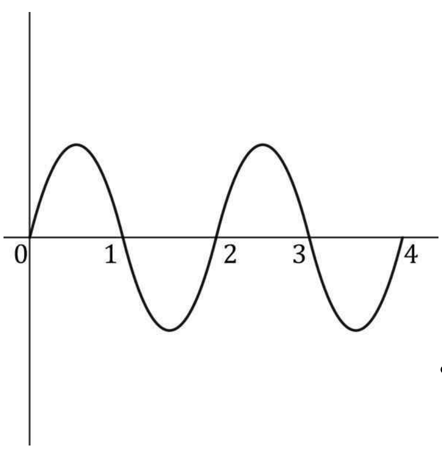


이렇게 되어야 하죠. 따라서 $1 \le x < 2$에서 $f(x)=6(x-1)(x-2)$이고

$2 \le x < 3$에서 $f(x)=-6(x-2)(x-3)$입니다.

이때 $\int_0^2 f(t)dt=\int_2^4 f(t)dt$이잖아요? 만약에 $0 \le x < 1$에서 $f(x)=6x(x-1)$이라면?

$\int_0^2 f(t)dt=\int_2^4 f(t)dt$가 불가능합니다. 왜냐하면 $\int_0^2 f(t)dt=-2$인데 이미 $\int_2^3 f(t)dt=1$이기 때문에 아무리 작아도 0이 되거든요. 따라서



이렇게 되어야겠네요.

2) 이차함수와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이, 정적분 관찰

이제 $\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx$를 구해야 합니다. 구간 별 함수는 사실상 평행이동과 대칭이동 관계이니까 x축과 둘러싸인

부분의 넓이는 모두 같습니다. 따라서 $\int_1^3 f(t)dt=0$입니다. $\int_3^4 f(t)dt$는 x축과 둘러싸인 부분의 넓이를 부호만 반대로 한 값이에요. 따라서 이차함수와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 공식에 의하여 $\frac{6}{6}(4-3)^3=1$입니다. 부호를 반대로 하면 -1이네요.

마지막으로 $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt$는 0부터 1에서 $f(x)$가 $x=\frac{1}{2}$ 대칭이므로 절반만 딱 떼어내면 되니까 $\frac{1}{2}$입니다.

따라서 구하는 값은 $\frac{1}{2}+0-1=-\frac{1}{2}$입니다. 답은 ②번이네요.

3. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\begin{cases} x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ f(x) & (-1 \le x \le 1) \end{cases}$$

함수 $h(x)=\lim_{t\to 0+} g(x+t)\times \lim_{t\to 2+} g(x+t)$에 대하여

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〔2023학년도 수능 14〕

<보 기>

ㄱ. $h(1)=3$

ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

3. 정답 ① 〔2023학년도 수능 14〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$f(x)$는 다항함수인데 $g(x)=\begin{cases} x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ f(x) & (-1 \le x \le 1) \end{cases}$ 라고 합니다. 개형은 대충 그려지네요.

이때 $h(x)=\lim_{t \to 0+} g(x+t) \times \lim_{t \to 2+} g(x+t)$이랍니다. 표현을 살짝 바꾸면 $h(x)=g(x+)\times g(x+2+)$이죠?

$g(x+)$는 $g(x)$보다 x값이 큰 부분에서의 함숫값이고, $g(x+2+)$는 $g(x+2)$보다 x값이 큰 부분에서의 함숫값입니다.

ㄱ에서 $h(1)=3$이냐고 묻네요. $h(1)=g(1+)\times g(3+)$이죠? 일단 $g(1+)$의 경우 $x>1$에서 $g(x)=x$이므로 $g(1+)=1$입니다. $g(3+)$의 경우도 마찬가지니까 $g(3+)=3$입니다. 따라서 $h(1)=1\times 3=3$ 맞네요.

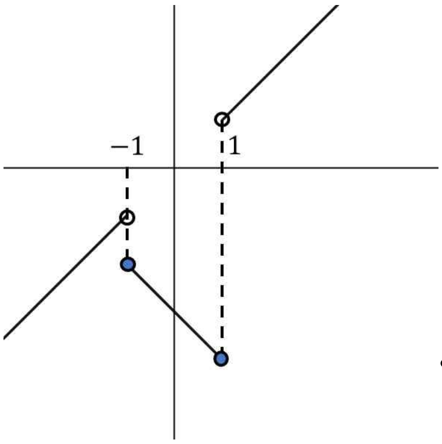
ㄴ에서 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이냐고 묻네요. 일단 $h(x)=g(x+)\times g(x+2+)$에서 $g(x)$는 다항함수의 조합으로 이루어져 있어요. 다시 말하면 함수가 바뀌는 지점이 아니면 무조건 연속이라는 거죠. 일단

$g(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 함수가 바뀌죠? 따라서 이 지점에서만 확인하면 됩니다. 그런데 $h(x)=g(x+)\times g(x+2+)$이므로 우리가 확인해야 할 부분은 $x=-3$, $x=-1$, $x=1$입니다.

$x=-3$의 경우 좌극한값은 $-3\times-1=3$인데 함숫값과 우극한값은 $-3\times f(-1)$입니다. 음..?
$x=-1$의 경우 좌극한값은 $f(-1)\times f(1)$이고 함숫값과 우극한값은 $f(-1)\times 1=f(-1)$입니다.
$x=1$의 경우 좌극한값은 $f(1)\times 3=3f(1)$이고 함숫값과 우극한값은 $1\times 3=3$입니다.
이게 연속이 되려면 $f(-1)=-1$이고 $f(1)=1$이어야 하는데 그렇다는 보장이 없죠? ㄴ은 맞지 않습니다.

ㄷ에서 $g(x)$가 $[-1, 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$이면 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖냐고 물어보네요. 일단 $-1\le x\le 1$에서 $g(x)=f(x)$이잖아요? 그러니까 사실상 $-1\le x\le 1$에서 $g(x)=f(x)$가 감소하는 거네요.

그리고 $g(-1)=f(-1)=-2$입니다. 이걸 그래프로 대충 표현하면



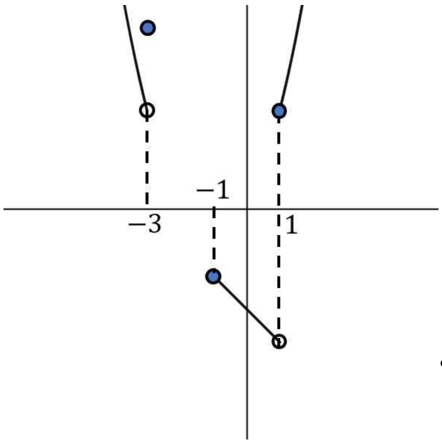
이렇게 되는 거죠?($-1<x<1$에서 $g(x)=f(x)$는 일차함수가 아닐 수 있습니다! 그냥 아무렇게나 그린 거에요!)

이때 $h(-3-)=h(1)=3$이고, $x<-3$보다 작을 때는 $h(x)=x(x+2)$이니까 함수가 꾸준히 감소하므로 $x=-3$일 때가 최소이고, $x>1$일 때는 $h(x)=x(x+2)$이니까 함수가 꾸준히 증가하므로 $x=1$일 때가 최소입니다. 그러니까 우리의 관건은 $-3\le x\le 1$의 범위에서 $h(-3-)=h(1)=3$보다 작아지는 부분이 나오는가네요.

먼저 $-3\le x<-1$일 때 $h(x)=xf(x+2)$입니다. $h(-3)=6$인데 $h(x)=xf(x+2)$에서 $(-)$인 $f(x+2)$에 $(-)$인 x가 곱해진 형태니까 곱하면 무조건 양수가 됩니다.

$-1\le x<1$일 때는 $h(x)=(x+2)f(x)$이구요. $h(-1)=f(-1)=g(-1)=-2$입니다. 이때 $(-)$인 $f(x)$와 $(+)$인 $x+2$가 곱해진 형태니까 무조건 음수이고, $h(x)=(x+2)f(x)$를 미분하면 $h'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$인데 음수인 $f(x)$와 음수인 $(x+2)f'(x)$를 더했으니까 음수입니다. 따라서 감소합니다.

결국 최소가 되는 부분은 $-1\le x<1$에 있겠네요. 여기 빼고는 전부 양수니까요. 이때 $-1\le x<1$에서 계속 감소하니까 $x=1$ 부근을 확인해보면 됩니다. 문제는 $-1\le x<1$에서 $h(x)=(x+2)f(x)$의 범위에 $x=1$이 포함되어 있지 않다는 거에요. 그러니까 $h(x)=(x+2)f(x)$는 $x=1$에서 좌극한값만 존재하고 함수값이 정의되지 않습니다.



이런 느낌이 되는 거죠. $-1 \leq x < 1$의 범위에서 $x=1$에서 좌극한값만 존재하고 텅 비어 있죠? 따라서 최솟값은 존재하지 않습니다. ㄷ은 옳지 않네요. 따라서 옳은 것은 ㄱ이고 답은 ①번입니다.

4. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? 〔2023학년도 수능 15〕

(가) $a_7 = 40$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1}\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \dfrac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

① 216 ② 218 ③ 220 ④ 222 ⑤ 224

4. 정답 ⑤ 〔2023학년도 수능 15〕

1) 조건해석, 자연수 보이면 숫자 넣기

모든 항이 자연수이고 조건을 만족시키는 a_9의 최댓값과 최솟값의 합을 구하랍니다.

(가)조건에서 $a_7=40$이고 (나)조건에서 $a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$ 이라네요.

일단 핵심은 3의 배수인지 아닌지의 여부에요. 천천히 숫자 넣어봅시다. 우리가 아는 건 a_7이고 구해야 하는 건 a_9에요. 앞으로 나가면 된다는 거죠.

$n=6$을 넣으면 $a_8=\begin{cases} a_7+a_6 & (a_7\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_7 & (a_7\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$ 입니다. 그런데 $a_7=40$이니까 3의 배수가 아니잖아요? 따라서 $a_8=a_6+40$입니다. a_8을 알기 위해서는 a_6을 알아야 해요. $n=5$를 넣어보죠.

$40=a_7=\begin{cases} a_6+a_5 & (a_6\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_6 & (a_6\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$ 입니다. 여기서 경우가 나뉘네요.

2) 케이스 분류

2-1) a_6이 3의 배수일 때

만약 a_6이 3의 배수라면? $40=\frac{1}{3}a_6$이고 $a_6=120$입니다. 그러면 $a_8=160$이고 3의 배수가 아니게 되니까 $a_9=a_8+a_7=200$이 되네요. 일단 하나 구했어요.

2-2) a_6이 3의 배수가 아닐 때

a_6이 3의 배수가 아니라면? $a_7=40=a_6+a_5$입니다. 이러면 $a_8=a_6+40$와 연립해서 $a_8=80-a_5$가 되네요.

또다시 a_5를 확인해야겠어요. $a_6=\begin{cases} a_5+a_4 & (a_5\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_5 & (a_5\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$ 입니다.

2-2-1) a_5가 3의 배수일 때

a_5가 3의 배수라면 $a_6 = \frac{1}{3}a_5$이죠. $a_5 = 3a_6$인 건데 $40 = a_6 + a_5$이니까 $a_6 = 10$, $a_5 = 30$이고 $a_8 = 50$이고, 3의 배수가 아니니까 $a_9 = a_8 + a_7 = 90$입니다.

2-2-2) a_5가 3의 배수가 아닐 때

a_5가 3의 배수가 아니라면? $a_6 = a_5 + a_4$이고 $40 = a_6 + a_5$이니까 $40 = 2a_5 + a_4$이고, $a_8 = 80 - a_5$이므로 $-20 + \frac{1}{2}a_4 = -a_5$이고 $a_8 = 60 + \frac{1}{2}a_4$입니다.

2-2-2-1) a_4가 3의 배수일 때

$a_5 = \frac{1}{3}a_4$이고 $3a_5 = a_4$인데 $a_6 = 4a_5$이고 $40 = 5a_5$이므로 $a_5 = 8$입니다. $a_4 = 24$이고

$a_8 = 60 + \frac{1}{2}a_4 = 72$이네요. a_8이 3의 배수이므로 $a_9 = \frac{1}{3}a_8 = 24$입니다.

2-2-2-2) a_4가 3의 배수가 아닐 때

$a_5 = a_4 + a_3$입니다. 여기서 주목해야 하는 부분이 있어요. 바로 $a_7(=40)$, a_6, a_5, a_4가 연속으로 3의 배수가 아니라는 점이죠. 3의 배수가 아니라면 가능성은 두 개입니다. 먼저 $3k+1$의 형태로 표현되든가, $3k+2$의 형태로 표현되는가 하는 거죠.

여기서 만약 $a_6 = 3k+1$의 형태라면, $40 = a_6 + a_5$에 의해 $a_5 = 39 - 3k = 3(13-k)$로 a_5가 3의 배수가 되어버립니다. 따라서 불가능하죠. 따라서 $a_6 = 3k+2$입니다.

그러면 $a_5 = 38 - 3k$이고 $a_6 = a_5 + a_4$이므로 $a_4 = 6k - 36 = 3(2k-12)$로 a_4가 3의 배수가 되어버립니다. 모순이 발생하는 거죠. 따라서 이 경우는 애초부터 불가능합니다.

구하는 a_9의 최댓값은 200, 최솟값은 24이므로 합은 224입니다. 답은 ⑤번이네요.

5. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \left|3^{x+2}-n\right| & (x<0) \\ \left|\log_2(x+4)-n\right| & (x\geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.
〔2023학년도 수능 21〕

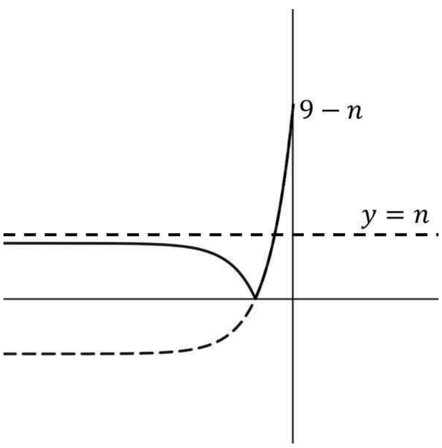
5. 정답 33 〔2023학년도 수능 21〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 자연수 보이면 숫자 넣기, 절댓값 함수

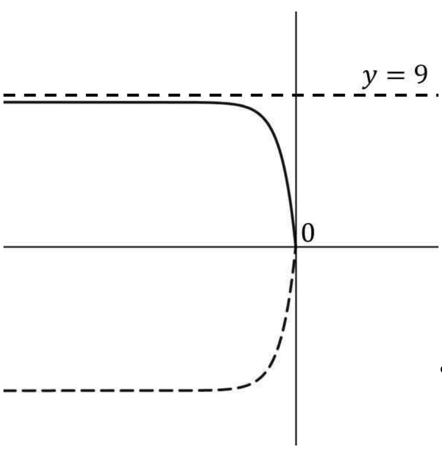
n이 자연수인데 $f(x)=\begin{cases} \left|3^{x+2}-n\right| & (x<0) \\ \left|\log_2(x+4)-n\right| & (x \geq 0) \end{cases}$ 가 있답니다. 이때 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 $g(t)$인데 $g(t)$의 최댓값이 4가 되게 하는 n을 구하랍니다.

이건 결국 $y=f(x)$과 $y=t$가 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값이 4가 되게 하는 n의 값을 구하라는 거죠? 일단 $y=f(x)$의 그래프부터 알아야겠어요.

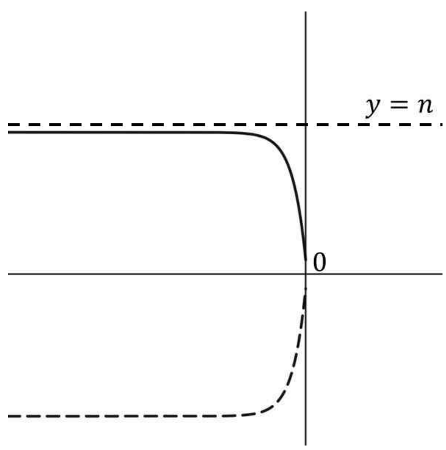
일단 $x<0$ 부분에서는 $f(x)=\left|3^{x+2}-n\right|$입니다. 일단 점근선이 $y=0$이고 $(0,\ 9)$를 지나는 3^{x+2}를 n만큼 아래로 내린 함수를 절댓값을 씌워 접어 올린 함수입니다. 그러니까 점근선은 $y=n$이 되겠네요.



그런데 한 가지 문제가 있어요. 만약에 $n=9$이 되어 원점을 지난다면?

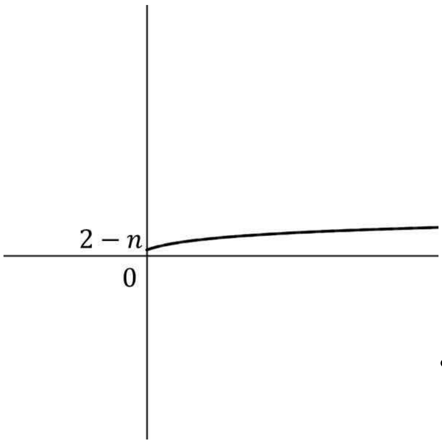


이렇게 되고 $n>9$면



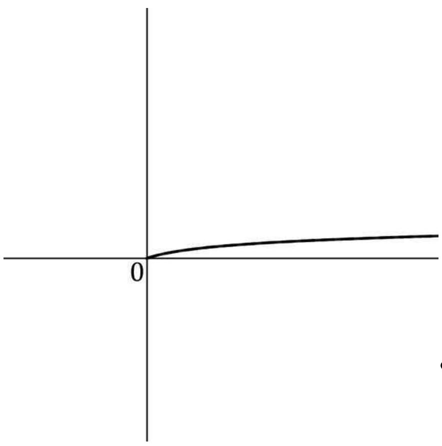
이렇게 됩니다. 일단 이거 하나 조심해야겠어요.

이제 $x \geq 0$ 부분도 확인해봅시다. $f(x) = \left|\log_2(x+4) - n\right|$인데 이건 점근선이 $x = -4$이고 $(-3,\ 0)$, $(0,\ 2)$을 지나는 $\log_2(x+4)$를 n만큼 아래로 내리고 절댓값으로 접어 올린 함수입니다. 그래프로 보면

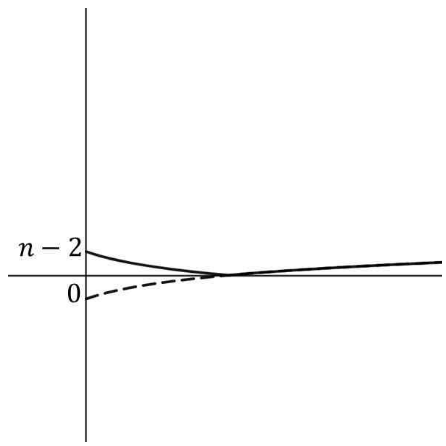


이렇게 되는 거죠.

그런데 이것도 마찬가지로 원점을 지나게 되는 $n = 2$가 되면



이렇게 되고 $n > 2$이면



이렇게 됩니다.

아까 $y = t$와 만나는 점의 개수의 최댓값이 4가 되어야 한다고 했었죠? 지금 $x = 0$을 기준으로 왼쪽과 오른쪽의 함수는 각각 최대 2개까지 만날 수 있어요. 바로 함수가 접혀 올라갈 때이죠. 왼쪽은 $n < 9$일 때, 오른쪽은 $n > 2$일 때 가능합니다. 이 두 조건이 겹칠 때 $2 + 2 = 4$가 되겠네요. 따라서 n은 $2 < n < 9$이어야 하고 모든 n의 합은 $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$입니다.

6. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. 〔2023학년도 수능 22〕

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.
(나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.
(다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

6. 정답 13 〔2023학년도 수능 22〕

1) 조건해석

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $g(x)$는 연속함수이라고 하네요. $f(4)$의 값을 구하랍니다.

(가)조건에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$라고 합니다. 일단 식 해석이 필요할 것 같네요.

먼저 $x=1$이 반복적으로 제시되고 있죠? $f(1)$도 있고, $(x-1)$도 있어요. $x=1$이 핵심이라는 말이에요. 또한 $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$는 항등식이에요. 양변에 같은 걸 더하고 빼도, 곱하고 나눠도 같다는 말이죠. 미분해도 같지만, 합성함수는 함부로 미분하지 않는 게 좋아요.

가장 익숙한 형태로 바꿔야 합니다. $x=1$이 반복적으로 있으니까 $x=1$과 관련한 애들끼리 모아볼까요? $f(1)$을 왼쪽으로 보내고 양변을 $(x-1)$로 나누면 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(g(x))\,(x\neq 1)$이 됩니다.

일단 해석부터 해볼게요. 왼쪽의 식은 점 $(1,\ f(1))$과 점 $(x,\ f(x))$의 평균변화율(기울기)이죠? 오른쪽의 식은 $x=g(x)$에서의 접선의 기울기이구요. 이 둘이 모두 같다고 합니다. 일단 좀 더 조건을 봐야겠어요.

그리고 $f'(x)$와 $g(x)$ 모두 연속이죠? $x\neq 1$이니까 $x=1$에서의 극한값을 구해보고 싶지 않나요? 가보죠. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=f'(g(1))$입니다. $g(1)=1$일수도 있지만? 문제는 $f'(x)$는 이차함수라서 대칭축에 반대부분에 또다른 값이 있을 수 있어요.

예를 들어 $g(x)=(x-1)(x-2)$와 $y=2$가 만난다고 할 때 $g(0)=2$이지만 $g(3)=2$이잖아요? $g(x)=2$를 만족시키는 x값이 두 개일 수 있는 거죠. 마찬가지로 $f'(1)=k$라 할 때 $f'(x)=k$를 만족시키는 건 $x=1$도 있을 수 있지만 대칭축 반대부분에 있는 값(가령 $x=m$)도 가능할 수 있습니다.

(나)조건에서 $g(x)$의 최솟값이 $\dfrac{5}{2}$라고 합니다. $g(1)=1$는 절대로 안 되네요. 그러면 $g(1)$은 1과 대칭축에 대하여 서로 대칭되는 부분에 있는 값입니다. 대칭축을 $x=a$라 하면 $g(1)=2a-1\geq\dfrac{5}{2}$이고 $a\geq\dfrac{7}{4}$이네요.

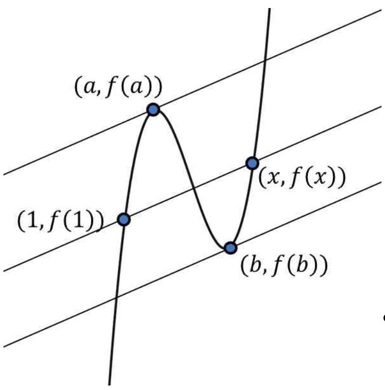
(다)조건에서 $f(0)=-3,\ f(g(1))=6$이라고 하네요. 여기서 생각해볼게요. 먼저 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)$를 만족시키는 c가 $1<c<x$ 혹은 $x<c<1$에 있어야 합니다.($x>1$일 수도 있고 $x<1$일 수도 있으니까요.)

그런데 문제는 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)=f'(g(x))$이라는 거죠. 아까 전과 마찬가지로 $g(x)=c$일 수도 있지만 반대편에 있는 $g(x)=2a-c$일 수도 있습니다. 그래프를 그려서 이해해볼까요?

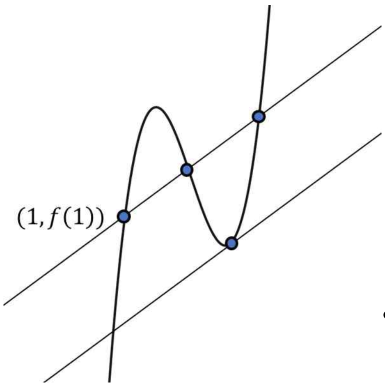
2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

일단 무조건 $x=1$이 대칭축의 x좌표인 $x=a$(변곡점의 x좌표이기도 하죠)보다 왼쪽에 있어야 합니다. 그 이유는 (나)조건 보면서 확인했었죠? 개형은 지렁이 모양으로 잡아볼게요.

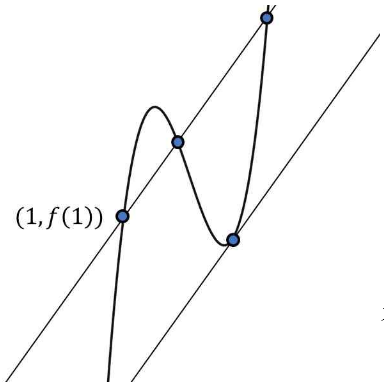


이렇게 $(1,\ f(1))$과 $(x,\ f(x))$를 잡아보면 만족시키는 x값이 두 개가 나옵니다. 그런데 $(a,\ f(a))$는 불가능해요. 왜냐하면 우리는 무조건 변곡점의 x좌표보다 큰 부분에 있는 x값을 설정해야 하거든요. 아까 $x=1$에서의 극한값을 구할 때 대칭축 반대편에 있는 $2a-1$를 $g(x)$로 설정했잖아요? 이때 $g(x)$는 연속이므로 값이 갑자기 확 변해서는 안 됩니다. 다시 말하면 대칭축 반대편에 있는 특성이 계속 유지되어야 한다는 거죠. 여기서 $(a,\ f(a))$도 가능하게 되면 $g(x)$의 값이 두 개가 되어서 불연속이 되기도 하구요.

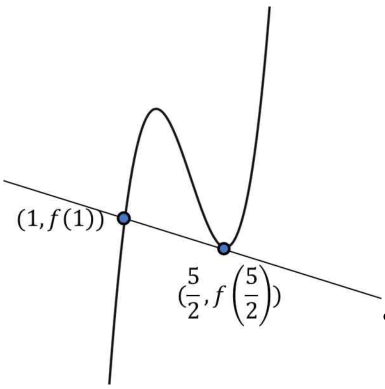
그러니까 위에서 말한 것처럼 $g(x)$는 1과 x 사이에 있는 c가 아니라 대칭축 반대편에 있는 $2a-c$가 되어야 합니다. 이제 점 $(x,\ f(x))$을 막 조정해보세요. 언제가 최소일까요?



이렇게도 해보고,



저렇게도 해보면 결국



이렇게 될 때가 최소가 됩니다. 결국 $x=\frac{5}{2}$에서의 접선은 $x=1$에서 만나야 하는 거죠.

이때 삼차함수의 비율관계에 의하여 변곡점의 x좌표는 $x=1$과 $x=\frac{5}{2}$의 $2:1$내분점이므로 $x=2$입니다.

$a=2$이네요. 그러면 $g(1)=3$이고 $f(3)=6$입니다.

일단 $x=\frac{5}{2}$에서의 접선은 $y=f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)$이죠? 따라서 차함수에 의하여

$f(x)-f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)-f\left(\frac{5}{2}\right)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$이고 $f(x)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)$입니다.

이때 $f(0)=-3$이니까 $f(0)=-\frac{25}{4}-\frac{5}{2}f'\left(\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)=-3$이고 $f(3)=6$이니까

$f(3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f'\left(\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)=6$입니다. 둘을 연립하면 $f'\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{4}$이고 $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{41}{8}$입니다. 정리하면

$f(x)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(x-\frac{5}{2}\right)+\frac{41}{8}$이고 $f(4)=13$입니다.