함수 $y=x$ 에 대해 $\frac{dy}{dx} = \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h}}_{\text{도함수의 정의 } f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ 에 따라}} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$ 이므로 함수 $y=x$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능함을 알 수 있다.

수열 $\{a_n\}$ 에 대해, n차 다항함수 $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ 를 생각해보자. (단, a_0는 상수)

도함수의 정의에 따라 $f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot(x+h)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n}\left[a_k\cdot[(x+h)-x]\sum_{i=0}^{k-1}(x+h)^i\cdot x^{k-i-1}\right]}{h} \qquad \left(\because\ a^n - b^n = (a-b)\cdot\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}\cdot b^k\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cdot\sum_{i=0}^{k-1}(x+h)^i\cdot x^{k-i-1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[a_k\cdot\lim_{h\to 0}\left(\sum_{i=0}^{k-1}(x+h)^i\cdot x^{k-i-1}\right)\right] \qquad \left(\because\ \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a}f(x) + \lim_{x\to a}g(x) \quad (\text{단, } \lim_{x\to a}f(x)\text{가 존재하고 } \lim_{x\to a}g(x)\text{가 존재할 때})\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k\cdot\sum_{i=0}^{k-1} x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k\cdot k\cdot x^{k-1}$$ 로서

실수 전체의 집합에서 $f(x)$가 정의되므로 함수 $f(x)$가 미분 가능함을 알 수 있다.

⊕ 도함수의 연속성

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & (x\neq 0) \quad \text{by 곱함수 미분법} \\ 0 & (x=0) \quad \text{by } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f(0) \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ 가 발산하므로 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 존재 X

∴ 함수 $f(x)$는 $x=0$ 에서 미분 가능하지만 함수 $f(x)$는 $x=0$ 에서 불연속