#1

삼차함수 $f(x)$.

$y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선의 방정식

함수 $h(x)=|f(x)|+g(x)$

(가)	곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(k,0)$ $(k\neq 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=0$
(나)	방정식 $h(x)=0$ 의 실근 중에서 가장 큰 값은 12

$h(3)=-\frac{9}{2}$ 일 때, $k\times\left|h(6)-h(11)\right|=?$ (단, k는 상수)

#1

삼차함수 $f(x)$.　　$f(0)=0$

$y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선의 방정식　　$g(x)=f'(0)(x-0)+f(0)$ $=f'(0)\cdot x$

9 case 분류

함수 $h(x)=|f(x)|+g(x) = \begin{cases} f(x)+g(x) & (f(x)\ge 0) \\ -f(x)+g(x) & (f(x)<0) \end{cases}$

(가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(k,0)$ $(k\neq 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=0$
(나) 방정식 $h(x)=0$의 실근 중에서 가장 큰 값은 12

$h(3)=-\frac{9}{2}$일 때, $k\times\{h(6)-h(11)\}=?$　　(단, k는 상수)

차를 물어봤으니 모든 계수가 결정되지 않아도 답을 구할수 있을 가능성 의식

(가) $y=h(x)$가 $x\neq 0$일 때 x축에 접하는구나

(나) $f(x)+g(x)=(x-12)Q(x)$ or $-f(x)+g(x)=(x-12)Q(x)$　　동치는 아니지만 인수 결정에서 얻어낼 수 있기에 뺐습니다

$\begin{cases} f(0)=0 \\ g(x)=f'(0)x \end{cases}$ → $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, $g(x)=cx$

$\begin{cases} f(x)+g(x)=ax^3+bx^2+2cx \\ -f(x)+g(x)=-ax^3-bx^2 \end{cases}$ 라고 적어둘 수 있겠죠!

⊕ 매클로린 급수
$f(x)=\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f(0)}{0!}$ 이기에
$y=ax^3+bx^2+cx+d$의 $(0,d)$에서의 접선의 방정식은 $y=cx+d$
추가적인 설명은 다음 페이지에

(가)를 생각해볼 때 $f(x)<0$일 때는 k가 안되겠죠.

$-f(x)+g(x)=-ax^2\left(x+\frac{b}{a}\right)$인데 $x=-\frac{b}{a}$에서 접할수 없으니까요.

그럼 $f(x)\ge 0$일 때일테니 $\boxed{f(x)+g(x)=ax(x-p)^2}$임을 알 수 있습니다.　$(p=k)$

(나)를 활용해 $p=12$라고 가정.

$f(x)=ax(x^2-24x+72)$,

$h(x)=\begin{cases} ax(x-12)^2 & (f(x)\ge 0) \\ -ax^2(x-24) & (f(x)<0) \end{cases}$.

i) $f(3)\ge 0$

$h(3)=3a\cdot 81=-\frac{9}{2}$,　$a=-\frac{1}{54}$. $f(3)<0$이라 모순.

ii) $f(3)<0$

$h(3)=-9a\cdot(-21)=-\frac{9}{2}$,　$\boxed{a=-\frac{1}{42}}$

$f(x)=-\frac{x}{42}(x^2-24x+72)$,

$h(x)=\begin{cases} -\frac{x}{42}(x-12)^2 & (f(x)\ge 0) \\ \frac{x^2}{42}(x-24) & (f(x)<0) \end{cases}$.

$f(24)<0$이므로 $h(24)=0$이 성립해 (나)에 모순.　$p\neq 12 \longrightarrow \boxed{p<12}$

$h(x)=\begin{cases} ax(x-p)^2 & (p<12,\ f(x)\ge 0) \\ -ax^2(x-q) & (f(x)<0) \end{cases}$　끝에서 $\boxed{q=12}$일 수밖에.

$f(3)<0$이라 가정할 때　$-\frac{9}{2}=-9a\cdot(-9)$,　$a=-\frac{1}{18}$.

$h(x)=\begin{cases} -\frac{1}{18}x(x-p)^2 & (f(x)\ge 0,\ p<12) \\ \frac{1}{18}x^2(x-12) & (f(x)<0) \end{cases}$ 에서　$g(x)=\dfrac{-\frac{1}{18}x(x-p)^2+\frac{1}{18}x^2(x-12)}{2}=-\frac{x}{36}\{2(-p+6)x+p^2\}$

이때 $g(x) = f'(0)\cdot x$ 꼴이므로 $\boxed{p=6}$

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{18}x(x-6)^2 & (f(x) \geq 0) \\ \frac{1}{18}x^2(x-12) & (f(x) < 0) \end{cases}$$

$f(x) = \dfrac{-\frac{1}{18}x(x-6)^2 - \frac{1}{18}x^2(x-12)}{2}$ 에서 $f(3) > 0$ 이므로 가정했던 $f(3) < 0$ 에 모순.

$f(3) \geq 0$ 이므로, $g(x) = \dfrac{ax(x-p)^2 - ax^2(x-12)}{2} = \dfrac{a}{2}x\{2(-p+6)x + p^2\}$ 에서 $\boxed{p=6}$

$h(3) = -\frac{9}{2}$ 에서 $a = -\frac{1}{6}$.

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6}x(x-6)^2 & (f(x) > 0) \\ \frac{1}{6}x^2(x-12) & (f(x) \leq 0) \end{cases}$$

$f(x) = \dfrac{-\frac{1}{6}x(x-6)^2 - \frac{1}{6}x^2(x-12)}{2}$ 에서 $f(3) > 0$ 이므로 가정했던 $f(3) \geq 0$ 에 성립.

$f(6) > 0$, $f(11) < 0$ 이므로 $h(6) = 0$, $h(11) = -\frac{121}{6}$

$$6 \times \left| 0 - \left(-\frac{121}{6}\right) \right| = 121$$

$\therefore 121$

〈 평균값 정리 〉

$[a,b]$ $f(x)$ 연속

(a,b) $f(x)$ 미분가능

$\Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ 만족 $c \in (a,b)$ 존재

$\Leftrightarrow f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$

〈 테일러 정리 〉

$[a,b]$ $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ 연속

(a,b) $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ 미분가능

$\Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(b-a) + \dfrac{f'''(a)}{3!}(b-a)^2 + \cdots + \dfrac{\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\Big|_{x=a}}{(n-1)!}(b-a)^{n-2} + \dfrac{\frac{d^n f}{dx^n}\Big|_{x=a}}{n!}(b-a)^{n-1} + \dfrac{\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}\Big|_{x=c}}{(n+1)!}(b-a)^n$ 만족 $c \in (a,b)$ 존재

$\Leftrightarrow f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2 \dfrac{f''(a)}{2!} + \cdots + (b-a)^n \cdot \dfrac{\frac{d^n f}{dx^n}\Big|_{x=a}}{n!} + (b-a)^{n+1} \cdot \dfrac{\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}\Big|_{x=c}}{(n+1)!}$

〈 테일러 급수 〉

$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2 \cdot \dfrac{f''(a)}{2!} + \cdots + (x-a)^n \cdot \dfrac{\frac{d^n f}{dx^n}\Big|_{x=a}}{n!} + (x-a)^{n+1} \cdot \dfrac{\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}\Big|_{x=c}}{(n+1)!}$ 에서 $\lim_{n\to\infty} (x-a)^{n+1} \cdot \dfrac{\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}\Big|_{x=c}}{(n+1)!} = 0$ 일 때,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left\{ f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2 \cdot \frac{f''(a)}{2!} + \cdots + (x-a)^n \cdot \frac{\frac{d^n f}{dx^n}\Big|_{x=a}}{n!} \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (x-a)^k \cdot \frac{\frac{d^k f}{dx^k}\Big|_{x=a}}{k!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^n \cdot \frac{\frac{d^n f}{dx^n}\Big|_{x=a}}{n!}$$: $x=a$ 를 중심으로 한 테일러 급수

〈 매클로린 급수 〉

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \frac{\frac{d^n f}{dx^n}\Big|_{x=0}}{n!}$$: $x=0$ 을 중심으로 한 테일러 급수

〈 매클로린 급수 in 삼차함수 〉

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \frac{\frac{d^n f}{dx^n}\Big|_{x=0}}{n!}$$

이하 $\dfrac{d^n f}{dx^n}\Big|_{x=0} = 0$ ($n \geq 4$인 자연수)

$$= x^0 \cdot \underbrace{\frac{f(0)}{0!}}_{d} + x^1 \cdot \underbrace{\frac{f'(0)}{1!}}_{c} + x^2 \cdot \underbrace{\frac{f''(0)}{2!}}_{b} + x^3 \cdot \underbrace{\frac{f'''(0)}{3!}}_{a} + x^4 \cdot \frac{f''''(0)}{4!} + \cdots$$