곡선이론 3

著 : 雀
sukita1729@gmail.com

Ⅰ. 정칙곡선의 접선벡터, 법선벡터, 종법선벡터

<곡선이론 1>과 <곡선이론 2>에서 속력이 $|\alpha'(s)| = 1$인 정칙곡선을 단위속력곡선으로 정의했고, 단위속력곡선의 Frenet-Serret Apparatus를 구해보았다. 단위속력곡선 $\alpha(s)$에 대하여 $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$, $\kappa(s)$, 그리고 $\tau(s)$는 각각 다음과 같이 정의된다. (단, $\langle u, v\rangle$는 두 벡터 u와 v의 내적이다.)

① $T(s) = \alpha'(s)$

② $N(s) = \dfrac{T'(s)}{|T'(s)|}$

③ $B(s) = T(s) \times N(s)$

④ $\kappa(s) = |T'(s)|$

⑤ $\tau(s) = |B'(s)| = -\langle B'(s), N(s)\rangle$

또한 $T(s), N(s), B(s)$에 대하여 다음 관계가 성립한다.

$$\begin{cases} B(s) = T(s) \times N(s) \\ T(s) = N(s) \times B(s) \\ N(s) = B(s) \times T(s) \end{cases}$$

하지만 위 Frenet-Serret Apparatus는 속력이 1인 단위속력곡선에서만 성립하므로, 최종적으로 일반적인 정칙곡선 $r(t)$의 T, N, B를 구해보도록 하자. 호의 길이로 재매개화하여 단위속력곡선의 Frenet-Serret Apparatus 공식을 적용하면 된다고 생각할 수 있지만, $r(t)$가 $r(t) = (t, t^2, t^3)$과 같이 주어진 경우 $r'(t) = (1, 2t, 3t^2)$이고 재매개화 변수 s는

$$s = \int_0^t |r'(t)|\,dt = \int_0^t \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}\,dt$$

가 되어 이를 적분하기 상당히 어려워진다. 이 적분을 타원적분으로 나타내어 대입 후 계산할 수는 있겠으나, 이는 오히려 계산량이 늘어나는 방식이므로 적절하지 않고, 따라서 다음 두 가지 방법을 통해 일반적인 정칙곡선의 T, N, B를 구한다.

먼저, 단위속력곡선에서와 동일한 방법으로 T, N, B를 순서대로 구하는 방법이다. 일반적인 정칙곡선의 속력은 1이 아니므로, T를 구할 때 정칙곡선의 속력으로 나누어주면 되고, 나머지는 단위속력곡선의 T, N, B와 동일하다. 즉, 다음과 같다.

① $T(t) = \dfrac{r'(t)}{|r'(t)|}$

② $N(t) = \dfrac{T'(t)}{|T'(t)|}$

③ $B(t) = T(t) \times N(t)$

두 번째 방법은 T, B, N의 순서로 구하는 것인데, B는 $B(t) = T(t) \times N(t)$임을 이용하여 유도할 수 있다. $T(t)$는 $r'(t)$와 평행하고, $N(t)$는 $r''(t)$와 평행하므로 크기를 고려하지 않고 우선 $r'(t)$와 $r''(t)$를 외적하여 B와 평행한 벡터를 만들어낸 후, 이를 단위벡터로 바꾸면 된다. 즉, 다음과 같다.

① $T(t) = \dfrac{r'(t)}{|r'(t)|}$

② $B(t) = \dfrac{r'(t) \times r''(t)}{|r'(t) \times r''(t)|}$

③ $N(t) = B(t) \times T(t)$

③번에는 위에서 언급한 TNB Frame에서 T, N, B 사이의 관계를 이용하였다.

다음과 같이 주어진 나선 $r(t)$에 대하여 T, N, B를 위 두 가지 방법으로 각각 구해보자.

$$r(t) = (r\cos t,\ r\sin t,\ ht), \quad r'(t) = (-r\sin t,\ r\cos t,\ h), \quad |r'(t)| = \sqrt{r^2 + h^2}$$

[방법 1]

① $T(t) = \dfrac{r'(t)}{|r'(t)|} = \left(-\dfrac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\sin t,\ \dfrac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\cos t,\ \dfrac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)$

② $N(t) = \dfrac{T'(t)}{|T'(t)|} = (-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$

③ $B(t) = T(t) \times N(t) = \left(\dfrac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\sin t,\ -\dfrac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\cos t,\ \dfrac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)$

[방법 2]

① $T(t) = \dfrac{r'(t)}{|r'(t)|} = \left(-\dfrac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\sin t,\ \dfrac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\cos t,\ \dfrac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)$

② $B(t) = \dfrac{r'(t) \times r''(t)}{|r'(t) \times r''(t)|} = \left(\dfrac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\sin t,\ -\dfrac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\cos t,\ \dfrac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)$

③ $N(t) = B(t) \times T(t) = (-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$

이로써 최종적으로 얻어지는 $T,\ N,\ B$는 모두 동일함을 알 수 있다. $r(t)=(t,\ t^2,\ t^3)$인 경우를 다시 생각해보자. 이때 $|r'(t)| = \sqrt{9t^4+4t^2+1}$이므로, **[방법 1]**을 적용하는 경우 $|r'(t)| = \sqrt{9t^4+4t^2+1}$가 분모에 있는 t에 관한 식을 미분해서 T를 구하고, T의 크기를 다시 구하여 N을 구해야 한다. 이는 매우 번거로운 반면, **[방법 2]**를 적용하는 경우 $r'(t)=(1,\ 2t,\ 3t^2)$, $r''(t)=(0,\ 2,\ 6t)$와 $r'(t)\times r''(t)=(6t^2,\ -6t,\ 2)$임을 이용하여 B를 구한 후, 마지막으로 N을 얻을 수 있다. 따라서 경우에 따라 호의 길이로 재매개화 / **[방법 1]** / **[방법 2]** 중 편리한 것을 적절히 선택해야할 것이다.

II. 정칙곡선의 곡률과 비틀림(열률)

일반적인 정칙곡선 $r(t)$의 곡률과 비틀림(열률)은 다음과 같이 주어진다.

① $\kappa(t)=\dfrac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^3}$

② $\tau(t)=\dfrac{[r'(t)\times r''(t)]\cdot r'''(t)}{|r'(t)\times r''(t)|^2}$

pf) ① 법선벡터 T의 정의에서 $T(t)=\dfrac{r'(t)}{|r'(t)|}=\dfrac{r'(t)}{v(t)}$이고 $r'(t)=v(t)T(t)$이다. 양변을 t에 대하여 미분하면

$$r''(t)=v'(t)T(t)+v(t)T'(t)=v'(t)T(t)+\kappa(t)v(t)^2N(t)$$

이다. (정칙곡선의 Frenet-Serret Formula $T'(t)=\kappa(t)v(t)N(t)$가 사용되었다.) 이제 $r'(t)$와 $r''(t)$를 외적하면

$$r'(t)\times r''(t)=[v(t)T(t)]\times\left[v'(t)T(t)+\kappa(t)v(t)^2N(t)\right]=\kappa(t)v(t)^3B(t)$$

를 얻는다. (동일한 벡터 두 개를 외적하면 0이 된다는 사실과 $B(t)=T(t)\times N(t)$가 사용되었다.)

이때 $B(t)$는 단위종법선벡터이므로 크기가 1이고, 따라서

$$|r'(t)\times r''(t)|=\kappa(t)v(t)^3,\quad \kappa(t)=\frac{|r'(t)\times r''(t)|}{v(t)^3}=\frac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^3}$$

이다. ■

② ①에서 구한 $r''(t)$를 다시 한 번 미분하여 $r'''(t)$를 구하면

$$r''(t) = v'(t)T(t) + \kappa(t)v(t)^2 N(t)$$

$$r'''(t) = v''(t)T(t) + v'(t)T'(t) + \left(\kappa(t)v(t)^2\right)' N(t) + \kappa(t)v(t)^2 N'(t)$$

이고, ①에서 구한 $r'(t) \times r''(t) = \kappa(t)v(t)^3 B(t)$와 $r'''(t)$를 내적하면

$$[r'(t) \times r''(t)] \cdot r'''(t)$$

$$= \kappa(t)v(t)^3 B(t) \cdot \left[v''(t)T(t) + v'(t)T'(t) + \left(\kappa(t)v(t)^2\right)' N(t) + \kappa(t)v(t)^2 N'(t)\right]$$

이다. TNB Frame에서 T, N, B는 모두 수직이고, T'은 N과 평행, N'은 B와 평행하므로 수직인 두 벡터의 내적이 0이 됨을 이용하면 위 식에서 최종적으로 B와 N'의 내적만 남는다. 즉,

$$[r'(t) \times r''(t)] \cdot r'''(t) = \kappa(t)^2 v(t)^5 B(t) \cdot N'(t)$$

이고, 정칙곡선의 Frenet-Serret Formula에서 $N'(t) = -\kappa(t)v(t)T(t) + \tau(t)v(t)B(t)$ 이므로 $B(t) \cdot T(t) = 0$임을 이용하면

$$[r'(t) \times r''(t)] \cdot r'''(t) = \kappa(t)^2 v(t)^6 \tau(t) |B(t)|^2$$

이다. 최종적으로 $|B(t)| = 1$과 $\kappa(t) = \dfrac{|r'(t) \times r''(t)|}{v(t)^3}$를 대입하면

$$[r'(t) \times r''(t)] \cdot r'''(t) = \tau(t)|r'(t) \times r''(t)|^2, \quad \tau(t) = \frac{[r'(t) \times r''(t)] \cdot r'''(t)}{|r'(t) \times r''(t)|^2}$$

를 얻는다. ■

Ⅲ. 연습문제

1. 곡선 $r(t) = (1+t^2, t, t^3)$에 대하여 점 $(2, 1, 1)$에서의 Frenet-Serret Apparatus를 구하여라.

2. 곡선 $r(t) = (t, t^2, t^3)$에 대하여 점 $(1, 1, 1)$에서의 Frenet-Serret Apparatus를 구하여라.

3. 곡선 $r(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$의 Frenet-Serret Apparatus를 구하여라.

4. 곡선 $r(t)=(t\cos t,\ \sin t,\ t)$의 Frenet-Serret Apparatus를 구하여라.

5. 곡선 $r(t)=(e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t)$의 곡률과 열률을 구하여라.

6. 정칙곡선 $r(t)$의 속력을 $v=\left|\dfrac{dr}{dt}\right|$라고 할 때, $\kappa = v^{-2}\sqrt{r''\cdot r''-v'\cdot v'}$임을 증명하여라.

7. 정칙곡선 $r(t)$가 직선이 되기 위한 필요충분조건은 r'과 r''이 선형 종속인 것임을 증명하여라.

8. $\kappa\neq 0$인 정칙곡선 $r(t)$에 대하여 $r(t)$가 평면곡선이 되기 위한 필요충분조건은 $[r'(t)\times r''(t)]\cdot r'''(t)=0$인 것임을 증명하여라.