06

2014학년도 9월 평가원(A형) 21번

사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x) = (x+1)(x^2+ax+b)$$

이다. 함수 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty, 0)$에서 감소하고 구간 $(2, \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 a^2+b^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값은? [4점]

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{43}{8}$ ③ $\frac{11}{2}$

④ $\frac{45}{8}$ ⑤ $\frac{23}{4}$

sol1)

$(-\infty, 0)$ 에서 감소

$\longrightarrow f'(x) \le 0$

$\longrightarrow f'(x)$는 $(x+1)^2$을 인수로 가진다. ∵ $f(-1)=0$ $\longrightarrow$ 0 아래로 그래프를 꺾어줘야 함!

$\longrightarrow$ 그래야 극소가 되지 않고 계속 감소

$\longrightarrow (x-1)^2$

$g(x) = x^2+ax+b \Big|_{x=-1} = 1-a+b = 0 \quad \therefore b = a-1$

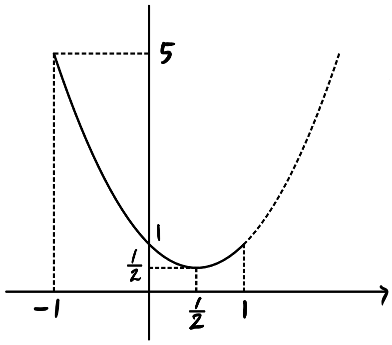
$f'(0) = b \le 0 \quad \therefore a-1 \le 0 \longrightarrow a \le 1$

$f'(2) = 3(4+2a+b) \ge 0 \quad \therefore a \ge -1$

$\therefore -1 \le a \le 1$

$\therefore a^2+b^2 = a^2+(a-1)^2$
$= 2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

06 2014학년도 9월 평가원(A형) 21번



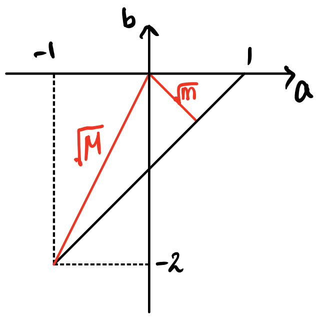
$\therefore M=5,\ m=\frac{1}{2}$

$\therefore M+m=\frac{11}{2}$

sol₂)

$b=a-1,\quad -1\le a\le 1$

$a^2+b^2=\left\{\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}\right\}^2$: {점과 직선 사이 거리}^{2} !



$\therefore M=5,\ m=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{11}{2}$