제 2 교시

2023학년도 KUME(쿠메) 모의고사 1회

수학 영역

성명		수험번호						-				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

바위를 가르는 자그마한 물방울

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2023학년도 KUME(쿠메) 모의고사 1회

시행 : 2022년 8월 28일 (일) 오후 2시 0분 ~ 오후 3시 40분

집　필 : 고려대학교 수학교육과 소모임 KUME(쿠메) 22

곽예원 김기훈 김준규 김혜인 박혜강 오익재 이권열 이성준 정예진 정진우 주희서 홍성준 양가현
김동건 김민재 이승수 이윤재 홍준석 현명진 김민석 최제현 황재민

손해설 : 김민재 이성준 이승수

검　토 : 김민재 이성준 이승수 김민석 최제현 황재민

KUME(쿠메) 모의고사에 관한 문의사항은 ‘KUME’ 인스타그램 또는 rlaalswo2491@gmail.com으로 문의바랍니다.

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\log_2 3 + \log_4 \frac{8}{9}$의 값은? [2점]

① $\frac{5}{6}$ ② 1 ③ $\frac{7}{6}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$\log_2 3 + \log_4 \frac{8}{9}$

$= \log_2 3 + \log_4 8 - \log_4 9$

$= \frac{3}{2}$

2. 함수 $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$에 대하여 $\int_2^4 f(x)\,dx$의 값은? [2점]

① 32 ② 36 ③ 40 ④ 44 ⑤ 48

$\int_2^4 (3x^2 - 3x + 1)\,dx$

$= \left[x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\right]_2^4$

$= \left(64 - \frac{3}{2}\times 16 + 4\right) - \left(2^3 - \frac{3}{2}\times 2^2 + 2\right)$

$= 44 - 4$

$= 40$

3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 + a_5 = 20, \quad a_7 - a_5 = 6$$

일 때, a_{11}의 값은? [3점]

① 29 ② 30 ③ 31 ④ 32 ⑤ 33

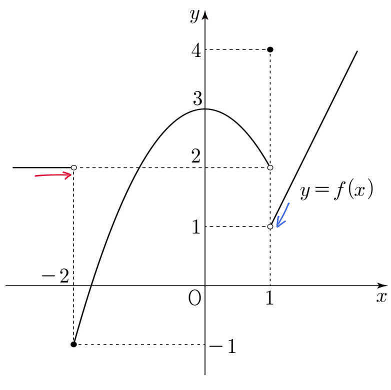
등차중항에 의하여 $a_3 + a_5 = 2a_4 = 20$

$\therefore a_4 = 10.$

$a_7 - a_5 = 2d = 6 \quad \therefore d = 3$

$\therefore a_{11} = a_4 + 7d = 10 + 7\times 3 = 31$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -2-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

$\lim_{x\to -2-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x) = 2 + 1 = 3$

5. 모든 항이 정수인 등비수열 $\{a_n\}$의 공비는 -2이고

$$50 < \sum_{n=1}^{7} a_n < 100$$

을 만족시킬 때, a_5의 값은? [3점]

① 16 ② 32 ③ 48 ④ 64 ⑤ 80

$a_n = a_1 \times (-2)^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{7} a_n = \frac{1-(-2)^7}{1-(-2)} a_1 = \frac{129}{3} a_1 = 43a_1$

이때 $\frac{50}{43} < a_1 < \frac{100}{43}$ 이고 a_1은 정수이므로

$a_1 = 2$ 이며, $a_5 = 2 \times (-2)^{5-1} = 32$ 이다.

$\therefore 32$

6. 함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 14x - 9$의 도함수 $f'(x)$는 $x = \alpha$에서 최솟값을 갖는다. 함수 $y = f(x)$ 위의 점 $(\alpha, f(\alpha))$에서의 접선의 방정식이 $y = ax + b$일 때, $a + b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 14 = 3(x-2)^2 + 2$

이때 $f'(x)$는 $x = 2$ 에서 최소이다. $\therefore \alpha = 2$.

$f(2) = 2^3 - 6 \times 2^2 + 14 \times 2 - 9 = 8 - 24 + 28 - 9 = 3$

즉, 접선은 $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 2(x-2) + 3 = 2x - 1$

$\therefore a + b = 2 + (-1) = 1.$

7. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$인 θ에 대하여 $2\sin^2\theta - 5\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -1$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\sqrt{3}$ ② -1 ③ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\sqrt{3}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 이고 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$

$\therefore 2(1 - \cos^2\theta) - 5\cos\theta + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3 - 5\cos\theta - 2\cos^2\theta = (3 + \cos\theta)(1 - 2\cos\theta) = 0$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(\because \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \Rightarrow \sin\theta < 0)$

이때 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = -\sqrt{3}$

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=(x^2+3)f(x)$$

이다. $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-4}{x^2-1}=5$일 때, $f'(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-4}{x-1}\times\frac{1}{x+1}=5$ 에서 분모가 0으로 수렴하므로

극한이 정의되려면 $g(1)=4$ 이다.

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{g(x)-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{g(x)-4}{x-1}\times\frac{1}{x+1}=\frac{g'(1)}{2}=5,\ g'(1)=10$

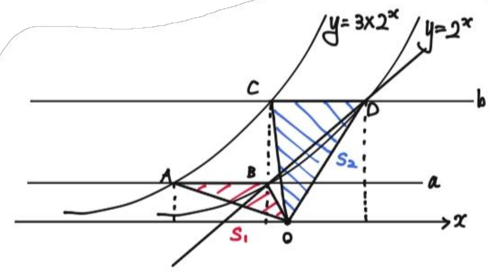
이때 $g(1)=(1^2+3)f(1)=4f(1)=4,\ f(1)=1.$

$g'(1)=2xf(x)+(x^2+3)f'(x)\big|_{x=1}=2f(1)+4f'(1)=2+4f'(1)=10$

$\therefore f'(1)=2.$

9. $0<a<b$인 두 상수 a, b에 대하여 직선 $y=a$가 두 곡선 $y=3\times2^x$, $y=2^x$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=b$가 두 곡선 $y=3\times2^x$, $y=2^x$과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 S_1, 삼각형 OCD의 넓이를 S_2라 할 때, $S_2=3S_1$이다. 직선 BD의 기울기가 $(\log_3 2)^2$일 때, 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4



$y=3\times2^x=2^{x+\log_2 3}$ 이므로 $\overline{AB}=\overline{CD}=\log_2 3$ 이다. (평행이동)

$S_1=\frac{1}{2}a\log_2 3,\ S_2=\frac{1}{2}b\log_2 3$ 이므로 $S_2=3S_1 \Leftrightarrow b=3a$

이때 $b=3a$ 이므로 B와 C의 x 좌표는 같다.

따라서 $\overleftrightarrow{BD}$의 기울기는 $\frac{2a}{\overline{CD}}=(\log_3 2)^2 \Rightarrow 2a=\log_3 2$

$a=\frac{1}{2}\log_3 2,\ S_1=\frac{1}{4}.$

10. 실수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4 & (x<a)\\ 5x^2+3x-20 & (x\ge a)\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}3x^2+4x-12 & (x<a)\\ 2 & (x\ge a)\end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)+g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$f(x)+g(x)=\begin{cases}4x^2+4x-16 & (x<a)\\ 5x^2+3x-18 & (x\ge a)\end{cases}$ 이므로

$\lim_{x\to a-}\{f(x)+g(x)\}=f(a)+g(a)=\lim_{x\to a+}\{f(x)+g(x)\}$ 이다.

$\Leftrightarrow 4a^2+4a-16=5a^2+3a-18$ 이므로

$\Leftrightarrow a^2-a-2=(a-2)(a+1)=0$

$\therefore a=2,-1$ 이므로 a값의 합은 1.

11. 첫째항이 3인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+a_{k+1})=2n^2+4n+3$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{6}a_{3k-2}$의 값은? [4점]

① 90 ② 95 ③ 100 ④ 105 ⑤ 110

$\sum_{k=1}^{1}(a_k+a_{k+1}) = 2\times1^2+4\times1+3 = 9$, $a_2=6$.

$\sum_{k=1}^{2}(a_k+a_{k+1}) = 2\times2^2+4\times2+3 = 19$, $a_3=4$

2 이상의 자연수 n에 대하여

$a_n+a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n}(a_k+a_{k+1}) - \sum_{k=1}^{n-1}(a_k+a_{k+1})$

$= (2n^2+4n+3)-(2n^2+1) = 4n+2$

$\therefore a_{n+2}-a_n = (a_{n+2}+a_{n+1})-(a_{n+1}+a_n)$

$= (4n+6)-(4n+2) = 4$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 3 & (n=1) \\ 2n+2 & (n\text{은 짝수}) \\ 2n-2 & (n\text{은 3 이상의 홀수}) \end{cases}$$

$\sum_{k=1}^{6}a_{3k-2} = a_1+a_4+a_7+a_{10}+a_{13}+a_{16}$

$= 3+10+12+22+24+34$

$= 105$

12. 실수 t에 대하여 $x \le t$에서 $f(x)=x^4-2x^3-2x^2+3$의 최솟값을 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $g(0)=\frac{45}{16}$ (O)

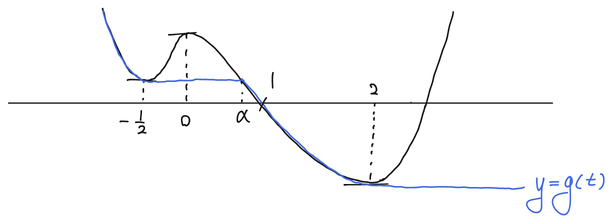
ㄴ. $t_1<t_2$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $g(t_1)\ge g(t_2)$이다.

ㄷ. 함수 $f(t)-g(t)$는 극댓값 $\frac{3}{16}$을 가진다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f'(x) = 4x^3-6x^2-4x = 2x(x-2)(2x+1)$

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



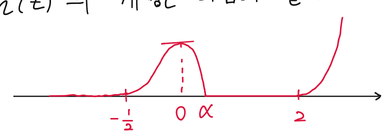
위의 그림에서 $y=g(t)$는 다음과 같이 나타난다.

ㄱ. $g(0) = f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^4-2(-\frac{1}{2})^3-2(-\frac{1}{2})^2+3$

$= \frac{1}{16}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+3 = \frac{45}{16}$ (O)

ㄴ. $t_1<t_2$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $(-\infty, t_1] \subseteq (-\infty, t_2]$ 이므로 $g(t_1) \ge g(t_2)$이다. (O)

ㄷ $h(t)$ 의 개형은 다음과 같다.



$h(t)$는 $t=0$ 에서 극댓값을 갖는다.

이때 $h(0) = f(0)-g(0) = 3-\frac{45}{16} = \frac{3}{16}$ (O)

뒷장에 몇 가지 설명 첨부합니다만, 다소 수험생 풀이와 거리가 멀어 별도로 기재합니다.

12번 ㄴ.

기존 문항에서 "감소" 라는 용어 사용.

↳ 고등학교 과정에서는 $x<y$ 이면 $f(x)>f(y)$ 일 때 감소이지만

내부에서 해당 문제를 해석하는 과정에서 strictly 인지 아닌지 혼동되어 의도와 달라짐.

따라서 원래 의도인 decreasing 에 대한 정의로 문제 수정.

+) $g(t_1) \geq g(t_2)$ 인 이유.

매우 직관적이라 느껴질 수도 있지만 비교적 더 엄밀한 설명입니다.

$t_1 < t_2$ 이면 $x \leq t_1$ 이면 $x \leq t_2$ 이다.

이때 $g(t_1) < g(t_2)$ 라 하자.

그렇다면 $g(t_1) = h(s)$ $(s \leq t_1)$ 이면 $s \leq t_1 < t_2$ 이므로 $s \leq t_2$ 이다.

이때 $h(s) < g(t_2)$ 이면 이는 g 가 $t \leq t_1$ 에서의 최솟값이라는 정의에

모순이므로, 가정은 거짓이다. (귀류법)

따라서 $g(t_1) \geq g(t_2)$.

12번 ㄷ.

극댓값의 정의 (Calculus 교재의 local max)는 고교과정으로 해석하면 다음과 같다.

a 를 포함하는 어떤 열린 구간 I 에서 모든 $x \in I$ 에 대해 $f(a) \geq f(x)$ 이면 $f(a)$는 극댓값이다.

이때 $f(1) = 0$ 이므로 $1 > \alpha$, 즉 $h(t)$는 적어도 $1 \leq t \leq 2$ 에서는 $h(t) = 0$ 이다.

이때 $1<a<2$ 인 a 가 있다 하자. 그렇다면 $1<a<2$ 이므로 $1 < \frac{1+a}{2} < a < \frac{a+2}{2} < 2$ 이다.

또한 $\frac{a+1}{2} < x < \frac{a+2}{2}$ 에서 $h(a) = h(x)$ 이므로 $h(a) = 0$ 또한 극댓값이다.

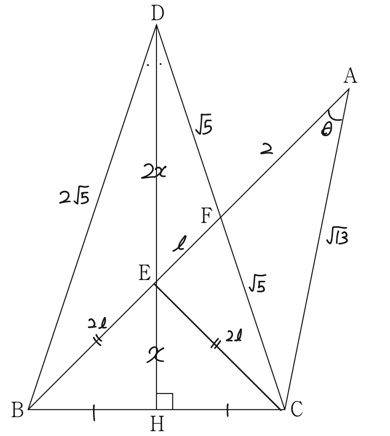
이때 기존의 발문에서 "극댓값은 $\frac{3}{16}$ 이다" 는 모든 극댓값이 $\frac{3}{16}$과 일치해야 정답이 된다.

이에 따라 기존 의도에 맞게 " $\frac{3}{16}$ 을 극댓값으로 갖는다" 로 수정한다.

요약하면, 전자는 " $\{$극댓값$\} = \{\frac{3}{16}\}$ " 인 셈이고 후자는 " $\frac{3}{16} \in \{$극댓값$\}$ " 인 셈이다.

(이때 $\{$극댓값$\}$ 은 함수 $h(t)$ 의 극댓값들의 집합.)

13. 그림과 같이 $\overline{AC}=\sqrt{13}$, $\cos(\angle BAC)=\frac{3\sqrt{13}}{13}$ 인 삼각형 ABC와 $\overline{BD}=2\sqrt{5}$ 인 삼각형 BDC가 있다. 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 선분 BC의 중점이다. 선분 AB와 DH의 교점을 E, 선분 AB와 DC의 교점을 F라 하자. $\overline{AF}=2$ 일 때, 선분 EH의 길이는? [4점]



① $\frac{5\sqrt{2}}{6}$ ② $\frac{11\sqrt{2}}{12}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\frac{13\sqrt{2}}{12}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{2}}{6}$

$\overline{DH}$가 $\overline{BC}$의 수직이등분선이므로 $\triangle BCD$와 $\triangle BCE$는 각각 밑변이 $\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

이때 코사인 법칙에 의해

$$\overline{CF}^2=\overline{AC}^2+\overline{AF}^2-2\overline{AC}\times\overline{AF}\cos\theta$$
$$=13+4-4\sqrt{13}\times\frac{3\sqrt{13}}{13}=5$$

$\therefore\ \overline{CF}=\sqrt{5}$, $\overline{BD}=\overline{CD}=2\sqrt{5}$ 이므로 $\overline{DF}=\overline{CF}=\sqrt{5}$이다.

즉, 점 F는 $\overline{CD}$의 중점이므로 $\overline{BF}$와 $\overline{DH}$는 중선이며 점 E는 무게중심이다. 따라서 $\overline{EF}=l$ 이면 $\overline{BE}=\overline{CE}=2l$이다.

이때 $\triangle ACE$에서 코사인법칙에 의해

$$\cos\theta=\frac{3\sqrt{13}}{13}=\frac{(l+2)^2+13-4l^2}{2(l+2)\sqrt{13}}$$

$\Leftrightarrow\ 6l+12=-3l^2+4l+17$

$3l^2+2l-5=(3l+5)(l-1)=0$, $l=1$.

이때 $\overline{EH}=x$ 이면 점E가 무게중심이므로 $\overline{DE}=2x$ 이다.

$\triangle ACF$에서 $\cos\angle AFC=\frac{4+5-13}{2\times2\times\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \triangle DEF$에서 $(2x)^2=5+1-2\sqrt{5}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=8$

$\therefore\ 2x=2\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$.

14. 닫힌구간 $[0,4]$에서 연속인 함수 $f(x)$는

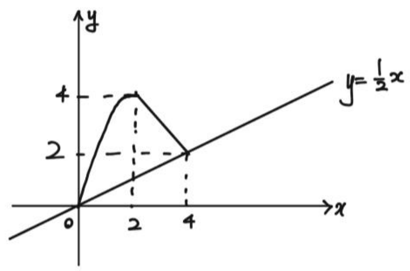
$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4x & (0\le x<2)\\ -x+6 & (2\le x\le 4)\end{cases}$$

이고, 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0\le x<4$에서 $f(x)=g(x)$이다.
(나) 모든 양의 실수 x에 대하여
$$\int_x^{x+4}\left|g(t)-\frac{1}{2}t\right|dt=\int_0^4\left\{g(t)-\frac{1}{2}t\right\}dt \text{ 이다.}$$

$g(5)=0$ 일 때, $\int_0^8 g(x)dx$ 의 값은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20



조건(나)에서 $g(t)-\frac{1}{2}t=h(t)$라 하면

$$\int_x^{x+4}|h(t)|dt=\int_0^4 h(t)dt.$$

양변을 미분하면 $|h(x+4)|-|h(x)|=0$

즉 $x\ge0$ 이면 $|h(x+4)|=|h(x)|$이다.

따라서 $|h(x)|$는 주기가 4인 함수이고

$|h(0)|=|h(4)|=0$ 이므로 $|h(x)|$는 $x=4$에서 연속이며, 곧 $x\ge0$에서 연속이다.

이때 $g(5)=0$ 이므로 $h(5)=g(5)-\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}<0$ 이므로

$0<x\le4$ 에서 $h(x+4)=-h(x)$ 이며 곡선 $y=h(x)$는

$0\le x\le8$ 에서 $(4,h(4))$ 대칭 이므로

$$\int_0^8 h(x)dx=\int_0^8 g(x)dx-\int_0^8\frac{1}{2}x\,dx=\int_0^8 g(x)dx-16=0.$$

$$\therefore\ \int_0^8 g(x)dx=16.$$

15. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_4=1$, $a_8=\frac{1}{3}$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_n a_{n+1} & (a_n < a_{n+1}) \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} & (a_n \ge a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{5} a_n > 5$일 때, $\sum_{n=1}^{30} (a_n)^2$의 값은? [4점]

① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

다음 페이지에 별도의 해설 첨부하였습니다.

단답형

16. $3\sqrt{3}\times 9^{-\frac{1}{4}}$의 값을 구하시오. [3점]

$3\sqrt{3}\times 9^{-\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = 3.$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=4x^3-6x^2+2x$이고 $f(1)=3$일 때, $f(-1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x) = \int (4x^3-6x^2+2x)\,dx$

$= x^4-2x^3+x^2+C$

$f(1) = 1-2+1+C = C = 3$

$\therefore f(-1) = 1+2+1+3 = 7.$

☆ 15번 해설

i) $a_4 < a_5$ $(\Rightarrow a_5 > 1)$

$a_6 = a_4 a_5 = a_5$, $a_7 = \frac{a_6}{a_5} = 1$, $a_8 = \frac{a_7}{a_6} = \frac{1}{a_5} = \frac{1}{3}$ $\therefore a_5 = 3$

ii) $a_4 = a_5 = 1$

$a_6 = \frac{a_5}{a_4} = 1$, $a_7 = \frac{a_6}{a_5} = 1$, $a_8 = \frac{a_7}{a_6} = 1 \rightarrow (X)$

iii) $a_4 > a_5$ $(\Rightarrow a_5 < 1)$

$a_6 = \frac{a_5}{a_4} = a_5$, $a_7 = \frac{a_6}{a_5} = 1$, $a_8 = a_6 a_7 = a_5$ $\therefore a_5 = \frac{1}{3}$

---

① $a_5 = 3$

$$a_5 = \begin{cases} a_3 a_4 = a_3 & (a_3 < a_4) \\ \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{a_3} & (a_3 \geq a_4) \end{cases} = 3 \text{ 에서}$$

$a_3 < a_4 = 1$ 이면 $a_3 = 3$ 이어야 하고, 이는 모순이다.

$a_3 \geq a_4 = 1$ 이면 $a_3 = \frac{1}{3}$ 이어야 하고, 이는 모순이다.

② $a_5 = \frac{1}{3}$

$a_3 < a_4 = 1$ 이면 $a_3 = \frac{1}{3}$ 이어야 한다.

$a_3 \geq a_4 = 1$ 이면 $a_3 = 3$ 이어야 한다.

---

① $a_3 = \frac{1}{3}$

$$a_4 = \begin{cases} a_2 a_3 = \frac{a_2}{3} & (a_2 < a_3) \\ \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{3a_2} & (a_2 \geq a_3) \end{cases} = 1 \text{ 에서}$$

$a_2 < a_3 = \frac{1}{3}$ 이면 $a_2 = 3$ 이어야 하고, 이는 모순이다.

$a_2 \geq a_3 = \frac{1}{3}$ 이면 $a_2 = \frac{1}{3}$ 이어야 한다.

② $a_3 = 3$

$$a_4 = \begin{cases} 3a_2 & (a_2 < a_3) \\ \frac{3}{a_2} & (a_2 \geq a_3) \end{cases} = 1 \text{ 에서}$$

$a_2 < a_3 = 3$ 이면 $a_2 = \frac{1}{3}$ 이어야 한다

$a_2 \geq a_3 = 3$ 이면 $a_2 = 3$ 이어야 한다.

$\therefore$

a_2	a_3
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	3
3	3

(오른쪽에 이어서)

① $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{3}$

$$a_3 = \begin{cases} a_1 a_2 = \frac{a_1}{3} & (a_1 < a_2) \\ \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3a_1} & (a_1 \geq a_2) \end{cases} = \frac{1}{3} \text{ 에서}$$

$a_1 < a_2 = \frac{1}{3}$ 이면 $a_1 = 1$ 이어야 하고, 이는 모순이다.

$a_1 \geq a_2 = \frac{1}{3}$ 이면 $a_1 = 1$ 이어야 한다.

$\therefore \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{5} a_n < 5$ 이므로 X

② $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = 3$

$$a_3 = \begin{cases} a_1 a_2 = \frac{a_1}{3} & (a_1 < a_2) \\ \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3a_1} & (a_1 \geq a_2) \end{cases} = 3 \text{ 에서}$$

$a_1 < a_2 = \frac{1}{3}$ 이면 $a_1 = 9$ 여야 하고, 이는 모순이다.

$a_1 \geq a_2 = \frac{1}{3}$ 이면 $a_1 = \frac{1}{9}$ 이어야 하고, 이는 모순이다.

③ $a_2 = 3$, $a_3 = 3$

$$a_3 = \begin{cases} a_1 a_2 = 3a_1 & (a_1 < a_2) \\ \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{a_1} & (a_1 \geq a_2) \end{cases} = 3 \text{ 에서}$$

$a_1 < a_2 = 3$ 이면 $a_1 = 1$ 이어야 한다.

$a_1 \geq a_2 = 3$ 이면 $a_1 = 1$ 이어야 하고, 이는 모순이다.

$\therefore$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	$\cdots$
1	3	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	

$\rightarrow 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ 이 반복된다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{30} (a_n)^2 = 1 + 9 + 9 + \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) \times 9$$

$$= 19 + \frac{11}{9} \times 9$$

$$= 30$$

18. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\left|x+\dfrac{1}{2}\right|+\dfrac{7}{4} & (-1\le x<0)\\ x^2+ax+b & (0\le x<1)\end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이다. $f\left(\dfrac{9}{2}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{7}{4}=b \quad \therefore b=\frac{9}{4}$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이므로

$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(-1)$

$\left|-\frac{1}{2}\right|+\frac{7}{4}=1+a+\frac{9}{4} \quad \therefore a=-1$

$\therefore f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+b=2$

19. 부등식 $\log_2(x^2-x-2)\le\log_2(6x+6)$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

i) 진수조건

$x^2-x-2>0$ 이고 $6x+6>0$

$\Leftrightarrow x<-1, x>2$ 이고 $x>-1$

$\therefore x>2$

ii) 부등식 계산

$x^2-x-2\le 6x+6$

$\Leftrightarrow x^2-7x-8\le 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-8)\le 0$

$\Leftrightarrow -1\le x\le 8$

정수 x는 3, 4, 5, 6, 7, 8이므로

$3+4+5+6+7+8=33$

20. 양수 a에 대하여 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=t^3-(a+2)t^2+2at$$

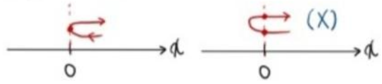
이다. 시각 t에서의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 출발 후 점 P는 원점을 한 번 지난다.
(나) 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는 8이다.

점 P의 속도가 최소일 때, 점 P의 위치는 k이다. $9k$의 값을 구하시오. [4점]

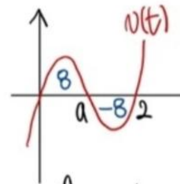
$v(t)=t(t-2)(t-a)$

• 조건 (가)에서 출발 후 원점을 한 번 지난다고 하였으므로 점 P는 $x=0$에서 방향을 바꾼다.



$\Rightarrow$ 출발 후 속도가 0일 때 P의 위치는 0이다.

i) $0<a<2$



조건 (가), (나)에 의해

$\int_0^a v(t)\,dt=8$, $\int_0^2 v(t)\,dt=0$이고,

$v(t)$가 $(a, 0)$ 대칭이므로 $a=1$이다.

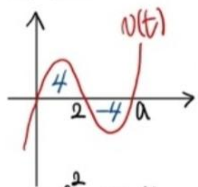
이때 $\int_0^a v(t)\,dt=\int_0^1 (t^3-3t^2+2t)\,dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^4-t^3+t^2\right]_0^1=\frac{1}{4}$ 이므로 이는 모순이다.

ii) $a=2$

(위치)$=0$인 t가 존재하지 않는다.

iii) $a>2$



조건 (가), (나)에 의해

$\int_0^2 v(t)\,dt=4$, $\int_0^a v(t)\,dt=0$이고,

$v(t)$가 $(2, 0)$ 대칭이므로 $a=4$ 이다.

이때 $\int_0^2 v(t)\,dt=\int_0^2 (t^3-6t^2+8t)\,dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^4-2t^3+4t^2\right]_0^2=4$ 이므로

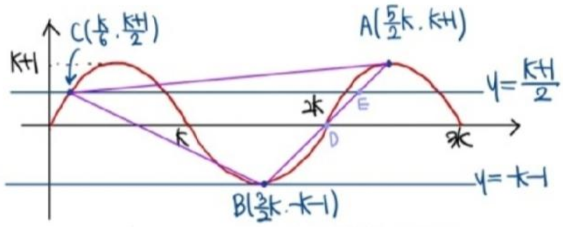
$a=4$이고, $v(t)=t^3-6t^2+8t$ 이다.

$v'(t)=3t^2-12t+8=0$ 에서 $t=2+\frac{2}{\sqrt{3}}$ 이고

$k=\int_0^{2+\frac{2}{\sqrt{3}}}(t^3-6t^2+8t)\,dt=\left[\frac{1}{4}t^2(t-4)^2\right]_0^{2+\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{16}{9} \quad \therefore 16$

21. 자연수 k에 대하여 집합 $\{x \mid 0 \leq x \leq 3k\}$에서 정의된 함수 $f(x) = (k+1)\sin\dfrac{\pi x}{k}$의 그래프 위에 점 $\mathrm{A}\left(\dfrac{5k}{2},\ k+1\right)$이 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k-1$이 만나는 점을 B라 하고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{k+1}{2}$가 만나는 점 중 x좌표의 값이 가장 작은 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 200 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

$f(x) = (k+1)\sin\frac{\pi}{k}x$ 의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{k}} = 2k$이고
정의역은 $\{x \mid 0 \leq x \leq 3k\}$이므로
그래프는 다음과 같다.



점 B는 $y=f(x)$와 $y=-k-1$이 만나는 점이므로
$B\left(\frac{3}{2}k, -k-1\right)$이다.

점 C는 $y=f(x)$와 $y=\frac{k+1}{2}$이 만나는 점 중
x좌표가 가장 작은 점이므로
$(k+1)\sin\frac{\pi}{k}x = \frac{k+1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{k}x = \frac{1}{2}$이고
$\frac{\pi}{k}x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{k}{6}$이다. $\therefore\ C\left(\frac{k}{6}, \frac{k+1}{2}\right)$

$x=2k$인 점을 D, 선분 DA와 $y=\frac{k+1}{2}$이 만나는 점을 E라 하면, 점 A, E, D는 한 직선 위에 있고
점 E의 y좌표가 점 A와 점 D의 y좌표의 평균이므로
점 E는 선분 AD의 중점이고, x좌표는 $\dfrac{2k+\frac{5}{2}k}{2} = \frac{9}{4}k$이다.

$\triangle ABC = \frac{1}{2}\times\left(\frac{9}{4}k - \frac{k}{6}\right)\times 2(k+1) = \frac{25}{12}k(k+1)$이고,

넓이가 자연수이므로 $k(k+1)$은 12의 배수여야 한다. 또한
$\frac{25}{12}k(k+1) \leq 200$ 이므로 $k(k+1) \leq 96$이다.

$k(k+1) = 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96$ 이고,
$\underset{3\times4}{12}$, $\underset{8\times9}{72}$

이 중 가능한 자연수 k는 3, 8 이다. $\therefore\ 3+8=11$

22. 이차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 함수

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 0) \\ g(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{|h(x)|+|h(-x)|}{x} \geq 6$
>
> (나) 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖는다.
>
> (다) 0이 아닌 실수 t에 대하여
> $\left\{t \,\middle|\, \left|\dfrac{h(t)-h(0)}{t}\right| \geq 3\right\} = \{t \mid |t| \geq 6\}$이다.

$h'(-6)+h'(6)$의 값을 구하시오. [4점]

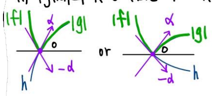
조건 (가)에서 (분모)→0 이므로 (분자)→0
$|h(0)|+|h(-0)| = 2|h(0)| = 0 \quad \therefore h(0)=0$

$\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{|h(x)|+|h(-x)|}{x} = \lim_{x\to0+}\frac{|h(x)|-|h(0)|+|h(-x)|-|h(0)|}{x}$ $-x=t$

$\displaystyle = \lim_{x\to0+}\frac{|h(x)|-|h(0)|}{x} + \lim_{t\to0-}\frac{|h(t)|-|h(0)|}{-t}$

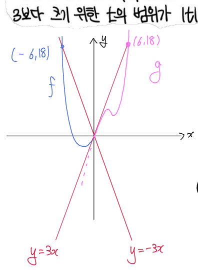
$\left(\begin{matrix}|g(x)|\text{의 } x=0\\ \text{우미분계수}\end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix}|f(x)|\text{의 } x=0\\ \text{좌미분계수}\end{matrix}\right) \geq 6$

이때 $h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $h'(0)=\alpha$라 하면
i) $|g(x)|$의 $x=0$ 우미분계수 $=$ $|f(x)|$의 $x=0$ 좌미분계수
좌변이 0이 되어 조건(가)가 성립되지 않는다.
ii) $|g(x)|$의 $x=0$ 우미분계수 $+$ $|f(x)|$의 $x=0$ 좌미분계수 $=0$



$\alpha-(-\alpha) \geq 6$ 이므로
$\alpha \geq 3$이다. $\cdots$ ㉠

조건 (다)에서 $(0,0)$부터 $(t, h(t))$까지의 평균변화율의 절댓값이 3보다 크기 위한 t의 범위가 $|t| \geq 6$ 이므로 다음 그림과 같아야 한다.



이때 $\displaystyle\lim_{x\to0+}h'(x) = \alpha \leq 3 \quad \cdots$ ㉡

즉, ㉠, ㉡에 의해 $h'(0)=\alpha=3$.

① $f(x)+3x = px(x+6)$, $f'(x)+3 = p(2x+6)$
$f'(0)=3$ 이므로 $p=1 \quad \therefore f'(x) = 2x+3$

② $g(x)-3x = qx^2(x-6)$, $g'(x)-3 = q(3x^2-12x)$
$g'(1)=0$ 이므로 $q=\frac{1}{3}$, $g'(x) = x^2-4x+3$

$\therefore h'(-6)+h'(6) = f'(-6)+g'(6) = -9+15 = 6. \quad \therefore 6$

> ＊ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{5}{3^{n+1}}+\dfrac{3}{4^n}}{\dfrac{2}{3^n}-\dfrac{3}{5^n}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{25}{12}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{3^{n+1}}+\frac{3}{4^n}}{\frac{2}{3^n}-\frac{3}{5^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{3}+3\left(\frac{3}{4}\right)^n}{2-3\left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

$$= \frac{\frac{5}{3}+3\times0}{2-3\times0}$$

$$= \frac{5}{6}$$

24. 매개변수 t $(t>-1)$로 나타내어진 곡선

$$x=2\ln(t+1)+3,\quad y=\sin t$$

에서 $t=0$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\frac{d}{dt}(\sin t)}{\frac{d}{dt}(2\ln(t+1)+3)} = \frac{\cos t}{\left(\frac{2}{t+1}\right)} = \frac{t+1}{2}\cos t$$

따라서 $t=0$일때 $\frac{dy}{dx} = \frac{0+1}{2}\cos 0 = \frac{1}{2}$.

25. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\pi\cdot\frac{k}{n}\right)$

$= \int_0^1 x\sin\pi x\,dx$

$= \left[-\frac{1}{\pi}x\cos\pi x\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{\pi}\cos\pi x\,dx$

$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^1$

$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\times 0$

$= \frac{1}{\pi}$

26. 함수 $f(x)=x^3e^{x^4}$에 대하여 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}f'(\sqrt{x})\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{e}{2}$ ② e ③ $\frac{3e}{2}$ ④ $2e$ ⑤ $\frac{5e}{2}$

$\sqrt{x}=t$ 라 하자.

$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{dt}{dx}$, $x=\frac{1}{2}$일 때 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=1$일 때 $t=1$ 이므로

$\int_{\frac{1}{2}}^{1}f'(\sqrt{x})dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}2\sqrt{x}f'(t)dt$

$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}2tf'(t)dt$

$= \left[2tf(t)\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}2f(t)dt$

$= 2f(1) - \sqrt{2}f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}2t^3e^{t^4}dt$

$= 2e - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}} - \left[\frac{1}{2}e^{t^4}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}$

$= 2e - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}} - \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}\right)$

$= \frac{3}{2}e$

27. 그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 원 O_1이 있다. 원 O_1 위의 점 C_1에 대하여 점 B_1에서 그은 접선과 직선 A_1C_1이 만나는 점을 점 O라 하자. 두 직선 A_1C_1과 OB_1이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이다. 선분 A_1C_1과 점 B_1을 지나는 호 A_1C_1로 둘러싸인 부분인 ◯ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 직선 OB_1과 점 B_2에서 접하는 원 O_2가 원 O_1과 접하고, 원 O_2가 직선 OA_1과 만나는 두 점 중 점 A_1에 더 가까운 점을 A_2라 할 때 선분 A_2B_2가 원 O_2의 지름이 되도록 선분 OB_1 위의 점 B_2를 잡는다. 선분 A_2C_2와 점 B_2를 지나는 호 A_2C_2로 둘러싸인 부분인 ◯ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

① O_1의 중심을 O_1이라 하자.

A_1, O, B_1 한 직선

$\angle A_1C_1B_1 = \frac{\pi}{2}$ (원주각 성질)

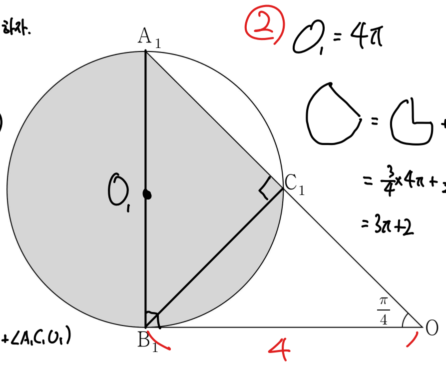
$\angle A_1B_1O = \frac{\pi}{2}$ (접선 성질)

$\angle OB_1C_1 = \pi - (\angle OC_1B_1 + B_1OC_1) = \frac{\pi}{4}$

$\angle A_1B_1C_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$,

$\angle B_1A_1C_1 = \frac{\pi}{4} = \angle A_1C_1O_1$

$\angle A_1O_1C_1 = \pi - (\angle B_1A_1C_1 + \angle A_1C_1O_1) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$



② $O_1 = 4\pi$

$= \frac{3}{4}\times 4\pi + \frac{1}{2}\times 2\times 2$

$= 3\pi + 2$

③ O_2의 반지름을 R라 하자.

$\overline{B_1B_2} = \sqrt{(2+R)^2 - (2-R)^2} = 2\sqrt{2R}$

$\angle OA_1B_1 = \angle A_1OB_1 = \frac{\pi}{4}$

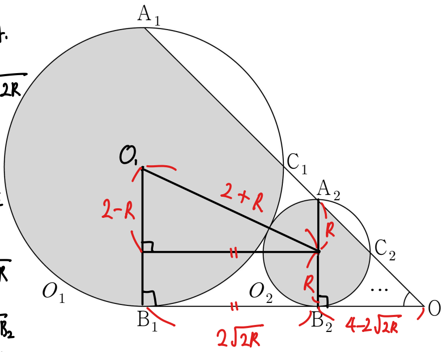
$\Rightarrow \triangle OA_1B_1$은 $\overline{A_1B_1} = \overline{OB_1} = 4$인 직각이등변 삼각형 …㉠

$\therefore \overline{OB_2} = \overline{OB_1} - \overline{B_1B_2} = 4 - 2\sqrt{2R}$

㉠과 같은 방법으로 $\overline{A_2B_2} = \overline{OB_2}$

$2R = 4 - 2\sqrt{2R}$, $R-2 = \sqrt{2R}$, $R^2 - 6R + 4 = 0$, $R = 3-\sqrt{5}$ $(\because R<2)$

닮음비 $2 : 3-\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ 넓이비 $2^2 : (3-\sqrt{5})^2 = 1 : \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$



① $\frac{3}{10}(3\pi+2)(\sqrt{5}+1)$ ② $\frac{3}{5}(3\pi+2)(\sqrt{5}+1)$

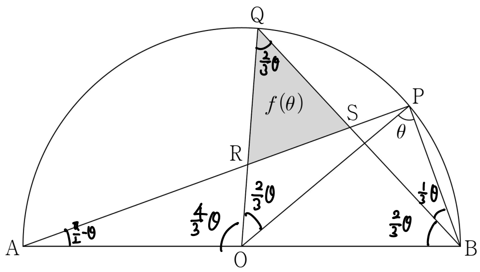
③ $\frac{1}{10}(3\pi+5)(3\sqrt{5}+4)$ ④ $\frac{1}{5}(3\pi+2)(3\sqrt{5}+4)$

⑤ $\frac{1}{10}(3\pi+2)(3\sqrt{5}+5)$

S_n은 첫째항 $3\pi+2$, 공비 $\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ 인 등비수열 첫째항 ~ 제n항까지 합

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3\pi+2}{1-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} = \frac{2(3\pi+2)}{3\sqrt{5}-5} = \frac{1}{10}(3\pi+2)(3\sqrt{5}+5)$

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 부채꼴 OAP에서 호 AP의 삼등분점 중 점 P에 가까운 점을 Q라 하자. 선분 AP와 선분 OQ가 만나는 점을 R, 선분 AP와 선분 BQ가 만나는 점을 S라 하자. $\angle OPB = \theta$일 때, 삼각형 QRS의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta^5}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



① $\frac{4}{81}$ ② $\frac{16}{243}$ ③ $\frac{20}{243}$ ④ $\frac{8}{81}$ ⑤ $\frac{28}{243}$

$\angle OBP = \angle OPB = \theta$ …㉠, $\angle BAP = \frac{\pi}{2} - \theta$

$\overset{\frown}{AQ} : \overset{\frown}{PQ} = 2:1$ 이므로 원주각의 성질에 의하여

$\angle OBQ : \angle PBQ = 2:1$, ㉠에 의하여 $\angle OBQ = \frac{2}{3}\theta$, $\angle PBQ = \frac{\theta}{3}$

$\angle OQB = \angle OBQ = \frac{2}{3}\theta$,

$\angle POQ = 2\angle PBQ = \frac{2}{3}\theta$, $\angle AOQ = 2\angle OBQ = \frac{4}{3}\theta$

$\angle ORA = \pi - (\frac{\pi}{2} - \theta) - \frac{4}{3}\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{3}$, $\angle BSP = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{3}$ $(\because \angle APB = \frac{\pi}{2})$

…㉡

$\triangle ORA$ 에서 사인법칙에 의하여

$\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{3})} = \frac{\overline{OR}}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}$, $\overline{OR} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{3})} = \frac{\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{3}}$, $\therefore \overline{QR} = 1 - \frac{\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{3}}$

㉡에 의하여 $\triangle QRS$는 $\overline{QR} = \overline{QS}$인 이등변삼각형이므로 $\overline{QS} = 1 - \frac{\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{3}}$

$f(\theta) = \frac{1}{2}\times\overline{QR}\times\overline{QS}\times\sin(\angle RQS) = \frac{1}{2}\times\left(1 - \frac{\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{3}}\right)^2\times\sin\frac{2}{3}\theta$

$\lim_{\theta\to 0+} \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\theta\left(1 - \frac{\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{3}}\right)^2}{\theta^5} = \lim_{\theta\to 0+} \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\theta\left(\cos\frac{\theta}{3} - \cos\theta\right)^2}{\theta^5\times\cos^2\frac{\theta}{3}} = \lim_{\theta\to 0+} \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\theta\left\{1-\cos\theta - (1-\cos\frac{\theta}{3})\right\}^2}{\theta^5\times\cos^2\frac{\theta}{3}}$

$= \lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{3}}\times\frac{\sin\frac{2}{3}\theta}{\theta}\times\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2} - \frac{1-\cos\frac{\theta}{3}}{\theta^2}\right)^2\right\} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{18}\right)^2$

$= \frac{1}{3}\times\frac{16}{81} = \frac{16}{243}$

단답형

29. 상수 a와 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $x^2+ax+9=te^{-x}$의 서로 다른 실근의 개수를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 양수 α의 값이 존재한다.
>
> (나) 함수 $f(t)g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(e)<0$일 때, $g(6e)=ke^2$이다. 실수 k의 값을 구하시오.
(단, $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x=0$) [4점]

$f(t)$가 불연속일 때, $g(t)=0$ 이어야 하고

함수 $g(t)$는 이차함수이므로 $f(t)$는 최대 두 점에서 불연속이다. …㉠

$x^2+ax+9=te^{-x} \Rightarrow e^x(x^2+ax+9)=t$

t가 함수 $e^x(x^2+ax+9)$의 극댓값 or 극솟값 or 점근선의 y좌표일 때 불연속일 수 있다.

$h(x)=e^x(x^2+ax+9)$라 하면 $h'(x)=e^x\{x^2+(a+2)x+a+9\}$ 이고

$x\to-\infty$일 때 $h(x)\to0$ 이므로 점근선의 y좌표는 0이다. …㉡

그런데 $\alpha>0$ 이므로 $h(p)=\alpha$ 이고 $h'(p)=0$인 실수 p가 존재하고

$e^p(p^2+ap+9)=\alpha$, $p^2+(a+2)p+a+9=0$ 이다. …㉢

이때, 방정식 $x^2+(a+2)x+a+9=0$가 중근을 가지면 $h(x)$는 $x=p$에서 극값을 가지지 않으므로 $x^2+(a+2)x+a+9=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다. 이 두 근 중 p가 아닌 값을 q라 하자. $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $h(p)\neq h(q)$ 이다.

그런데 $h(q)\neq0$ 이면 ㉠에 모순이므로 $h(q)=0$ 이다.

따라서 $e^q(q^2+aq+9)=0$, $q^2+(a+2)q+a+9=0$ 이다.

곧 $q^2+aq+9=q^2+(a+2)q+a+9=0$ 에서 $a=-2q$이다.

$q^2-2q^2+9=-q^2+9=0$ 에서 $\begin{cases}q=-3\\a=6\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}q=3\\a=-6\end{cases}$ 이다.

(가), ㉡에 의하여 $f(t)$는 $t=0$, $t=\alpha$에서 불연속이고 $g(t)=t(t-\alpha)$이다.

$g(e)=e(e-\alpha)<0$ 에서 $e<\alpha$ 이다. …㉣

(i) $a=6$인 경우

㉢에 의하여 $p^2+8p+15=0$, $p=-3$ 또는 $p=-5$ 이다.

(X) $p=-3$ 이면 $\alpha=e^{-3}(9-18+9)=0$ 이므로 $\alpha>0$에 모순

(X) $p=-5$ 이면 $\alpha=e^{-5}(25-30+9)=4e^{-5}<e$ 이므로 ㉣에 모순

($\because$ $e>2 \Rightarrow e^6>4 \Rightarrow 4e^{-5}<e$)

(ii) $a=-6$인 경우

㉢에 의하여 $p^2-4p+3=0$, $p=1$ 또는 $p=3$ 이다.

(O) $p=1$ 이면 $\alpha=e(1-6+9)=4e$

(X) $p=3$ 이면 $\alpha=e^3(9-18+9)=0$ 이므로 $\alpha>0$에 모순

$\therefore$ $g(t)=t(t-4e)$, $g(6e)=6e\times2e=12e^2$ $\quad k=12$

30. 양수 t에 대하여 직선 $y=tx+k$가 함수 $f(x)=2\ln x-\dfrac{4}{x}$의 그래프에 접할 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 양의 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $g''(t)$를 갖고, $g''(t)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$\displaystyle\int_2^6 g(t)g''(t)\,dt=a+b\ln2$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, a, b는 유리수이고, $\ln2$는 무리수이다.) [4점]

$f'(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}$ $\quad f(1)=-4$, $f(2)=2\ln2-2$, $f'(1)=6$, $f'(2)=2$

$$\int_2^6 g(t)g''(t)\,dt=\Big[g(t)g'(t)\Big]_{f'(2)}^{f'(1)}-\int_{f'(2)}^{f'(1)}\{g'(t)\}^2\,dt$$

접점의 좌표를 $h(t)$라 하자.

함숫값 같음 : $t\,h(t)+g(t)=f(h(t))$

미분계수 같음 : $t=f'(h(t))$ …㉠ $\Rightarrow 1=h'(t)f''(h(t))$ …㉡

$T=\{t\mid t>0\}$라 할 때 $f'(t)=\dfrac{2}{t}+\dfrac{4}{t^2}$ $(t>0)$는 $T\to T$ 일대일 대응 $\therefore (f')^{-1}(t)=h(t)$

$\Rightarrow h(f'(t))=t$ …㉢

$g(t)=f(h(t))-t\,h(t)\overset{(\because ㉠)}{=}f(h(t))-h(t)f'(h(t))$

t 대신 $f'(t)$ 대입 : $g(f'(t))=f(h(f'(t)))-f'(t)h(f'(t))$

$\overset{(\because ㉢)}{=}f(t)-tf'(t)$ …㉣

미분

$g'(t)=h'(t)f'(h(t))-h'(t)f'(h(t))-h'(t)h(t)f''(h(t))$

$=-h'(t)h(t)f''(h(t))=-h'(t)$ $(\because ㉡)$

$f'(h(t))=f'(-g'(t))=t \Rightarrow g'(t)=-(f')^{-1}(t)$

$\Rightarrow g'(f'(x))=-(f')^{-1}(f(x))=-x$ …㉤

$\Big[g(t)g'(t)\Big]_{f'(2)}^{f'(1)}=g(f'(1))g'(f'(1))-g(f'(2))g'(f'(2))$

$\overset{(\because ㉣, ㉤)}{=}-\{f(1)-f'(1)\}+2\{f(2)-2f'(2)\}$

$=10+(4\ln2-12)=4\ln2-2$

$\displaystyle\int_{f'(2)}^{f'(1)}\{g'(t)\}^2\,dt=\int_2^1 f''(u)\{g'(f'(u))\}^2\,du$ $\left(\begin{matrix}f'(u)=t,\ f''(u)\dfrac{du}{dt}=1\\ t=f'(2),\ f'(1)\text{일 때 각각 } u=2,\ 1\end{matrix}\right)$

$\overset{(\because ㉤)}{=}\displaystyle\int_2^1 u^2f''(u)\,du=\int_2^1 u^2\left(-\frac{2}{u^2}-\frac{8}{u^3}\right)du$

$=\displaystyle\int_2^1\left(-2-\frac{8}{u}\right)du=\Big[-2u-8\ln|u|\Big]_2^1$

$=-2-(-4-8\ln2)$

$=8\ln2+2$

$\therefore \displaystyle\int_2^6 g(t)g''(t)\,dt=(4\ln2-2)-(8\ln2+2)=-4\ln2-4$

$a=-4$, $b=-4$ $\quad\therefore a^2+b^2=16+16=32$

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{4}=1$ 의 두 초점을 F, F′이라 하자. 이 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 $|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=4$일 때, 양수 a의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$|\overline{PF}-\overline{PF'}| = 2\sqrt{a} = 4$

$\sqrt{a} = 2$, $a=4$.

24. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 $|\vec{a}|=6$, $7\vec{a}-2\vec{b}=4(\vec{a}-\vec{b})$를 만족시킬 때, $|\vec{a}+\vec{b}|$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$7\vec{a}-2\vec{b}=4\vec{a}-4\vec{b}$

$3\vec{a}=-2\vec{b}$

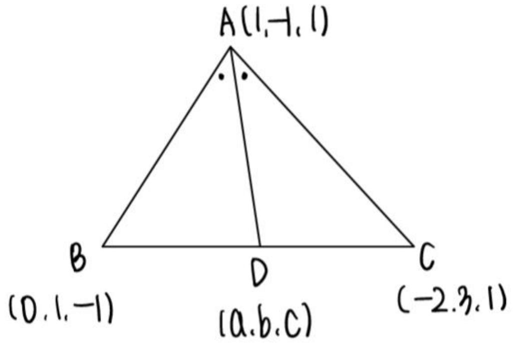
$\therefore \vec{b}=-\frac{3}{2}\vec{a}$

$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{a}|$

$=|-\frac{1}{2}\vec{a}|=\frac{1}{2}|\vec{a}|=3$

25. 좌표공간의 세 점 $A(1,\ -1,\ 1)$, $B(0,\ 1,\ -1)$, $C(-2,\ 3,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. ∠BAC의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 점 D의 좌표는 $D(a,\ b,\ c)$이다. $a+2b+3c$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2



$\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$

$\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2+0^2}=5$ 이므로

점 D는 선분 BC의 3:5 내분점이다.

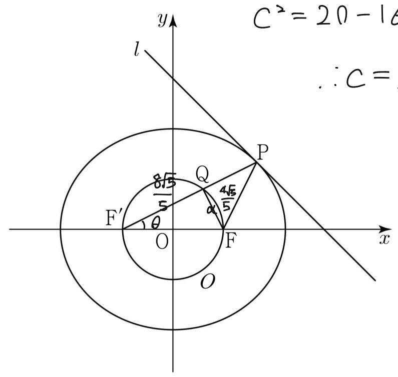
$D\left(\frac{-6+0}{8},\ \frac{9+5}{8},\ \frac{3-5}{8}\right)$

$\Rightarrow D\left(-\frac{3}{4},\ \frac{7}{4},\ -\frac{1}{4}\right)$

$a=-\frac{3}{4},\ b=\frac{7}{4},\ c=-\frac{1}{4}$ 이고,

$a+2b+3c=-\frac{3}{4}+\frac{14}{4}-\frac{3}{4}=2$

26. 그림과 같이 두 점 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$과 원점을 중심으로 하고 점 F를 지나는 원 O가 있다. 기울기가 -1인 직선 l과 타원이 제1사분면에서 접하는 점을 P라 하고, 선분 F′P가 원과 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 PQF의 둘레의 길이는? [3점]



$c^2=20-16=4$

$\therefore c=2.$

① $\frac{16\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{17\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{18\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{19\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

기울기가 −1인 접선의 방정식은

$y=-x\pm\sqrt{20\times(-1)^2+16}$

$\Rightarrow y=-x\pm 6$ 이고, 타원과 제 1사분면에서 만나므로

$l:\ y=-x+6$ 이다.

$\frac{x^2}{20}+\frac{(-x+6)^2}{16}=1,\quad 4x^2+5(-x+6)^2=80$

$9x^2-60x+100=0,\quad (3x-10)^2=0$

$\therefore x=\frac{10}{3},\ y=6-\frac{10}{3}=\frac{8}{3} \Rightarrow P\left(\frac{10}{3},\ \frac{8}{3}\right)$

두 점 P, F′을 이은 직선의 기울기는 $\frac{\frac{8}{3}-0}{\frac{10}{3}-(-2)}=\frac{1}{2}$ 이고,

$\angle QF'F=\theta$ 라 하면 $\tan\theta=\frac{1}{2}$ 이다.

$\overline{QF}=\alpha$라 하면 $\overline{QF'}=2\alpha$ 이고, $\triangle QF'F$는 직각삼각형이므로

$\alpha^2+4\alpha^2=4^2 \quad \therefore \alpha=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

$\triangle PQF$의 둘레 $=\overline{PQ}+\overline{QF}+\overline{FP}$

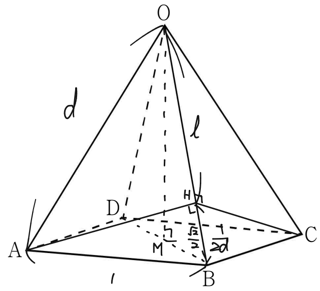
$=(\overline{PF'}-\overline{QF'})+\overline{QF}+\overline{FP}$

$=(\overline{PF'}+\overline{FP})+\overline{QF}-\overline{QF'}$

$=2\sqrt{20}-\alpha$

$=4\sqrt{5}-\frac{4}{5}\sqrt{5}=\frac{16}{5}\sqrt{5}.$

27. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD를 밑면으로 하는 정사각뿔 O−ABCD가 있다. 두 평면 OAB, OBC가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta=\frac{1}{4}$이다. 삼각형 OAD의 평면 OBC 위로의 정사영의 넓이는? [3점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

정사각뿔의 정의에 의하여 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$ 이다. 이때 $\overline{OA}=d$ 라 하자
점 O에서 □ABCD 위로 내린 수선의 발을 M이라 하자. 이때 $\overline{OM}=h$ 라 하면
M는 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$ 의 교점이고, △BOM 에서 $d^2=\frac{1}{2}+h^2$ 이다.
두 점 A, C 에서 $\overline{OB}$ 에 내린 수선의 발은 일치하고, 이를 H라 하자.

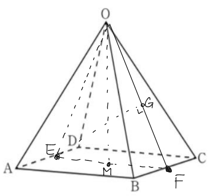
$\overline{OH}=\ell$이면 $\overline{HB}=d-\ell$이고 $\cos\angle AOH=\frac{\ell}{d}$ 이며,
△AOB에서 코사인법칙에 의해 $\cos\angle AOB=\frac{2d^2-1}{2d^2}=\frac{\ell}{d}$ 이다.
$\therefore \ell=d-\frac{1}{2d}$

이때 △ABH에서 피타고라스 정리에 의해
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4d^2}}$

$\overline{CH}=\overline{AH}<1$, $\overline{AC}=\sqrt{2}$ 이므로 두 평면 OAB와 OBC 가 이루는 각은 ∠AHC 이다. △AHC에서 코사인법칙에 의해

$$\cos\angle AHC=\frac{\overline{AH}^2+\overline{CH}^2-\overline{AC}^2}{2\overline{AH}\times\overline{CH}}=\frac{-\frac{1}{2d^2}}{2-\frac{1}{2d^2}}=-\frac{1}{4d^2-1}$$

이때 $\overline{AH}^2+\overline{CH}^2<\overline{AC}^2$ 이므로 ∠AHC는 둔각이다.
즉 $\frac{1}{4}=\cos(\pi-\angle AHC)=-\cos\angle AHC=\frac{1}{4d^2-1}$
따라서 $d^2=\frac{5}{4}$, $d=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$



이때 $\overline{AD}$의 중점을 E, $\overline{BC}$의 중점을 F라 하면
$\overline{EF}=\overline{AB}=1$
삼각형 OEM에서 피타고라스 정리에 의해
$\overline{OE}^2=\overline{EM}^2+\overline{MO}^2=\frac{1}{4}+h^2=1$, $\overline{OE}=1=\overline{OF}$.
따라서 △OEF는 정삼각형이고, $\angle EOF=\frac{\pi}{3}$

이때 $\overline{OF}$의 중점을 G라 하면 $\angle EFB=\angle GFB=\frac{\pi}{2}$ 이며 $\overline{EG}\perp\overline{OF}$ 이므로
점 G는 점 E의 평면 BOC 위로의 정사영이고, ∠EOG가 평면 AOD와 평면 BOC 사이의 이면각이다. 따라서 정사영의 넓이는

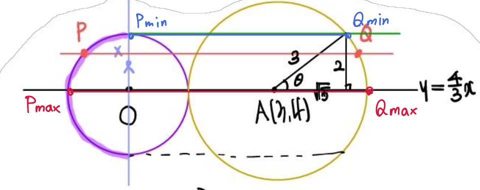
$$\triangle AOD\times\cos\angle EOF=\left(\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{EO}\right)\times\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

28. 좌표평면에서 점 A(3, 4)에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

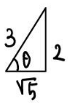
> (가) $|\overrightarrow{OP}|=2$, $|\overrightarrow{AQ}|=3$
> (나) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\le 0$이고, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AQ}\ge 5\sqrt{5}$이다.
> (다) $|\overrightarrow{OX}|\le 2$인 점 X에 대하여
> $(\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{PQ})^2=0$이다.

$|\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{PQ}|^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $131+10\sqrt{5}$ ② $132+10\sqrt{5}$ ③ $133+10\sqrt{5}$
④ $134+10\sqrt{5}$ ⑤ $135+10\sqrt{5}$



조건 (나)에서 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\le 0$ 이므로
점 P는 ── 부분 위에 있다.
또한, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{AQ}|\cos\theta$
$=5\times3\times\cos\theta\ge5\sqrt{5}$ 이므로



$\cos\theta\ge\frac{\sqrt{5}}{3}$ 이고, 점 Q는 ── 부분 위에 있다.

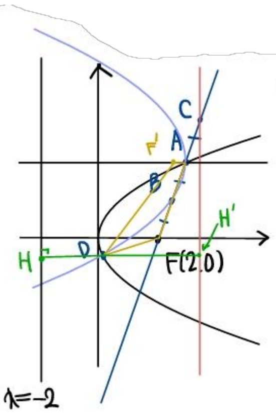
조건 (다)에서 $|\overrightarrow{OX}|\le2$ 이므로 점 X는 보라색 원의 내부 혹은 테두리에 있고,
$(\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{PQ})^2=0$ 이므로
$\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$ 이다.
즉, $\overrightarrow{OX}\perp\overrightarrow{OA}$ 이고, $\overrightarrow{OX}\perp\overrightarrow{PQ}$ 이다.
$\therefore |\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{OX}|^2+|\overrightarrow{PQ}|^2$

이때 $|\overrightarrow{OX}|\le2$ 이므로 $0\le|\overrightarrow{OX}|^2\le4$.
$|\overrightarrow{PQ}|$가 최대일 때는 $|\overrightarrow{PQ}|=4+6=10$ 이고
$|\overrightarrow{PQ}|$가 최소일 때는 $|\overrightarrow{PQ}|=5+\sqrt{5}$ 이다.
즉, $(5+\sqrt{5})^2=30+10\sqrt{5}\le|\overrightarrow{PQ}|^2\le100$ 이다.

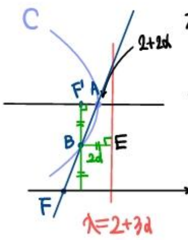
$\therefore 30+10\sqrt{5}\le|\overrightarrow{OX}|^2+|\overrightarrow{PQ}|^2\le104$ 이므로
$M=104$, $m=30+10\sqrt{5}$
$M+m=134+10\sqrt{5}$

단답형

29. 포물선 $y^2=8x$의 초점 F를 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 포물선과 제 1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 선분 AF의 중점과 선분 AF를 1 : 3으로 외분하는 점을 각각 B, C라 하자. 점 C를 지나고 x축에 수직인 직선을 준선으로 하고 점 A를 꼭짓점으로 하는 포물선 C가 점 B를 지난다. 포물선 C의 초점을 F′이라 하고, 두 곡선 C, $y^2=8x$가 만나는 점을 D라 하자. 사각형 FAF′D의 둘레의 길이가 $a+b\sqrt{5}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

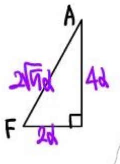


문제 상황은 위의 그림과 같다.
점 B의 x좌표를 $2+d$라 하면
점 A의 x좌표는 $2+2d$,
점 C의 x좌표는 $2+3d$이다.
이때 포물선 C의 꼭짓점의 x좌표가 $2+2d$, 준선이 $x=2+3d$ 이므로
초점의 x좌표는 $2+d$ 이다.



점 B에서 준선에 내린 수선의 발을 E라 하면,
포물선의 성질에 의해 $\overline{F'B}=\overline{BE}=2d$이고,
점 B가 $\overline{AF}$의 중점이므로
점 A의 좌표를 $(2+2d, 4d)$로 쓸 수 있다.

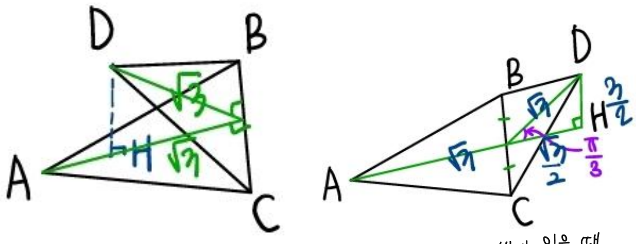
점 A가 $y^2=8x$를 지나므로 $(4d)^2=8(2+2d)$,
$d^2-d-1=0 \quad \therefore d=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \ (\because d>0)$
사각형 FAF′D의 둘레의 길이는 $\overline{FA}+\overline{AF'}+\overline{F'D}+\overline{DF}$ 이다.
점 D에서 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H, $x=2+3d$에 내린 수선의 발을 H′라 하면, 포물선의 성질에 의해 $\overline{DF}=\overline{DH}$,
$\overline{F'D}=\overline{DH'}$ 이다. $\therefore \overline{F'D}+\overline{DF}=\overline{HH'}=2+3d-(-2)=4+3d$
$\overline{F'A}=d$ 이고 $\overline{AF}=\sqrt{(2d)^2+(4d)^2}=2\sqrt{5}d$



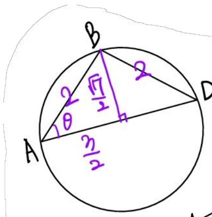
$(\text{둘레의 길이})=4+3d+d+2\sqrt{5}d$
$=4+(4+2\sqrt{5})d$
$=4+2(2+\sqrt{5})\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$=4+7+3\sqrt{5}$
$=11+3\sqrt{5} \qquad \therefore 14$

30. 좌표공간의 네 점 A, B, C, D를 지나는 구 S가 있다. 두 삼각형 ABC와 BCD는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고, 두 평면 ABC와 BCD가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다. 점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발 H에 대하여 $\overline{\mathrm{AH}} \geq \sqrt{3}$일 때, 구 S와 평면 ABD가 만나서 생기는 원의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{21}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

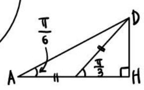
$\overline{AH} \geq \sqrt{3}$ 이므로 H는 $\triangle ABC$의 외부에 있어야 한다.



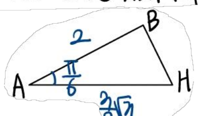
I) H가 $\triangle ABC$의 내부에 있을때 II) H가 $\triangle ABC$의 외부에 있을 때.
이때 II)에서 처럼 $\overline{AH}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\ (\geq\sqrt{3})$ 이다.



구 S와 평면 ABD가 만나서 생기는 원은 $\triangle ABD$의 외접원이다.



$\overline{AD}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=3$이고,
$\angle BAD=\theta$라 하면 $\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$이다. 외접원의 반지름을 R라 하면
$\frac{2}{\sin\theta}=2R$ 이므로 $R=\frac{4}{\sqrt{7}}$이고, 원의 넓이는 $\frac{16}{7}\pi$ 이다.
평면 ABC가 평면 ABD가 이루는 각을 θ'라 하면,
삼각형 ABD의 평면 ABC 위로의 정사영은 삼각형 ABH이고,
$\triangle ABD\cos\theta'=\triangle ABH$이다.



이때 $\triangle ABD=\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin\theta=\frac{3}{4}\sqrt{7}$ 이고
$\triangle ABH=\frac{1}{2}\times2\times\frac{3}{2}\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}\sqrt{3}$ 이므로
$\cos\theta'=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ 이다.
$\therefore$ $\triangle ABD$의 외접원의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는
$\frac{16}{7}\pi\times\cos\theta'=\frac{16}{7}\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{16}{49}\sqrt{21}\pi \qquad \therefore 16+49=65$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.