제 2 교시

일간 우주설 프로젝트 4일차

수학 영역

홀수형

성명	

수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

매개변수의 활용

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

우주설

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

시작 전 사고정리

시작하기 전 각 문항을 풀어본 뒤 자신의 풀이를 정리하자.
1번 문항은 개념을 점검하기 위한 문항이다.

1. 함수 $y=f(x)$위의 점 (x, y)를 매개변수 t와 이계도 함수가 존재하는 함수 $g(t)$로 나타내면

$$x=g(t), \qquad y=g'(t) \text{ (단, } t \le 1\text{)}$$

이다. $\ln g(x)=\dfrac{x}{e^x+1}$이고, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-a}{x-a}=b$ 일 때, $g(k)=a$를 만족시키는 상수 k에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (우주설 자작문항, 제한시간 10분)

<보 기>

ㄱ. $e^k+1=-k$

ㄴ. $f(a)=\dfrac{1}{e}$

ㄷ. $b=-\dfrac{1}{k}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 좌표평면 위의 원점을 중심으로 하고 반지름이 1 인 원이 있다. 이 원이 곡선 $y=\dfrac{1}{2}x^2+1$과 접하면서 이동한다. 이때, 원의 중심의 자취를 곡선 $y=f(x)$라고 하자. 기울기가 1이면서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 방정식은 $y=x+k$이다. $\left(k-\dfrac{1}{2}\right)^2$의 값을 구하시오. (2018 중앙대학교 논술기출, 제한시간 8분)

3. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 좌표는 $(t, -3)$ 이다. 곡선 $y=\frac{\sin x}{x^2+1}$ 위의 점 $\mathrm{Q}(x, y)$는 점 P 와 거리를 5 로 유지하며 연속적으로 움직인다. $t=4$일 때 Q의 좌표가 $(0,0)$ 이다. $t=\pi+4$일 때, 점 Q 의 속도의 크기는 $\frac{\sqrt{4\pi^2+32\pi^2+k}}{4\pi^2+7}$ 이다. 자연수 k의 값을 구하시오.
(2018 중앙대학교 논술기출, 제한시간 9분)

일반적 사고과정

함수 $y=f(x)$위의 점 (x, y)를 매개변수 t와 이계도 함수가 존재하는 함수 $g(t)$로 나타내면

$x=g(t),\quad y=g'(t)_{(1)}$ (단, $t \le 1$)

이다. $\ln g(x)=\dfrac{x}{e^x+1}{}_{(2)}$이고, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b_{(3)}$ 일 때, $g(k)=a$를 만족시키는 상수 $k_{(4)}$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (우주설 자작문항, 제한시간 10분)

<보 기>

ㄱ. $e^k+1=-k_{(5)}$

ㄴ. $f(a)=\dfrac{1}{e}{}_{(6)}$

ㄷ. $b=-\dfrac{1}{k}{}_{(7)}$

(1),(2): 당장 할 수 있는 것이 없네...

문제 풀이 과정 중에 $g''(t)$가 등장한다는 것 정도.

그렇구나. 정도로 생각하고 우선 넘어가자.

(3): 극한값이 존재하기 위해서는 $f(a)=a$이고

$f'(a)=b$라고 할 수 있겠네. 그러면 이 a, b에 대해 조사하자.

$f(a)=a$ $\Rightarrow$ x좌표와 y좌표가 동시에 a가 되는 순간이 있다.

$\Rightarrow$ $g(t)=g'(t)=a$를 만족시키는 t값이 있다.

$\Rightarrow$ 그런데 이것을 만족시키는 t값을 어떻게 찾지?...

(4): $t=k$일 때, $g(t)=a$라고 알려줬네.

그렇다면 $t=k$인 순간은 $x=a$인 순간과 같은 말이고

$g(k)=g'(k)=a$이구나.

또한 $f'(a)$가 $x=a$인 순간 $\dfrac{dy}{dx}$라는 뜻이니 이것은

$t=k$인 순간 $\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$와 같은 말이네. $\dfrac{g''(k)}{g'(k)}=b$

(5): 아직 사용하지 않은 식인 $\ln g(x)=\dfrac{x}{e^x+1}$를 미분하면

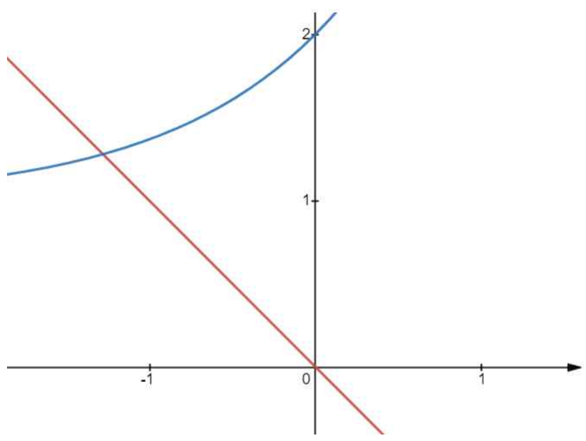
$\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{(1-x)e^x+1}{(e^x+1)^2}$인데 $g(k)=g'(k)=a$를 만족시키는 k는

$\dfrac{g'(x)}{g(x)}=1$을 만족시키는 x값 중에 있을 것!

$\dfrac{(1-x)e^x+1}{(e^x+1)^2}=1 \Rightarrow e^x+1=-x$

방정식 $e^x+1=-x$의 실근을 조사하기 위해

곡선 $y=e^x+1$과 직선 $y=-x$를 그어보자.



방정식의 실근은 -2와 -1사이에 1개만 존재한다.

그렇다면 방정식 $e^x+1=-x$의 실근이 $x=k$가 된다.

(ㄱ은 참이다.)

(뒷장에 계속)

일반적 사고과정

함수 $y=f(x)$위의 점 (x,y)를 매개변수 t와 이계도 함수가 존재하는 함수 $g(t)$로 나타내면

$$x=g(t),\quad y=g'(t)_{(1)} \quad (\text{단, } t\le 1)$$

이다. $\ln g(x)=\dfrac{x}{e^x+1}{}_{(2)}$이고, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-a}{x-a}=b_{(3)}$ 일 때, $g(k)=a$를 만족시키는 상수 $k_{(4)}$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (우주설 자작문항, 제한시간 10분)

<보 기>

ㄱ. $e^k+1=-k_{(5)}$

ㄴ. $f(a)=\dfrac{1}{e}{}_{(6)}$

ㄷ. $b=-\dfrac{1}{k}{}_{(7)}$

(6): $f(a)=a$이므로, $a=\dfrac{1}{e}$인지 물어보는 것인데

x좌표 a는 $t=k$일 때, 갖는 값이므로 $g(k)$와 같네.

$\ln g(x)=\dfrac{x}{e^x+1}$에 $x=k$를 대입하면

$\ln a=\dfrac{k}{e^k+1}$, ㄱ에서 $e^k+1=-k$이므로

$\ln a=-1,\ a=\dfrac{1}{e}$이 성립! (ㄴ은 참이다.)

(7): 매개변수 미분법이 출제의도 일 테니

$\dfrac{g''(k)}{g'(k)}=b$으로 구하는 거겠지...

$\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{(1-x)e^x+1}{(e^x+1)^2}$에서 양변을 한번 더 미분하면

$g''(x)$가 나오긴 하겠지만 계산에 파묻히겠네. 좀 더 고민하자.

제시하는 사고과정

$\dfrac{g''(k)}{g'(k)}$는 $\dfrac{g''(x)}{g'(x)}$에 $x=k$를 대입한 것...

$\dfrac{g''(x)}{g'(x)}$의 식 만 딱 구할 수 있으면 좋을 텐데...

아! $\ln g'(x)$를 미분한 식이구나.

$\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{(1-x)e^x+1}{(e^x+1)^2}$에서 양변에 ln을 취하자.

$\ln g'(x)-\ln g(x)=\ln\{(1-x)e^x+1\}-2\ln(e^x+1)$, 양변을 미분하면

$\dfrac{g''(x)}{g'(x)}-\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{-xe^x}{(1-x)e^x+1}-2\times\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x=k$를 대입하면

$b-1=\dfrac{-ke^k}{(1-k)e^k+1}-\dfrac{2e^k}{e^k+1}$, $e^k=-k-1$를 통해 정리하자.

$b-1=\dfrac{-k(-k-1)}{(1-k)(-k-1)+1}-\dfrac{2(-k-1)}{(-k-1)+1}$

$\Rightarrow b-1=\dfrac{k^2+k}{k^2}+\dfrac{2k+2}{-k}$

$\Rightarrow b=-\dfrac{1}{k}$

(ㄷ은 참이다.)

따라서 답은 5번

일반적 사고과정

좌표평면 위의 원점을 중심으로 하고 반지름이 1인 원이 있다. 이 원이 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2+1$과 접하면서 이동한다. 이때, 원의 중심의 자취를 곡선 $y=f(x)$라고 하자.(1) 기울기가 1이면서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 방정식은 $y=x+k$이다.(2) $\left(k-\frac{1}{2}\right)^2$의 값을 구하시오. (2018 중앙대 논술기출, 제한시간 8분)

(1): 중심의 좌표를 $P(x, y)$라 하고 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2+1$과 접하는 접점을 $Q\left(t, \frac{1}{2}t^2+1\right)$이라 하면,

P에서의 접선과 직선 PQ의 기울기의 곱이 -1이고

선분 PQ의 길이가 1일 것이다.

$$t\times\frac{\left(y-\frac{t^2}{2}-1\right)}{(x-t)}=-1,\quad (x-t)^2+\left(y-\frac{t^2}{2}-1\right)^2=1$$

연립하면 $t\times\frac{\left(y-\frac{t^2}{2}-1\right)}{(x-t)}=-1$

$$\Rightarrow \frac{\left(y-\frac{t^2}{2}-1\right)^2}{(x-t)^2}=\frac{1}{t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1-(x-t)^2}{(x-t)^2}=\frac{1}{t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-t)^2}=\frac{t^2+1}{t^2}$$

$$\Rightarrow (x-t)^2=\frac{t^2}{t^2+1}$$

$\Rightarrow x=t+\frac{t^2}{t^2+1}$ ($t>0$일 때 그림을 보면 $x\neq t+\frac{t^2}{t^2+1}$)

정리하면, $x=t+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, $y=\frac{1}{2}t^2+1-\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$

(2): $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=t$

$t=1$일때, $x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\frac{3-\sqrt{2}}{2}$이므로

구하고자하는 직선은 $y=x+\frac{1}{2}-\sqrt{2}$이다.

답: 2

일반적 사고과정

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 좌표는 $(t, -3)$ 이다. 곡선 $y=\frac{\sin x}{x^2+1}$ 위의 점 $Q(x, y)$는 점 P 와 거리를 5 로 유지하며 연속적으로 움직인다.(1) $t=4$일 때 Q의 좌표가 $(0,0)$ 이다.(2) $t=\pi+4$일 때, 점 Q 의 속도의 크기는 $\frac{\sqrt{4\pi^2+32\pi^2+k}}{4\pi^2+7}$이다.(3) 자연수 k의 값을 구하시오.

(2018 중앙대학교 논술기출, 제한시간 9분)

(1): $(x-t)^2+(y+3)^2=25$이다.

(2): $t=4$를 대입하면 $x=y=0$이다.

(3): $t=\pi+4$일 때 $\Rightarrow$ $x=\pi, y=0$일 때

Q의 속도의 크기: $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ 에 $t=\pi+4$대입이군.

$\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$를 각각 구해볼까...

$(x-t)^2+(y+3)^2=25$에서 양변을 t로 미분하면

$2(x-t)\left(\frac{dx}{dt}-1\right)+2(y+3)\frac{dy}{dt}=0$

$t=\pi+4$, $x=\pi$, $y=0$를 대입해보면,

$-8\frac{dx}{dt}+8+6\frac{dy}{dt}=0$

$\Rightarrow 4\frac{dx}{dt}-3\frac{dy}{dt}=4$

이다.

$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$로 이루어진 관계식이 하나만 더 있으면 되겠는데...

$y=\frac{\sin x}{x^2+1}$를 이용해보자.

양변을 t에 대하여 미분하면

$\frac{dy}{dt}=\left\{\frac{(x^2+1)\cos x-2x\sin x}{(x^2+1)^2}\right\}\frac{dx}{dt}$

$x=\pi$, $y=0$를 대입해보면,

$\frac{dy}{dt}=\frac{-1}{(\pi^2+1)}\frac{dx}{dt}$를 얻는다. 기존의 $4\frac{dx}{dt}-3\frac{dy}{dt}=4$와 연립하면

$\frac{dx}{dt}=\frac{4\pi^2+4}{4\pi^2+7}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{4}{4\pi^2+7}$

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\frac{\sqrt{4\pi^2+32\pi^2+32}}{4\pi^2+7}$

답: 32

4일차 예습과제

정답을 내지 못하여도 상관없으니 도전하여 봅시다.

1. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오.

[4점][2020학년도 수능 가30]

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.