48

2022학년도 9월 평가원(미적분) 30번

최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi \times f(x))}{x} = 0$
(나) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다.

함수 $g(x)$는 $0 \le x < 1$일 때 $g(x) = f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1) = g(x)$이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $\int_0^5 xg(x)dx = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 115

sol.) 현장풀이

가) $f(0)=n$, $f'(0)=0$, n은 정수

$\longrightarrow f(x) = 9x^2(x-1)+n$ ($\because g(x)$가 연속 $\longrightarrow f(0)=f(1)$)

$\longrightarrow$ 극대 $=n$, 극소 $= n-\frac{4}{3}$ ($f(\frac{2}{3})$: 극소)

$\therefore n(n-\frac{4}{3}) = 5 \longrightarrow n=3$ ($\because n$은 정수)

$\therefore f(x) = 9x^2(x-1)+3$

$$\int_n^{n+1} xg(x)dx = a_n \longrightarrow \int_0^5 xg(x)dx = \sum_{n=0}^{4} a_n$$

$$= \int_0^1 (x+n)g(x+n)dx$$

$$= \int_0^1 xg(x)dx + n\int_0^1 g(x)dx$$

$$\longrightarrow \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 9x^2(x-1)+3\,dx$$

$$= \frac{9}{4}$$

48

$$\int_0^1 xg(x)dx = \int_0^1 9x^3(x-1)+3x\,dx$$
$$= \frac{21}{20}$$

$$\therefore \sum_0^4 a_n = \frac{21}{20} + \frac{9}{4}\times 10$$
$$= \frac{111}{4}$$

$$\therefore p+q = 115$$

sol2)

$$\int_0^5 xg(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx + \int_1^2 x f(x-1)dx + \cdots + \int_4^5 xf(x-4)dx$$
$$= \int_0^1 (5x+10)f(x)dx$$

가) $f(0)=n$, $f'(0)=0$, n은 정수

$\longrightarrow f(x) = 9x^2(x-1)+n$ ($\because g(x)$가 연속 $\rightarrow f(0)=f(1)$)

$\longrightarrow$ 극대 $=n$, 극소 $= n-\frac{4}{3}$ ($f(\frac{2}{3})$: 극소)

$\therefore n(n-\frac{4}{3}) = 5 \longrightarrow n=3$ ($\because n$은 정수)

$$\therefore f(x) = 9x^2(x-1)+3$$
$$= 9x^3-9x^2+3$$

$$\therefore \int_0^1 (9x^3-9x^2+3)(5x+10)dx = \frac{111}{4}$$