43

2020학년도 수능(가형) 30번

양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오. [4점] 64

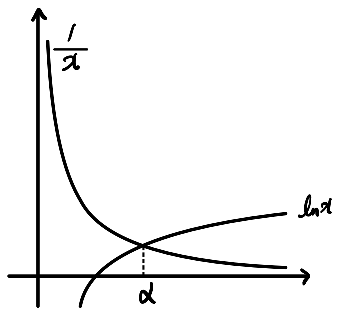
sol.)

$y=t^3\ln(x-t)$ 와 $y=2e^{x-a}$ 의 교점을 $x=k$라 하자.

$$\begin{cases} t^3\ln(k-t)=2e^{k-a} \\ \dfrac{t^3}{k-t}=2e^{k-a} \end{cases}$$

$\therefore \ln(k-t)=\dfrac{1}{k-t}$

$\longrightarrow \ln x=\dfrac{1}{x}$ 의 실근이 $x=k-t$



$k-t=\alpha$

$\therefore k=t+\alpha$

$2e^{k-a}=\dfrac{t^3}{k-t} \longrightarrow a=t-3\ln t+(\alpha+\ln 2\alpha)=f(t)$

$f'(t)=1-\dfrac{3}{t}$ ($\because$ α는 상수 $\longrightarrow$ $\alpha+\ln 2\alpha$ 도 상수)

$f'\left(\frac{1}{3}\right)=-8$

$\therefore \left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2=64$

43

2020학년도 수능(가형) 30번

sol₂)

$t^3\ln(k-t)=2e^{k-a}$

$3t^2\ln(k-t)-\dfrac{t^3}{k-t}=2e^{k-a}\cdot\left(-\dfrac{da}{dt}\right)$

$\dfrac{6}{t}e^{k-a}-e^{k-a}=2e^{k-a}\left(-\dfrac{da}{dt}\right)$

$\dfrac{da}{dt}=1-\dfrac{3}{t}\quad(\because e^{k-a}>0)$

$\dfrac{t^3}{k-t}=2e^{k-a}$

$\therefore f'(t)=1-\dfrac{3}{t}$

$f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=-8$

$\therefore \left\{f'\left(\dfrac{1}{3}\right)\right\}^2=64$