열린 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

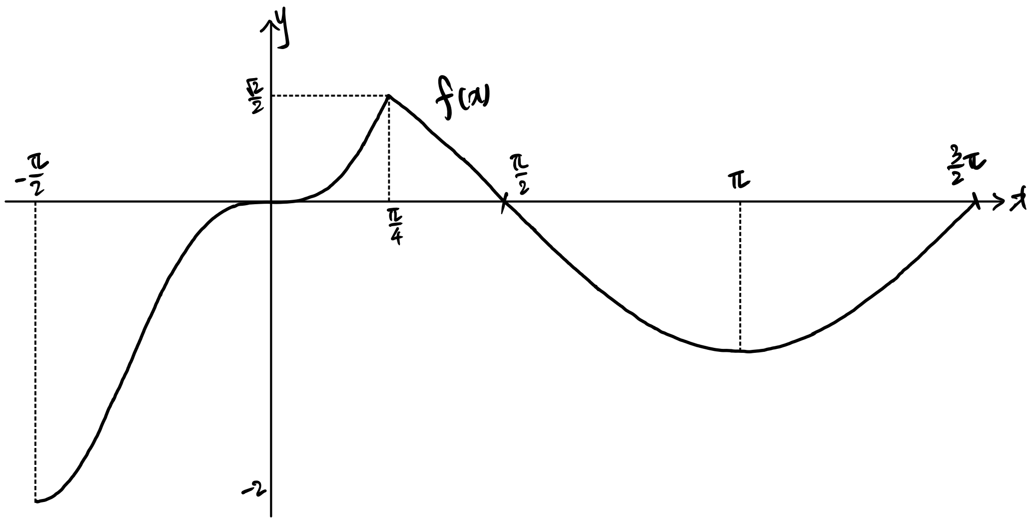
$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^3 x & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수를 $g(t)$라 하자.

(가) $-\frac{\pi}{2}<k<\frac{3\pi}{2}$
(나) 함수 $\sqrt{\lvert f(x)-t\rvert}$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(t)$에 대하여 합성함수 $(h\circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$가 있다. $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=a$, $g(0)=b$, $g(-1)=c$라 할 때, $h(a+5)-h(b+3)+c$의 값은? [4점]

① 96 ② 97 ③ 98
④ 99 ⑤ 100

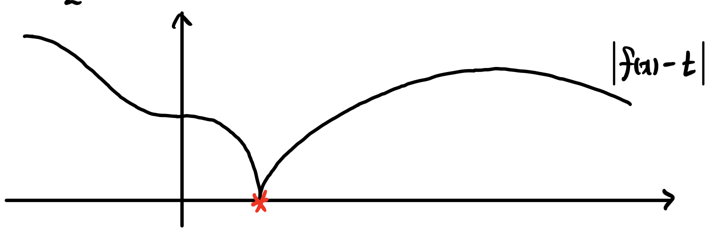


33

2019학년도 6월 평가원(가형) 21번

sol.1)

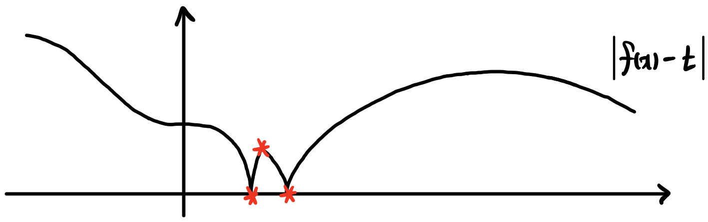
i) $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$



$\longrightarrow t \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$: 미불점 : $x=\frac{\pi}{4}$

$\therefore a=1$

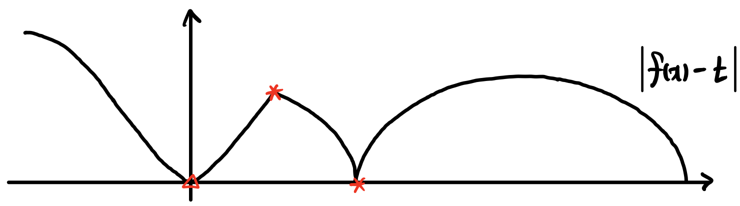
ii) $0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$



$\longrightarrow 0<t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$: 미불점 3개

$\therefore g=3$

iii) $t=0$



확실 : 2개, 의심점: $x=0$

$h(x)=\sqrt{|\sin^3 x|}$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{-\sin x\sqrt{-\sin x}}{x}=0$$

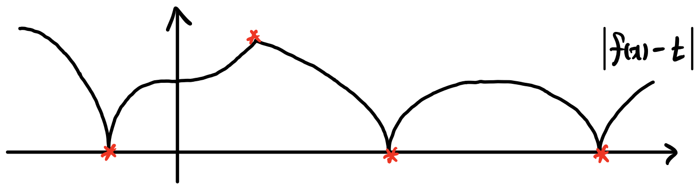
$$\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x\sqrt{\sin x}}{x}=0$$

$\longrightarrow x=0$ 에서 미가

→ 미불점 : 2개
$g=2$

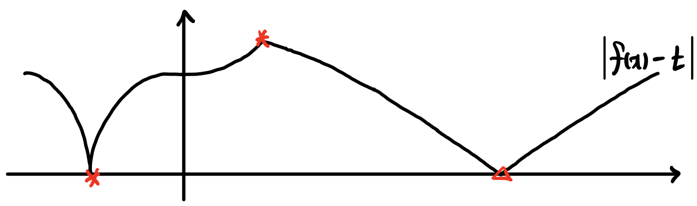
$\therefore b=2$

iv) $-1<t<0$



→ 미불점: 4개
$g=4$

v) $t=-1$



확실 : 2개, 의심점 : $x=\pi$

$j(x)=\sqrt{|\cos x+1|}$

$=\sqrt{\cos x+1}$ $(\cos x+1\geq 0)$

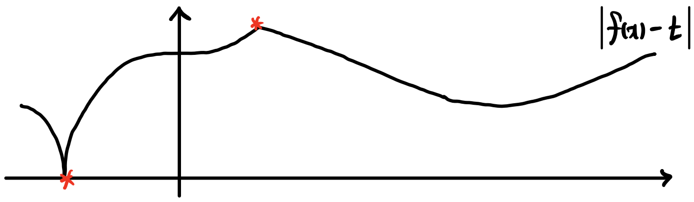
$$\lim_{x\to\pi-}\frac{j(x)-j(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi-}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}=\frac{\sin x}{(x-\pi)\sqrt{1-\cos x}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to\pi+}\frac{j(x)-j(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi+}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}=\frac{-\sin x}{(x-\pi)\sqrt{1-\cos x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

→ $x=\pi$ 에서 미불

→ $g=3$, $c=3$

vi) $-2 < t < -1$



$\longrightarrow g=2$

vii) $t \le -2$

$g=1$

$$\therefore g(t) = \begin{cases} t<-2 & 1 \\ t=-2 & 1 \\ -2<t<-1 & 2 \\ t=-1 & 3 \\ -1<t<0 & 4 \\ t=0 & 2 \\ 0<t<\frac{\sqrt{2}}{2} & 3 \\ t=\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ t>\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{cases}$$

$\therefore h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + C$

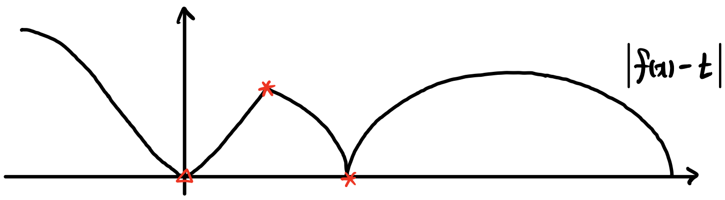
$\therefore h(6)-h(5)+3=99$

33

sol2) 반각공식 이용하기!

sol1 에서 iii), v)만 찾고 다시 풀이. (나머지는 동일)

iii) $t=0$



확실 : 2개, 의심점 : $x=0$

$f(x)=2\sin^3 x$ 인 곳에서

$f(-x)=-f(x)$

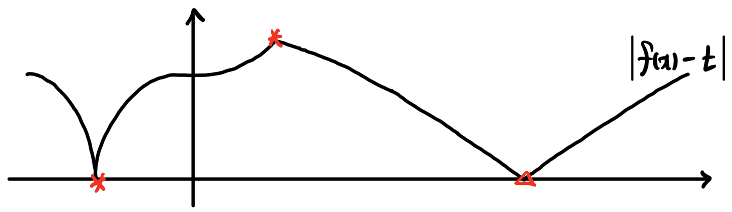
$|f(-x)|=|-f(x)|$

$=f(x)$

∴ 함수 $\sqrt{|f(x)|}$ 는 $x=0$ 에서 미·가.

$\longrightarrow g=2$

v) $t=-1$



확실 : 2개, 의심점 : $x=\pi$

$f(x)=\cos x$ 인 꼴에서

$\sqrt{|f(x)-t|}=\sqrt{|\cos x+1|}$

$\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{\cos(\pi+h)+1}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{1-\cos h}}{h}$

$1-\cos h=2\sin^2\frac{h}{2}$ ($\because$ 반각 공식)

$\therefore \lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{\cos(\pi+h)+1}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{2}\left|\sin\frac{h}{2}\right|}{h}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{\cos(\pi+h)+1}}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{2}\left|\sin\frac{h}{2}\right|}{h}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ 함수 $\sqrt{|f(x)+1|}$ 은 $x=\pi$ 에서 미불.

$\longrightarrow g=3$

* 반각공식 : 배각공식에 $\frac{\theta}{2}$ 대입해서 $\cos2\theta$ 배각공식 이용하면 증명 된다!

$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$

$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$

$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

33

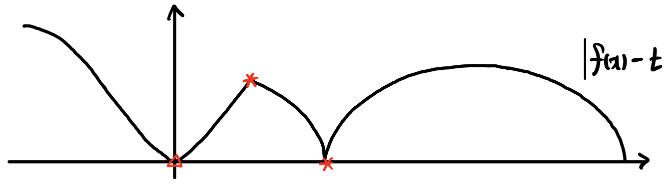
2019학년도 6월 평가원(가형) 21번

sol3) 테일러 급수

$\sqrt{|f(x)-t|} = \sqrt{x} \circ |f(x)-t|$

sol1 에서 iii), v)만 갖고 와서 풀이. (나머지는 동일)

iii) $t=0$



확실 : 2개, 의심점 : $x=0$

$\sqrt{x} \circ \sin^3 x$

$i(x) = \sin^3 x$

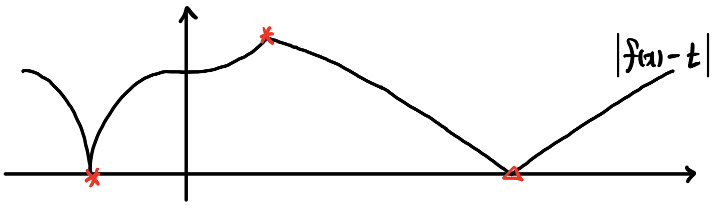
$i(0)=0,\ i'(0)=0,\ i''(0)=0,\ i^{(3)}(0)=6$

$\longrightarrow i(x) = x^3 + \sim$ 꼴 일거라 예측.

$\longrightarrow i(x)$는 $x=0$에서 미가.

$\longrightarrow g=2$

v) $t=-1$



확실 : 2개, 의심점 : $x=\pi$

$\sqrt{x} \circ (1+\cos x)$

33

2019학년도 6월 평가원(가형) 21번

$j(x) = 1 + \cos x$

$j(\pi) = 0$, $j''(\pi) = 1$: 이계도함수 $\neq 0$: 미분

$\longrightarrow j(x) = \frac{1}{2}(x-\pi)^2 + \sim$ 꼴

$\longrightarrow g = 3$

※ 테일러 전개

무한번 미분할 수 있는 함수에 대하여 그 함수를 다항식으로 근사하는 방법

예) e^x, $\sin x$, $\cos x$, ⋯

※ 테일러 급수

테일러 전개한 $f(x)$를 $x=a$ 에서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$\longrightarrow a=0$일 때, 알아두면 좋은 함수

$$e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$$

$$\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\tan x \cong x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$$