# 26



최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x) = \ln|f(x)|$$

라 하고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여

$$G(x) = \ln|g(x)\sin x|$$

라 하자.

$$\lim_{x \to 1}(x-1)F'(x) = 3, \quad \lim_{x \to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{1}{4}$$

일 때, $f(3)+g(3)$의 값은? [4점]

① 57　　② 55　　③ 53
④ 51　　⑤ 49

sol1)

$F(x) = \ln|f(x)|$

$F'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$\lim_{x \to 1} \dfrac{(x-1)f'(x)}{f(x)} = 3 \longrightarrow f(1) = 0$

$\therefore f(x) = (x-1)^n Q(x) \quad (1 \le n \le 4,\ Q(1) \ne 0)$

$f'(x) = n(x-1)^{n-1}Q(x) + (x-1)^n Q'(x)$

$\lim_{x \to 1} \dfrac{n(x-1)^n Q(x) + (x-1)^{n+1} Q'(x)}{(x-1)^n Q(x)} = n = 3$

$\therefore f(x) = (x-1)^3(x+a) \quad (a \ne -1)$

# 26



$\lim_{x\to0} G(x) = -\infty$, $\lim_{x\to0+} G'(x) = \infty$, $\lim_{x\to0-} G'(x) = -\infty$

$\lim_{x\to0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{1}{4}$

$\therefore \lim_{x\to0} |F'(x)| = \lim_{x\to0} \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| = \infty$

$\longrightarrow f(0) = 0$

$\therefore f(x) = x(x-1)^3$

$\therefore F'(x) = \frac{4x-1}{x(x-1)}$

$G'(x) = \frac{g'(x)\sin x + g(x)\cos x}{g(x)\sin x}$

$$\lim_{x\to0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to0} \frac{(4x-1)g(x)\sin x}{x(x-1)\{g'(x)\sin x + g(x)\cos x\}}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{4x-1}{x-1} \cdot \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to0} \frac{g(x)}{g'(x)\sin x + g(x)\cos x}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{g(x)}{g'(x)\sin x + g(x)\cos x} = \frac{1}{4}$$

$\longrightarrow g(0) = 0$

$\therefore g(x) = x^n P(x) \quad (1 \le n \le 3,\ P(0) \ne 0)$

$g'(x) = nx^{n-1}P(x) + x^n P'(x)$

$$\lim_{x\to0} \frac{nx^{n-1}P(x)\sin x + x^n P'(x)\sin x}{x^n P(x)} = n = 3$$

$\therefore g(x) = x^3$

$\therefore f(3) + g(3) = 51$

# 26

2018학년도 6월 평가원(가형) 21번

sol2) log의 성질 이용

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

$$F(x)=\ln|f(x)|=\ln|x-\alpha|+\ln|x-\beta|+\ln|x-\gamma|+\ln|x-\delta|$$

$$\lim_{x\to1}(x-1)F'(x)=\lim_{x\to1}(x-1)\left(\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}\right)=3$$

$$\therefore \ln|f(x)|=3\ln|x-1|+\ln|x-\alpha|$$

$$\longrightarrow f(x)=(x-1)^3(x-\alpha)\quad(\alpha\neq1)$$

$$g(x)=(x-p)(x-q)(x-r)$$

$$\lim_{x\to1}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x-\alpha}}{\frac{1}{x-p}+\frac{1}{x-q}+\frac{1}{x-r}+\frac{\cos x}{\sin x}}=\frac{x\left(\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x-\alpha}\right)}{x\left(\frac{1}{x-p}+\frac{1}{x-q}+\frac{1}{x-r}\right)+\frac{x}{\tan x}}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \alpha=0$$

$$\lim_{x\to1}x\left(\frac{1}{x-p}+\frac{1}{x-q}+\frac{1}{x-r}\right)=3$$

$$\therefore p=q=r=0$$

$$\therefore g(x)=x^3,\quad f(x)=x(x-1)^3$$

$$\therefore f(3)+g(3)=51$$

# 26

sol3) 역로피탈

$$\lim_{x\to1}(x-1)F'(x)=\lim_{x\to1}\frac{F'(x)}{\frac{1}{x-1}}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)}{\ln|x-1|}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln|f(x)|}{\ln|x-1|}=3$$

$\longrightarrow f(x)=(x-1)^3(x-\alpha)\quad(\alpha\neq1)$

$$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln|f(x)|}{\ln|g(x)\sin x|}=\frac{1}{4}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이기 때문에 $\alpha=0$

$\therefore f(x)=x(x-1)^3$

$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{3\ln|x-1|}{\ln|g(x)|+\ln|\sin x|}}_{=0}+\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{\ln|g(x)|+\ln|\sin x|}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{\dfrac{\ln|xg(x)|}{\ln|x|}+\underbrace{\dfrac{\ln\left|\frac{\sin x}{x}\right|}{\ln|x|}}_{=0}}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln|xg(x)|}{\ln|x|}=4\qquad\therefore g(x)=x^3$$

$\therefore f(3)+g(3)=51$

＊로피탈의 정리, L'Hôpital's rule

$x=a$ 에서 미분 가능한 함수에 대해

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ 일 때

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 이 성립한다.

# 26



sol4) $\sin x = x$ ..?

⋮

$\sin x = x$

$$\lim_{x \to 1} \frac{3\ln|x-1| + \ln|x|}{\ln|x \cdot g(x)|} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln|g(x)|}{\ln|x|} + \frac{\ln|x|}{\ln|x|} = 4$$

$\therefore g(x) = x^3$

$\therefore f(3) + g(3) = 51$

*테일러 급수, Taylor Series

$\sin\theta = \theta$

$\tan\theta = \theta$

등, 함수를 근사시키는 방법

자세한 설명은 33번, 190621 에서

# 33

2019학년도 6월 평가원(가형) 21번

$j(x) = 1 + \cos x$

$j(\pi) = 0$, $j''(\pi) = 1$ : 이계도함수 $\neq 0$ : 미분

$\longrightarrow j(x) = \frac{1}{2}(x-\pi)^2 + \sim$ 꼴

$\longrightarrow g = 3$

* 테일러 전개

무한번 미분할 수 있는 함수에 대하여 그 함수를 다항식으로 근사하는 방법

예) $e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $\cdots$

* 테일러 급수

테일러 전개한 $f(x)$를 $x=a$ 에서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$\longrightarrow a=0$일 때, 알아두면 좋은 함수

$$e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$$

$$\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\tan x \cong x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$$