近衛 모의고사
수학 영역 정답

1	⑤	2	③	3	②	4	④	5	①
6	②	7	①	8	⑤	9	④	10	①
11	②	12	⑤	13	④	14	③	15	③
16	24	17	8	18	66	19	10	20	37
21	5	22	4						

공통과목 해설

1. 지수법칙으로 계산하는 문제입니다.

$(\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{2}})^2 \times 4^{\frac{1}{4}} = (2^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{1}{2}})^2 \times (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2$

2. 부정적분을 이해하는 문제입니다.

$f'(x) = 3x^2 - 8$을 적분하면 $f(x) = x^3 - 8x + C$이고,
$f(1) = 1 - 8 + C = 5$에서 $C = 12$이므로
$f(x) = x^3 - 8x + 12$, $f(0) = 12$입니다.

3. 등비수열에 대한 문제입니다.

주어진 등비수열의 일반항은 $a_n = 5 \times (\sqrt{2})^{n-1}$이고,
$a_k = 5 \times (\sqrt{2})^{n-1} = 40$에서 $(\sqrt{2})^{n-1} = 2^{\frac{n-1}{2}} = 2^3 = 8$,
$\frac{n-1}{2} = 3$에서 $n = 7$입니다.

4. 함수의 극한을 구하는 문제입니다.

주어진 그림에서 $f(1) = 2$이고,
$\lim_{x \to 0-} f(x-1) = \lim_{x \to -1-} f(x) = -1$이므로
$f(1) + \lim_{x \to 0-} f(x-1) = 2 - 1 = 1$입니다.

5. 곡선의 접선에 대한 문제입니다.

$y = x^3 - x^2 - x$에 대하여 $y' = 3x^2 - 2x - 1$이고, $x = 2$에서의 미분계수는 7입니다. 이때 주어진 접선은 $y = 7x - 12$이고, 이 접선은 점 (3, 9)를 지나므로 $k = 9$입니다.

6. 로그가 포함된 방정식을 푸는 문제입니다.

$(\log_3 x - 2)(\log_3 3x) = 4$에서 $\log_3 3x = 1 + \log_3 x$이고,
$\log_3 x = t$라고 하면 $(t-2)(t+1) = 4$, $t^2 - t - 6 = 0$이고, 이 식을 풀면 $(t-3)(t+2) = 0$이므로 $\log_3 x = 3$에서 $x = 3^3$,
$\log_3 x = -2$에서 $x = 3^{-2}$입니다.
$\alpha = 3^{-2}$, $\beta = 3^3$이므로 $\log_\alpha \beta = -\frac{3}{2}$입니다.

7. 부채꼴의 호의 길이와 중심각 사이의 관계를 이해하는 문제입니다.

원뿔의 밑면의 반지름의 길이가 4이므로 원둘레는 8π이며, 옆면은 호의 길이가 8π이고 중심각의 크기가 $\frac{4}{3}\pi$인 부채꼴이므로 반지름의 길이, 즉 원뿔의 모선의 길이는 6입니다. 이때 원뿔의 높이는 $\sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$입니다.

8. 함수의 연속에 대한 문제입니다.

$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^2+x+4} - a}{x-3}$에서 $\lim_{x \to 3}(x-3) = 0$이므로 $\lim_{x \to 3}(\sqrt{x^2+x+4} - a) = 0$, $a = 4$입니다.

$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^2+x+4} - 4}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2+x-12}{(x-3)(\sqrt{x^2+x+4}+4)}$

$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(\sqrt{x^2+x+4}+4)}$

$\lim_{x \to 3} \frac{x+4}{\sqrt{x^2+x+4}+4} = \frac{7}{8}$

즉, $b = \frac{7}{8}$이고, $ab = 4 \times \frac{7}{8} = \frac{7}{2}$입니다.

9. 삼각함수의 그래프를 활용한 문제입니다.

함수 $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$은 $x = 1$에서 최댓값 1을 갖고, $x = 3$에서 최솟값 -1을 갖습니다.
$t = \frac{4}{3}$인 경우, 구간 $[\frac{4}{3}, \frac{7}{3}]$에 1과 3은 포함되어 있지 않고, 이 구간에서 $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$는 감소하므로 최댓값은
$f(\frac{4}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$입니다.
또한, 구간 $[t, t+1]$에 3이 포함되는 경우 $f(t)$ 또는 $f(t+1)$이 최댓값인데, $f(t) = f(t+1)$인 경우 $g(t)$가 최소가 됩니다.
$\sin\frac{\pi}{2}t = \sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2}t$에서 $t = \frac{5}{2}$인 경우 $g(t)$는 최솟값 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$를 갖습니다.
따라서 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a^2 + b^2 = \frac{5}{4}$입니다.

10. 함수의 최댓값에 대한 문제입니다.

점 B의 x좌표를 t$(0 < t < \sqrt{a})$라고 하고, 점 A의 x좌표를 -t라고 하면 삼각형 OAB의 넓이는 $t(-t^2 + a) = -t^3 + at$입니다.
$S(t) = -t^3 + at$라고 하면 $S'(t) = -3t^2 + a$에서 $t = \sqrt{\frac{a}{3}}$일 때 삼각형 OAB의 넓이가 최대가 됩니다.
이때 삼각형 OAB가 정삼각형이 되기 위해서는 점 B의 y좌표가 x좌표의 $\sqrt{3}$배여야 합니다. 점 B의 y좌표는 $\frac{2a}{3}$이고,
$\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{a}{3}} = \frac{2a}{3}$, $a = \frac{9}{4}$입니다.

11. 로그를 활용한 문제입니다.

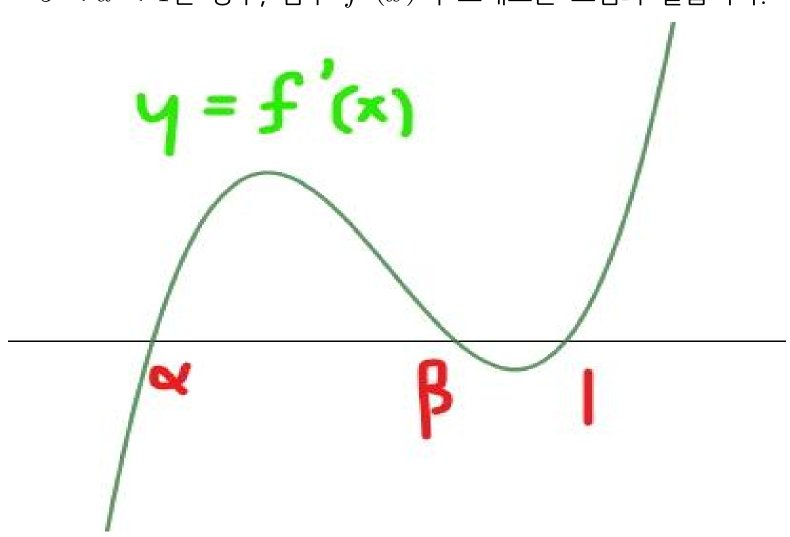
자연수 n이 홀수 개의 약수를 가지는 경우, n은 어떤 수의 제곱입니다. 예를 들어서 $n = 4$인 경우 4의 약수는 1, 2, 4이므로 $\log_4(1 \times 2 \times 4) = \log_4 8 = \frac{3}{2}$입니다.

이때 자연수 n이 약수 $\sqrt{n}$을 가지므로 $g(n)$은 $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$와 같은 수로 나옵니다.
자연수 n이 짝수 개의 약수를 가지는 경우, n의 약수가 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_{2k-1}, a_{2k}$로 $2k$개 있다고 하고,
$a_1a_{2k}=a_2a_{2k-1}=a_3a_{2k-2}=\ldots=n$이라고 하면
$\log_n(a_1a_2a_3a_4 \cdots a_{2k-1}a_{2k})=k$가 성립합니다.
$k=3$이 되기 위해서는 자연수 n의 약수의 개수는 6이어야 합니다.
자연수 n이 $A^a \times B^b \times C^c \times D^d \times \ldots$로 소인수분해된다고 하면(단, A, B, C, D, ...은 소수, a, b, c, d, ...은 자연수) 약수의 개수는 $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)\ldots$입니다.
(i) 자연수 n이 A^5의 꼴인 경우
50 이하의 자연수 n으로 가능한 것은 $2^5=32$로 1개입니다.
(ii) 자연수 n이 $A^1 \times B^2$의 꼴인 경우
50 이하의 자연수 n으로 가능한 것은 $2\times3^2=18$,
$2\times5^2=50$, $3\times2^2=12$, $5\times2^2=20$, $5\times3^2=45$,
$7\times2^2=28$, $11\times2^2=44$로 7개입니다.
(i), (ii)에 의하여 $g(n)=3$이 되도록 하는 자연수 n의 개수는 8입니다.

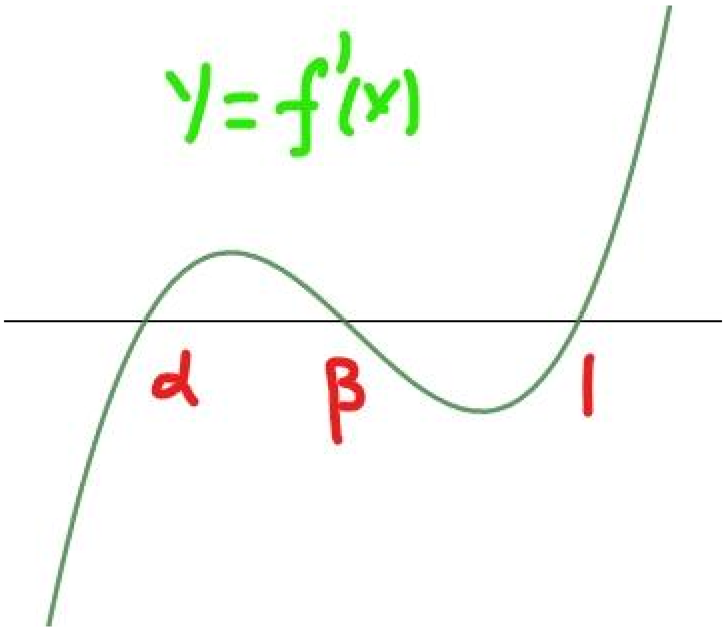
12. 적분으로 넓이를 구하는 문제입니다.
함수 $f(x)$는 증가함수이므로 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점은 모두 직선 $y=x$ 위에 있습니다. 점 (0, 0), (3, 3)을 지나므로 $f(x)=kx(x-3)^2+x$ 또는 $f(x)=kx^2(x-3)+x$의 꼴이 됩니다.$(k>0)$
함수 $f(x)$의 역함수가 존재하기 위해서는 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 합니다. $f(x)=kx(x-3)^2+x$인 경우 부등식 $f'(x)=3kx^2-12kx+9k+1 \geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하여야 하고, 이때 k의 값의 범위를 구하면 $0<k\leq\frac{1}{3}$이어야 합니다.
$f(x)=kx^2(x-3)+x$인 경우 부등식
$f'(x)=3kx^2-6kx+1\geq0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하여야 하고, k의 값의 범위는 위와 마찬가지로 $0<k\leq\frac{1}{3}$입니다.
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_0^3|f(x)-g(x)|dx=2\int_0^3|x-f(x)|dx$입니다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $f(x)=kx(x-3)^2+x$인 경우와 $f(x)=kx^2(x-3)+x$인 경우가 서로 동일하므로 아무거나 선택하셔도 됩니다.
$f(x)=kx^2(x-3)+x$인 경우
$2k\int_0^3|x^3-3x^2|dx=2k[-\frac{1}{4}x^4+x^3]_0^3=\frac{27}{2}k$이고,
$0<k\leq\frac{1}{3}$이므로 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이의 최댓값은 $\frac{9}{2}$입니다.

13. 코사인법칙을 활용한 문제입니다.
주어진 그림에서 $\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$가 성립하므로(증명은 피타고라스 정리를 활용하면 가능합니다. 중학교 수학 문제집에도 있고, 일부 교과서에서는 고1 평면좌표 단원에서도 다루고 있습니다.) $\overline{BP}^2+\overline{DP}^2=36$입니다.
$\overline{BP}=a$, $\overline{DP}=b$라고 하면 $a^2+b^2=36$이고, 각 BPD의 크기를 θ라고 하면 $\frac{1}{2}ab\sin\theta=7$이 성립하고, 코사인법칙에 의하여 $\overline{BD}^2=52=a^2+b^2-2ab\cos\theta$, $2ab\cos\theta=-16$이 성립합니다.(선분 BD는 직사각형의 대각선의 길이)
$ab\sin\theta=14$, $ab\cos\theta=-8$에서 $\frac{ab\sin\theta}{ab\cos\theta}=\tan\theta=-\frac{7}{4}$이며, $\cos\theta=-\frac{4}{7}\sin\theta$에서
$\sin^2\theta+(-\frac{4}{7}\sin\theta)^2=\frac{65}{49}\sin^2\theta=1$, $\sin\theta>0$이므로
$\sin\theta=\frac{7\sqrt{65}}{65}$입니다.

14. 사차함수를 활용한 문제입니다.
$f(x)=x^4+4x^3+2(a-4)x^2-4ax$을 미분하면
$f'(x)=4x^3+12x^2+4(a-4)x-4a=4(x-1)(x^2+4x+a)$에서 $f'(1)=0$입니다.
(i) 방정식 $x^2+4x+a=0$의 실근이 존재하지 않거나, 중근인 경우
이 경우 a의 값의 범위는 $a\geq4$이고, 함수 $f(x)$는 구간 (-∞, 1)에서 감소하고 (1, ∞)에서 증가하므로 $f(x)\geq f(1)$을 만족합니다.
(ii) 방정식 $x^2+4x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우
방정식 $x^2+4x+a=0$의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 할 때, $\alpha<1<\beta$인 경우 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극대이므로 조건에 맞지 않습니다.
방정식 $x^2+4x+a=0$의 두 실근 중 하나가 1인 경우 $a=-5$이고 다른 한 실근은 -5인데, 이때 함수 $f(x)$는 구간 (-∞, -5)에서 감소하고 (-5, ∞)에서 증가하므로 조건에 맞지 않습니다.
$-5<a<4$인 경우, 함수 $f'(x)$의 그래프는 그림과 같습니다.



도함수의 그래프에서 알 수 있듯이, 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극소, $x=\beta$에서 극대, $x=1$에서 극소입니다.
$\beta-\alpha>1-\beta$인 경우, 주어진 그림에서 알 수 있듯이
$\int_{\alpha}^{\beta}|f'(x)|dx > \int_{\beta}^{1}|f'(x)|dx$이고, 이때 $\int_{\alpha}^{1}f'(x)dx>0$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(\alpha)$가 되어서 조건에 맞지 않습니다.



$\beta-\alpha<1-\beta$인 경우, 그림에서 알 수 있듯이
$\int_{\alpha}^{\beta}|f'(x)|dx < \int_{\beta}^{1}|f'(x)|dx$이고, 이때 $\int_{\alpha}^{1}f'(x)dx<0$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)$가 되어서 조건에 맞게 됩니다.
또한, $\beta-\alpha=1-\beta$인 경우에는 $\int_{\alpha}^{1}f'(x)dx=0$이 되고, 이때 $f(\alpha)=f(1)$이 되어 조건에 맞게 됩니다. 이 경우에는 $\alpha+\beta=-4$에서 $\alpha=-3$, $\beta=-1$이고, $a=3$이 됩니다. 따라서 실수 a의 최솟값은 3입니다.

15. 등차수열 문제입니다.
주어진 등차수열 a_n의 공차를 d라고 하면 일반항은
$a_n=-15+(n-1)d$입니다.
$|\sum_{k=1}^{n}a_k|=|\sum_{k=1}^{n+1}a_k|=m$인 경우, $a_{n+1}=0$이거나, 혹은
$\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n+1}a_k=0$이 성립합니다.
우선 ㄱ에서, $a_1=15$이고 $a_{n+1}=0$이면 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\frac{n+1}{2}(a_1+a_{n+1})=\frac{15(n+1)}{2}$이므로 ㄱ은 옳은 선지입니다.
ㄴ의 경우, $\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n\{-30+(n-1)d\}}{2}$이고
$\sum_{k=1}^{n+1}a_k=\frac{(n+1)(-30+nd)}{2}$이므로 $\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n+1}a_k=0$에서
$n^2d-30n-15=0$, $d=\frac{30n+15}{n^2}$이므로
$a_{n+1}=a_n+\frac{30n+15}{n^2}$이 성립합니다. 즉 ㄴ도 옳은 선지입니다.

ㄷ에서, $a_{n+1}=0$인 경우 $n=3$이면 $m=30$이지만,
$\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n+1}a_k=0$인 경우에는 $n=3$이면 $d=\frac{35}{3}$이고, 이때
$m=|\sum_{k=1}^{n}a_k|=|\frac{3\times(-30+2\times\frac{35}{3})}{2}|=10$이므로 ㄷ은 틀린 선지입니다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ입니다.

16. 삼각함수의 성질에 대한 문제입니다.
$\sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{5}$에서 $\sin^2\theta=\frac{2}{5}$, $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=\frac{3}{5}$이고,
$40\cos^2\theta=24$입니다.

17. 정적분으로 정의된 함수와 미분계수에 대한 문제입니다.
$f(x)=\int_{2}^{x}(t^3+5t-2)dt$라고 하면 $f(2)=0$이고, 주어진 식은 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x(x-2)}$로 나타낼 수 있습니다.
$\lim_{x\to2}(\frac{1}{x}\times\frac{f(x)-f(2)}{x-2})=\frac{1}{2}\times f'(2)$이고,
$f'(x)=x^3+5x-2$에서 $f'(2)=16$, $\frac{f'(2)}{2}=8$입니다.

18. 수열의 귀납적 정의에 대한 문제입니다.
$a_1=3$이고, $a_2=a_1+5=8$입니다.
$a_3=\frac{a_2+1}{3}=3$이고, $a_4=a_3+5=8$입니다.
$a_5=\frac{a_4+1}{3}=3$에서 주어진 수열은 3, 8, 3, 8, ...이 계속 반복됩니다.
따라서 $\sum_{n=1}^{12}a_n=6(3+8)=66$입니다.

19. 수직선 위를 움직이는 점의 이동 거리, 속도, 가속도를 활용한 문제입니다.
점 P의 시각 t에서의 가속도는 $2t+a$이며, $t=2$일 때의 가속도는 $4+a=3$이므로 $a=-1$입니다.
$v(t)=t^2-t+b$에서 점 P의 $t=1$부터 $t=3$까지의 위치의 변화량은 $\int_{1}^{3}v(t)dt=[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+b]_1^3=\frac{26}{3}-4+2b=0$에서
$b=-\frac{7}{3}$입니다.
따라서 $3|-1-\frac{7}{3}|=10$입니다.

20. 함수의 미분가능성과 극값을 활용한 문제입니다.
주어진 함수는 $x=1$에서 연속이어야 하므로
$\lim_{x\to1-}f(x)=2a-2$, $\lim_{x\to1+}f(x)=-3+a+b$에서
$2a-2=-3+a+b$, $a-b=-1$입니다.

또한, $x=1$에서 미분가능하므로 $\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(-x+a-2)}{x-1}=a-3$, $\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)\{x^2+(a+1)x+a-3\}}{x-1}=2a-1$에서

$a-3=2a-1$, $a=-2$이고, 이때 $b=-1$입니다.

$f(x)=\begin{cases}-x^2-3x-2 & (x<1)\\ x^3-2x^2-4x-1 & (x\geq 1)\end{cases}$에서, $x<1$에서는

$f'(x)=-2x-3=0$, $x=-\frac{3}{2}$일 때 극댓값 $\frac{1}{4}$를 갖고, $x\geq 1$에서는 $f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)=0$에서 $x=2$에서 극솟값 -9를 갖습니다.

따라서 $d=\frac{1}{4}-(-9)=\frac{37}{4}$, $4d=37$입니다.

21. 지수함수의 그래프를 활용한 문제입니다.

곡선 $y=|2^x-a|$와 직선 $y=b$가 만나는 점의 x좌표는 $\log_2(a+b)$, $\log_2(a-b)$이고, 두 점 사이의 거리는

$\log_2(a+b)-\log_2(a-b)=\log_2(\frac{a+b}{a-b})=1$에서 $\frac{a+b}{a-b}=2$

$a=3b$가 성립합니다.

직선 $y=\frac{1}{2}x+b$가 사각형 DABC의 넓이를 이등분하기 위해서는 정사각형의 중심(즉, 두 대각선의 교점)을 지나야 합니다.

정사각형의 중심의 x좌표는

$\frac{\log_2(a-b)+\log_2(a+b)}{2}=\frac{1}{2}\log_2(a^2-b^2)=\frac{1}{2}\log_2 8b^2$이고, y좌표는 $b+\frac{1}{2}$입니다.

점 $(\frac{1}{2}\log_2 8b^2, b+\frac{1}{2})$가 직선 $y=\frac{1}{2}x+b$ 위의 점이므로

$\frac{1}{4}\log_2 8b^2=\frac{1}{2}$, $\log_2 8b^2=2$, $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$가 성립하고, $a=3b$에서 $a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$입니다.

따라서 $a^2+b^2=\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=5$입니다.

22. 함수의 그래프의 개형을 파악하고, 극한을 구하는 문제입니다.

함수 $f(x)$는 다음과 같습니다.

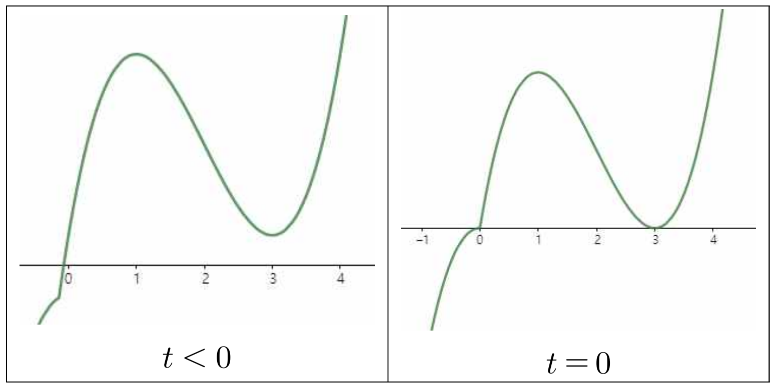
$f(x)=\begin{cases}2x^3-6x^2-3t^2+9t & (x<t)\\ 2x^3-12x^2+18x+3t^2-9t & (x\geq t)\end{cases}$

또한, 함수 $f(x)$의 도함수는 다음과 같습니다.

$f'(x)=\begin{cases}6x(x-2) & (x<t)\\ 6(x-1)(x-3) & (x\geq t)\end{cases}$

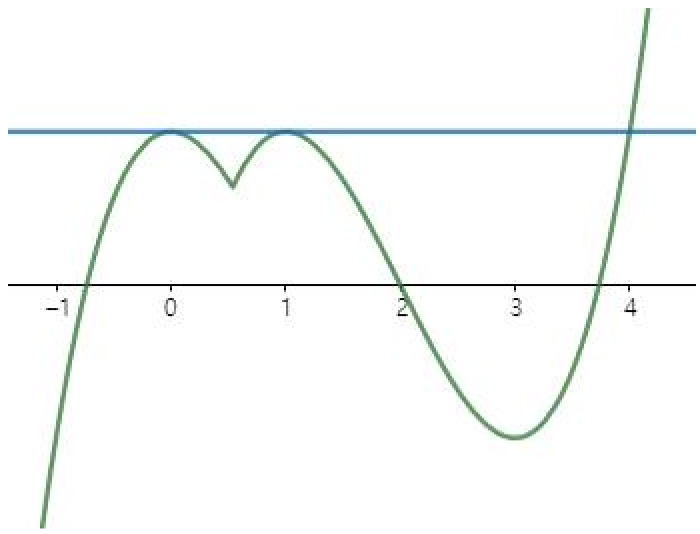
$\lim_{x\to\alpha+}\frac{f(x)-a}{x-\alpha}=\lim_{x\to\beta+}\frac{f(x)-a}{x-\beta}=0$을 만족하는 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 $f(\alpha)=f(\beta)=a$이고, 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 미분가능하면 $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$이 성립합니다.

우선, $t<0$인 경우와 $t=0$인 경우의 개형은 다음과 같습니다.



$t<0$ $t=0$

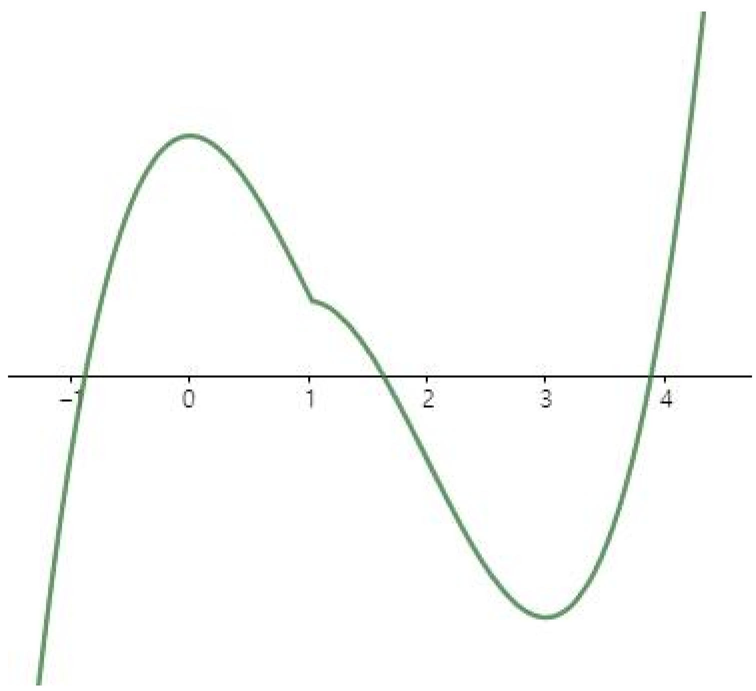
$t<0$인 경우 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 1과 3으로 2개뿐이며, $f(1)\neq f(3)$이므로 조건에 맞지 않습니다. $t=0$인 경우에는 $f(0)=f(3)$이고 $f'(3)=0$이지만, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq 0$이므로 역시 조건에 맞지 않습니다.



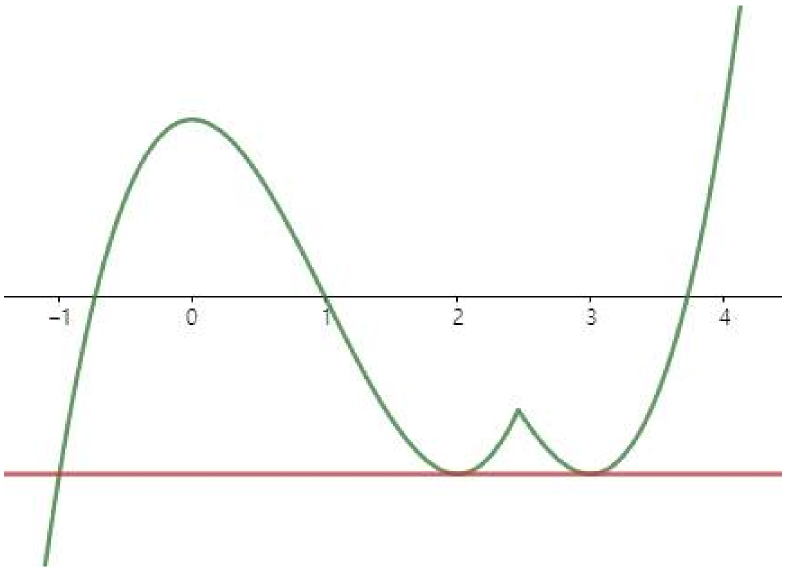
$0<t<1$인 경우 $x=0$에서 미분가능하고 극대, $x=1$에서 미분가능하고 극대이므로 $f(0)=f(1)$이면 조건을 만족합니다.

$f(0)=-3t^2+9t$, $f(1)=3t^2-9t+8$에서

$-3t^2+9t=3t^2-9t+8$, $6t^2-18t+8=0$, $0<t<1$이므로 $t=\frac{9-\sqrt{33}}{6}$입니다.



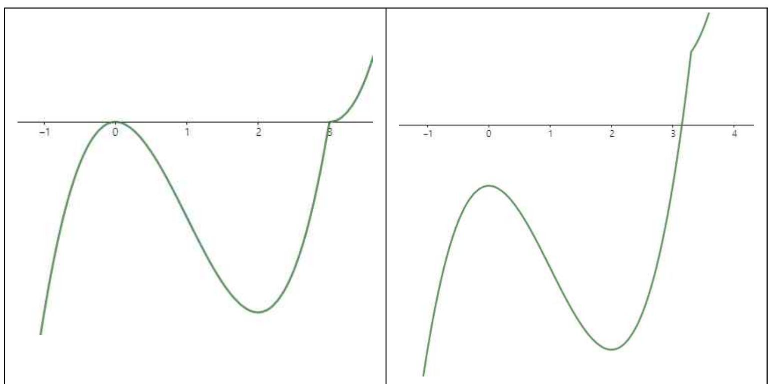
$1\leq t\leq 2$인 경우에는 그림과 같이 구간 (0, 3)에서 감소하는 개형이 나오며, 조건에 맞지 않습니다.



$2<t<3$인 경우 $x=2$에서 미분가능하고 극소, $x=3$에서 미분가능하고 극소이므로 $f(2)=f(3)$이면 조건을 만족합니다.

$f(2)=-3t^2+9t-8$, $f(3)=3t^2-9t$에서

$-3t^2+9t-8=3t^2-9t$, $6t^2-18t+8=0$, $2<t<3$이므로 $t=\dfrac{9+\sqrt{33}}{6}$입니다.



$t=3$ $t>3$

$t=3$인 경우에는 $f(0)=f(3)=0$, $f'(0)=0$이고,

$\lim\limits_{x\to 3+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=0$이므로 조건을 만족합니다.

$t>3$인 경우에는 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 0과 2로 2개뿐이며, $f(0)\neq f(2)$이므로 조건에 맞지 않습니다.

따라서 주어진 명제를 만족시키는 t의 값으로 가능한 것은 $\dfrac{9-\sqrt{33}}{6}$, $\dfrac{9+\sqrt{33}}{6}$, 3으로 모두 곱하면 4입니다.