제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $(\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2^{\frac{1}{2}\times 4-2} = 2^0 = 1$

2. 함수 $f(x)=x^3+9$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$f'(x) = 3x^2$

$f'(2) = 3\cdot 2^2 = 12$

3. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\cos^2\theta=\frac{4}{9}$일 때, $\sin^2\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

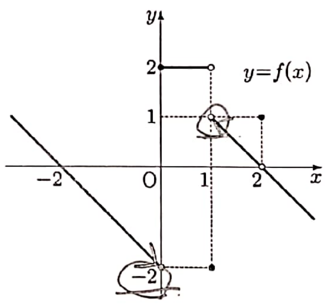
① $-\frac{4}{9}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{2}{9}$ ④ $-\frac{1}{9}$ ⑤ 0

$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = \frac{5}{9}$

$\cos\theta = -\frac{2}{3}$ $(\cos\theta<0)$

$\sin^2\theta+\cos\theta = \frac{5}{9}-\frac{2}{3} = -\frac{1}{9}$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$-2+1=-1$

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 + a_3 = \frac{3}{2}$$

일 때, $a_6 + a_7$의 값은? [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

공비 → r

$a_2 + a_3 = \frac{1}{4}(r + r^2) = \frac{3}{2} \rightarrow r^2 + r - 6 = 0$

$r = 2 \ (r > 0)$

$a_6 + a_7 = 2^4 (a_2 + a_3)$

$= 16 \times \frac{3}{2} = 24$

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} x + a & (x < -1) \\ x & (-1 \le x < 3) \\ bx - 2 & (x \ge 3) \end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

$|f(x)|$

	좌극한	우극한
-1	$\lvert a-1 \rvert$	1
3	3	$\lvert 3b-2 \rvert$

이고

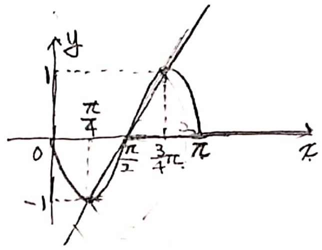
연속이므로 $|a-1| = 1$ 에서 $a = 2 \ (a > 0)$

$3 = |3b-2|$ 에서 $b = \frac{5}{3} \ (b > 0)$

$a + b = \frac{11}{3}$

7. 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = -\sin 2x$가 $x = a$에서 최댓값을 갖고 $x = b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$



$\frac{2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi} \quad (x = \frac{\pi}{4} \sim x = \frac{3}{4}\pi)$

또는 직선이 $(\frac{\pi}{2}, 0)$을 지나므로

$\frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi} \quad (x = \frac{\pi}{4} \sim x = \frac{\pi}{2})$

도 가능

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은? [3점]

> (가) $f(1)=3$
> (나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 5$이다.

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

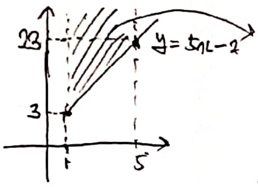
평균값 정리에 의해

$\frac{f(5)-f(1)}{5-1} = f'(c) \geq 5$ 를 만족시키는

실수 c가 $(1, 5)$에 존재하고

$\frac{f(5)-f(1)}{5-1} \geq 5$ 에서 $f(5) \geq 23$

또는.



이 부분에만 f(x) 그래프 존재가능

↓

$f(5) \geq 23$.

9. 두 함수

$$f(x)=x^3-x+6,\quad g(x)=x^2+a$$

가 있다. $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\geq g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x)-g(x) = x^3-x^2-x+6-a \geq 0$.

에서. $f'(x)-g'(x) = 3x^2-2x-1$

$x=1$ 에서 극소를 가지고

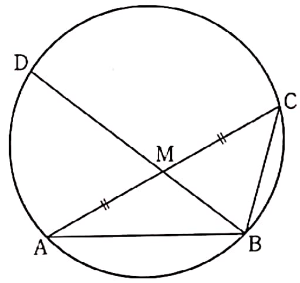
이는 $x\geq 0$ 에서 유일한 극값

→ 최솟값은 $x=1$일 때이다.

$f(1)-g(1) = 5-a \geq 0$.

$a \leq 5$

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ ④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

$\overline{AC}=p$ 라 할 때, $\cos(\angle BAC) = \frac{3^2+p^2-2^2}{6p} = \frac{7}{8}$

$4p^2-21p+20 = (4p-5)(p-4) = 0$

에서 $p>3$ 이므로 $p=4$

$\overline{BM}=q$ 라 할 때, $\cos(\angle BAM) = \frac{3^2+2^2-q^2}{12} = \frac{7}{8}$

$q^2 = \frac{5}{2}$, $q = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 이다.

두 삼각형 BCM, ADM은 닮음이고

$\overline{MD} : 2 = 2 : \frac{\sqrt{10}}{2}$

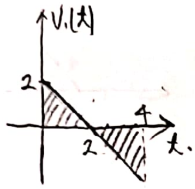
$\overline{MD} = \frac{4}{\frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{4}{5}\sqrt{10}$

11. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=2-t,\quad v_2(t)=3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

① 16　② 18　③ 20　④ 22　⑤ 24

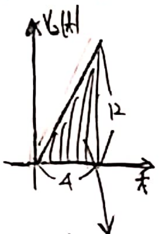


↓

넓이가 같아지는 $t=4$

↓

(변위 의미)



$\frac{1}{2}\times 4\times 12 = 24$ (변위인 동시에 움직인 거리)

12. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

> (가) $a_5 \times a_7 < 0$
>
> (나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}|a_{k+6}| = 6+\sum_{k=1}^{6}|a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$　② 11　③ $\frac{23}{2}$　④ 12　⑤ $\frac{25}{2}$

공차가 3이므로 $a_1 < a_2 < \cdots$

$a_5 < a_6 < a_7 < \cdots$ 에서 $a_5<0$, $a_7>0$

$|a_7|+\cancel{|a_8|}+|a_9|+\cancel{|a_{10}|}+|a_{11}|+\cancel{|a_{12}|}$

$= 6+|a_2|+|a_4|+|a_6|+\cancel{|a_8|}+\cancel{|a_{10}|}+\cancel{|a_{12}|}$

↓

$|a_7|+|a_9|+|a_{11}| = |a_2|+|a_4|+|a_6|+6$

$a_6>0$ 인 경우

$a_6+3+a_6+9+a_6+15 = 12-a_6+6-a_6+a_6+6$

$4a_6=-3$, $a_6=-\frac{3}{4}<0$ 이므로 모순

$a_6<0$ 인 경우

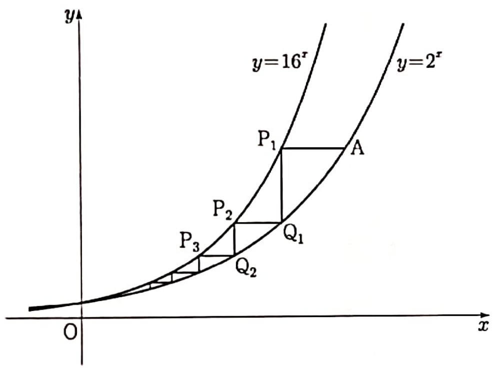
$a_6+3+a_6+9+a_6+15 = 12-a_6+6-a_6-a_6+6$

$6a_6=-3$, $a_6=-\frac{1}{2}$ 이다.

$a_{10}=a_6+12=\frac{23}{2}$ 이다.

13. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $A(64, 2^{64})$이 있다.
점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.
점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때,
$x_n < \frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는? [4점]

① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60



$16^{x_{n+1}} = 2^{x_n}$ 에서 $4x_{n+1} = x_n$ 이고

$16^{x_1} = 2^{64}$ 에서 $x_1 = 16$.

$\rightarrow x_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-3}$

$x_n < \frac{1}{k}$ 을 만족시키는 n의 최솟값이 6

$\Downarrow$

$x_6 = \frac{1}{64} < \frac{1}{k} \le \frac{1}{16} = x_5$ 에서 k는 $64-16 = 48$개

14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x) = \begin{cases} -\int_0^x f(t)\,dt & (x<0) \\ \int_0^x f(t)\,dt & (x \ge 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(0)=0$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$g'(x) = \begin{cases} -f(x) & (x<0) \\ f(x) & (x\ge 0) \end{cases}$ 이고

$g'(x)$는 $x=0$ 에서 연속이므로 $f(0)=0$ 이고 ㄱ은 참

$f(x) = \begin{cases} -g'(x) & (x<0) \\ g'(x) & (x\ge 0) \end{cases}$ 에서 $g'(x)$는 이차함수이므로 (최고차항 계수 3)

$g'(x) = 3x^2 - ax$ 라 둘 때 ($g'(0)=0$)

$a>0$ 이면

$a=0$ 이면 에서 $a=0$ 일 때 극댓값이 존재하지 않음. ㄴ은 거짓

$a<0$ 이면

$f(1) = g'(1) = 3-a$ 이고 $2<f(1)<4$ 에서 $-1<a<1$ 이다.

$f(x)=x$ 에서

$x>0$ 에서 $3x^2-(a+1)x=0$ $x=\frac{a+1}{3}>0$

$x=0$ 에서 $f(0)=0$. $x=0$

$x<0$ 에서 $3x^2-(a-1)x=0$ $x=\frac{a-1}{3}<0$

에서 서로 다른 세 실근을 가진다. ㄷ은 참

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$a_1 = 0$

$a_2 = \frac{1}{k+1}$

$a_3 = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$

$a_4 = \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k}$

⋮

에서 $\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \neq 0$ 이고 a_{2n+1} 은 0 이 될수 없다.

a_{2n+2} 는 $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, $\cdots$ $a_{2n+1} \neq 0$

이고 $a_{2n+2} = 0$ 이 되게 하는 k가 존재한다.

이 때, $a_1 \sim a_{2n+1}$ 까지의 항이 a_{2n+2} 부터

반복되고 $a_{22} = 0$ 이어야하므로

$(2n+1)$ 개의 항이 (자연수) 번 반복되는 항의 개수가

21 개여야한다.

즉, $2n+1$ 은 21의 약수여야 하고

$n=1$, $n=3$, $n=10$ 이다

이 때, a_{2n+2} 에서 처음으로 0 이 되도록 하는

k는 $a_{2n+2} = \frac{n+1}{k+1} - \frac{n}{k} = 0$ 이 되도록하는

k이고 $n=k$ 이다.

모든 k의 값의 합은 $1+3+10=14$ 이다

단답형

16. 방정식 $\log_2(x+2) + \log_2(x-2) = 5$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x^2 - 4 = 2^5$

$x^2 = 36$, $x = 6$ $(x>2)$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 + 6x^2$이고 $f(0) = -1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x) = \int f'(x)\,dx = 2x^4 + 2x^3 - 1$

$f(-2) = 32 - 16 - 1 = 15$

18. $\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=250$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$4\sum_{k=1}^{10}k+10a$

$=220+10a=250$

$a=3$

19. 함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

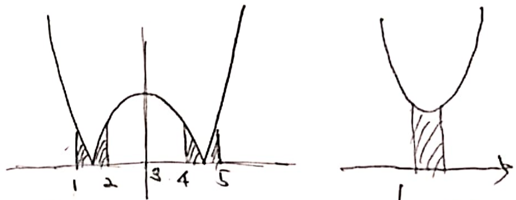
$f'(x)=4x^3+2ax$

$f'(1)=4+2a=0 \rightarrow a=-2$

$f(0)=b=4$

$a+b=2$

20. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]



↳ 극소가 1개 존재한다. 모순

↓

넓이가 1간격을 가지고 $[x, x+1]$에서 변한다고 할 때,
함수 $|f(x)|$가 $x=k$에 선대칭인 함수 그래프를 가지므로
극소일 때의 넓이는 같고, 극소인 x도 대칭 형태로 분포한다.

위 그림처럼 $x=1, 4$에서 극소인 상황에서
$f(x)$는 $x=3$에 대칭인 함수이다 $\rightarrow f(x)=2(x-3)^2+a$

$g'(1)=0$이어야 하고
$|f(2)|-|f(1)|=-(f(1)+f(2))=0$에서
$10+2a=0$, $a=-5$이다.
$f(0)=18-5=13$

21. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$\frac{2}{3}\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right) = k$ 라 할 때,

$0 < \frac{3}{4n+16} < 1$ 에서 k는 음의 정수여야 한다.

$\frac{3}{4n+16} = 2^{\frac{3}{2}k}$ 에서.

$\frac{4n+16}{3} = 2^{-\frac{3}{2}k}$

$\frac{n+4}{3} = 2^{-\frac{3}{2}k-2}$

$n = 3\cdot 2^{-\frac{3}{2}k-2} - 4$ 이고

이 때, $k = -2, -4, -6, \cdots$ 이어야 n이 자연수 이다.

$k=-2$ 일 때, $n = 3\times 2 - 4 = 2$

$k=-4$ 일 때, $n = 3\times 2^4 - 4 = 44$

$k=-6$ 일 때, $n = 3\times 2^7 - 4 = 380$

$k\le -8$ 일 때는 $n > 1000$ 이다.

$2+44+380 = 426$

22. 두 양수 a, $b\,(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\ (x+a)f(x-b) & (x\ge 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

$|g(t)| = k$ 라 둘 때, $(k>0)$

$\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+k^2}-k}{(x+3)^2} = \lim_{x\to-3}\frac{\left(\sqrt{|g(x)|+k^2}-k\right)\left(\sqrt{|g(x)|+k^2}+k\right)}{(x+3)^2\left(\sqrt{|g(x)|+k^2}+k\right)}$

$\displaystyle = \lim_{x\to-3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{|g(x)|+k^2}+k\right)}$

$\displaystyle = \lim_{x\to-3}\frac{|f(x)|}{|x+3|\left(\sqrt{|g(x)|+k^2}+k\right)}$ 이고

$t\ne-3$, $t\ne-6$ 에서 극한값이 존재해야하므로 $f(-3)=0$ 이다.

$f(x) = (x+3)(x-\alpha)$ 라 할 때,

$\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{|x-\alpha|}{\sqrt{|g(x)|+k^2}+k}$ 의 극한값이 존재하면 $k\ne0$. 존재하지 않으면 $k=0$ 이다.

즉, $g(t)=0$ 의 실근은 $t=-3$, $t=6$ 뿐이다.

$f(x-b)=0$ 에서 $b>3$ 이므로 $x=6-b=-3$ 이고 $b=9$ 이다.

$g(t)=0$ 의 실근이 두개 뿐이므로 $\alpha=-3$ 이고 $f(x)=(x+3)^2$

$g(x)$는 $x=0$ 에서 연속이므로 $3f(0) = af(-9)$ 이고

$27 = a\times36$ 에서 $a=\frac{3}{4}$ 이다.

$g(4) = \left(4+\frac{3}{4}\right)f(-5) = \frac{19}{4}\times4 = 19$

> * 확인 사항
> - 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> - 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.