스프링 모의고사
수학 영역 정답

1	①	12	①
2	⑤	13	④
3	②	14	④
4	③	15	②
5	④	16	2
6	⑤	17	5
7	⑤	18	8
8	③	19	4
9	②	20	27
10	①	21	80
11	③	22	160

1. 삼각함수의 값을 구하는 문제입니다.

$\tan(\frac{5\pi}{6})\times\sin(\frac{2\pi}{3})=\tan(\pi-\frac{\pi}{6})\times\sin(\pi-\frac{\pi}{3})$

$=-\tan(\frac{\pi}{6})\times\sin(\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}$

2. 부정적분에 대한 문제입니다.

$f(x)=ax^2+8x$의 부정적분 중 하나는

$F(x)=\frac{a}{3}x^3+4x^2+C$이고, $F(x)=2x^3+bx^2-3$과

비교하면 $C=-3$이고, a=6, b=4이므로 a+b=10

3. 지수에 미지수가 포함된 방정식을 해결하는 문제입니다.

$2^{3x-1}=(\frac{1}{2})^{x-7}$에서 $(\frac{1}{2})^{x-7}=2^{7-x}$이므로 $2^{3x-1}=2^{7-x}$,

$3x-1=7-x$, $x=2$

4. 함수의 극한을 구하는 문제입니다.

그림에서 $f(1)=3$이고, $\lim_{x\to2+}f(x)=2$이므로

$f(1)+\lim_{x\to2+}f(x)=5$입니다.

5. 등비수열 문제입니다.

등비수열의 공비를 r이라고 하면 $\frac{a_5}{a_6}=\frac{1}{r}$, $\frac{a_3}{a_2}=r$이므로

$\frac{a_5}{a_6}-\frac{a_3}{a_2}=\frac{1}{r}-r=\frac{3}{2}$, $2-2r^2=3r$, $2r^2+3r-2=0$,

$(r+2)(2r-1)=0$, $r>0$이므로 $r=\frac{1}{2}$이고,

$a_4=24\times(\frac{1}{2})^3=3$입니다.

6. 도함수를 활용한 문제입니다.

$y=\frac{1}{4}x^4+ax^2+x+3$를 미분하면 $y'=x^3+2ax+1$이고,

$x=2$를 대입하면 $8+4a+1=0$, $a=-\frac{9}{4}$입니다.

$y=\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{4}x^2+x+3$에 $x=2$를 대입하면

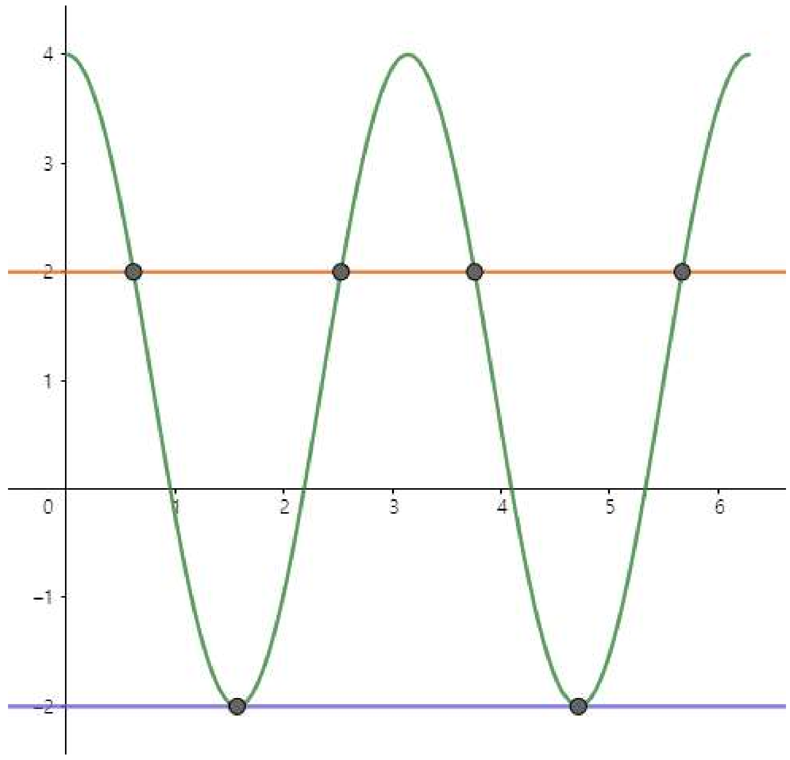
$4-9+2+3=0$이므로 $b=0$입니다.

따라서 $a+b=-\frac{9}{4}$입니다.

7. 삼각함수의 그래프에 대한 문제입니다.

방정식 $|3\cos(2x)+1|=2$의 근은 $3\cos(2x)+1=2$ 또는 $3\cos(2x)+1=-2$를 만족합니다.

곡선 $y=3\cos(2x)+1$이 두 직선 $y=-2$, $y=2$와 만나는 점의 개수는 그림과 같이 6개이며, $x=\pi$를 대칭으로 각각 3쌍이 존재하므로 모든 실근의 합은 6π입니다.



8. 도함수를 속도에 활용하는 문제입니다.

위치가 $x(t)=t^3+at^2+12t$이고, 시각 t에서의 속도를 구하면 $x'(t)=v(t)=3t^2+2at+12$이고, 점 P의 운동 방향이 변하지 않기 위해서는 $v(t)$의 부호 변화가 없어야 합니다.

이때 $v(t)=0$의 판별식을 D라고 하면

$D/4=a^2-36\le0$이어야 하고, 이를 만족하는 a의 최댓값은 6입니다.

9. 귀납적으로 정의된 수열 문제입니다.

주어진 수열의 1~3항을 구해보면 $a_3=-3$, $a_2=9$, $a_1=5$입니다.

제5항부터는 $a_5=5$, $a_6=9$, $a_7=-3$, $a_8=1$이므로 주어진 수열은 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+4}$를 만족합니다.

$\sum_{k=1}^{n}a_k$에 각각 1~9를 대입하면 5, 14, 11, 12, 17, 26, 23, 24, 29이고, $10\le\sum_{k=1}^{n}a_k\le24$를 만족하는 n의 값은 2, 3, 4, 5, 7, 8이므로 모든 n의 값의 합은 29입니다.

10. 함수의 연속에 대한 문제입니다.

$|x-1|f(x)=x^3+ax+b$에 $x=1$을 대입하면 $1+a+b=0$, $b=-a-1$이고,

$|x-1|f(x)=x^3+ax-a-1=(x-1)(x^2+x+a+1)$입니

다.
$x<1$인 경우 $f(x)=-(x^2+x+a+1)$이 되고, $x>1$인 경우 $f(x)=x^2+x+a+1$입니다. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 1-}f(x)=-a-3$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=a+3$,
$-a-3=a+3$에서 $a=-3(b=2)$이고, $f(1)=0$입니다.
$f(x)=\begin{cases}-x^2-x+2 & (x<1)\\ x^2+x-2 & (x\geq 1)\end{cases}$에서 $f(3)=10$이므로
$f(1)+f(3)=10$입니다.

11. 지수함수의 그래프를 활용한 문제입니다.
두 점 A, B의 y좌표는 각각 $\frac{1}{a}$, a이므로 선분 AB의 길이는 $a-\frac{1}{a}$이고, 두 점 C, D의 y좌표는 각각 a^2, $\frac{1}{a^2}$이므로 선분 CD의 길이는 $a^2-\frac{1}{a^2}$입니다.
두 선분 AC, BD의 교점의 좌표가 $-\frac{1}{4}$이고, 이 점과 선분 AB, CD 사이의 거리는 각각 $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{4}$이므로 두 선분 AB, CD의 길이의 비는 1:3입니다.
이때 $(a-\frac{1}{a}):(a^2-\frac{1}{a^2})=1:3$이 성립합니다.
$a^2-\frac{1}{a^2}=(a+\frac{1}{a})(a-\frac{1}{a})$이므로 $a+\frac{1}{a}=3$이고,
$a^2-3a+1=0$, $a>1$이므로 $a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$입니다.
이때 선분 AB의 길이는
$a-\frac{1}{a}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\sqrt{5}$입니다.

12. 정적분의 값을 활용한 문제입니다.
삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고, $f(1)=0$이므로 $x<1$에서 $f(x)<0$이고, $x>1$에서 $f(x)>0$입니다.
이때 $\int_0^1 f(x)dx<0$, $\int_1^2 f(x)dx>0$입니다.
$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=2$이고,
$\int_0^2 |f(x)|dx=-\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\frac{9}{2}$이므로
$\int_0^1 f(x)dx=-\frac{5}{4}$입니다.
$f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)=x^3+(a-1)x^2+(b-a)x-b$
라고 하면 $\int_0^1 f(x)dx=[\frac{1}{4}x^4+\frac{a-1}{3}x^3+\frac{b-a}{2}x^2-bx]_0^1$
$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}(a-1)+\frac{1}{2}(b-a)-b=-\frac{5}{4}$, $a+3b=7$
$\int_0^2 f(x)dx=[\frac{1}{4}x^4+\frac{a-1}{3}x^3+\frac{b-a}{2}x^2-bx]_0^2$
$=4+\frac{8}{3}(a-1)+2(b-a)-2b=2$, $a=1$, $b=2$
$f(x)=(x-1)(x^2+x+2)$에서 $f(2)=8$입니다.

13. 등차수열을 추론하는 문제입니다.
(가), (나)를 풀 때, 두 실수 A, B에 대하여
$|A|+|B|\geq|A+B|$이 성립하며, 등호가 성립하지 않는 경우에는 AB<0입니다.
(가)에서 등차수열의 공차가 자연수이므로 $a_p<0$, $a_{p+2}>0$이 성립하고, 마찬가지로 (나)에서도 $a_q<0$, $a_{q+2}>0$이 성립합니다.
또한 어떤 자연수 n에 대하여 $a_n<0$, $a_{n+1}<0$, $a_{n+2}>0$, $a_{n+3}>0$이 성립하며, $n=p$이고 $n+1=q$인 경우와 $n=q$이고 $n+1=p$인 경우가 생깁니다.
공차를 d라고 하면 (가)에서 $|a_p|+|a_{p+2}|=|a_p+a_{p+2}|+4$에서 $|a_p|+|a_{p+2}|=a_{p+2}-a_p=2d$이고, $|a_p+a_{p+2}|=2|a_{p+1}|$이므로 식을 정리하면 $d=|a_{p+1}|+2$입니다.
마찬가지로 (나) 식을 정리하면 $d=|a_{q+1}|+3$입니다.
이때 $d\geq 4$입니다.
(i) $n=p$이고 $n+1=q$인 경우(즉, $q=p+1$)
$d=|a_{n+1}|+2=|a_{n+2}|+3$
$a_{n+1}<0$이고, $a_{n+2}=a_{n+1}+d>0$이므로
$d=-a_{n+1}+2=a_{n+1}+d+3$에서 $a_{n+1}=-3$, $d=5$이고,
$a_{n+1}+2\times d=a_{n+3}=7$에서 n+3=8이 가능하고, n=5입니다.
이때 $a_4=-13$입니다.
(ii) $n=q$이고 $n+1=p$인 경우(즉, $p=q+1$)
$d=|a_{n+2}|+2=|a_{n+1}|+3$
$a_{n+1}<0$이고, $a_{n+2}=a_{n+1}+d>0$이므로
$d=a_{n+1}+d+2=-a_{n+1}+3$에서 $a_{n+1}=-2$, $d=5$이고,
$a_{n+1}+2\times d=a_{n+3}=8$에서 n+3=8이 가능하고, n=5입니다.
이때 $a_4=-12$입니다.
따라서 모든 a_4의 값의 합은 -25입니다.

14. 함수의 극한을 구하는 문제입니다.
곡선 위의 점 A(t,t^2)를 지나면서 기울기가 -1인 직선의 방정식은 $y=-x+t+t^2$이고, 이 직선과 곡선 $y=x^2$과의 교점을 조사하면 $x^2+x-t^2-t=0$,
$(x-t)(x+t+1)=0$에서 점 B의 x좌표는 $-t-1$입니다.
또한 직선 $y=-x+t+t^2$은 직선 $y=x-2$와 수직이므로 두 점 A, C 사이의 거리는 점 A와 직선 $y=x-2$ 사이의 거리와 같습니다. 이를 구하면 $\overline{\mathrm{AC}}=\frac{t^2-t+2}{\sqrt{2}}$입니다.
또한 두 점 A, B의 x좌표의 차이는 $2t+1$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=(2t+1)\sqrt{2}$입니다.
세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있으므로 $\frac{S(t)}{T(t)}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$가

성립하고, $\lim_{t\to\infty}\frac{tS(t)}{T(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{(2t^2+t)\sqrt{2}}{(t^2-t+2)\frac{\sqrt{2}}{2}}=4$입니다.

또한 직선 $y=-x+t+t^2$과 원점 사이의 거리는 $\frac{t^2+t}{\sqrt{2}}$이므로

$S(t)-T(t)=\frac{1}{2}\times\frac{t(t+1)}{\sqrt{2}}\times(\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{AC}})$

$=\frac{t(t+1)}{2}\times\frac{4t+2-(t^2-t+2)}{2}=\frac{-t^2(t+1)(t-5)}{4}$이고

, $\lim_{t\to5}\frac{S(t)-T(t)}{5-t}=\lim_{t\to5}\frac{t^2(t+1)(t-5)}{4(t-5)}=\frac{75}{2}$이므로

구하는 값은

$\lim_{t\to\infty}\frac{tS(t)}{T(t)}+\lim_{t\to5}\frac{S(t)-T(t)}{5-t}=4+\frac{75}{2}=\frac{83}{2}$입니다.

15. 로그함수의 그래프에 대한 문제입니다.
$x>0$에서 두 곡선이 만나는 점의 x좌표를 x_1이라고 하면

$\log_a(\frac{x_1}{2}+1)=\log_a(k-x_1)$, $x_1=\frac{2k-2}{3}$가 성립합니다.

또한 $x<0$에서 두 곡선이 만나는 점의 x좌표는 $-x_1$이므로

$-\log_a(\frac{-x_1}{2}+1)=\log_a(k+x_1)$이 성립하고,

$(x_1+k)(1-\frac{x_1}{2})=1$에 $x_1=\frac{2k-2}{3}$를 대입하면

$(\frac{5k-2}{3})(\frac{4-k}{3})=1$, $-5k^2+22k-8=9$,

$5k^2-22k+17=0$, $(k-1)(5k-17)=0$, $k>1$이므로

$k=\frac{17}{5}$입니다. 즉, ㄱ은 옳은 선지이고, $x_1=\frac{8}{5}$입니다.

선분 AB의 중점의 y좌표를 구하면

$\frac{\log_a\frac{9}{5}+\log_a5}{2}=\log_a3$이고, $\log_a3=2$인 경우

$a=\sqrt{3}$이므로 ㄴ도 옳은 선지입니다.

삼각형 OAB의 넓이는 선분 AB의 중점과 원점 사이의 거리인 $\log_a3$에서 점 A(또는 B)와 y축 사이의 거리인 $\frac{8}{5}$를 곱해서 구할 수 있습니다. 즉, 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{8}{5}\log_a3$이고, 이 값이 자연수인 경우, $\frac{8}{5}\log_a3=n$이라고 하면 $\log_a3=\frac{5}{8}n$,

$a^{\frac{5n}{8}}=3$에서 $a=3^{\frac{8}{5n}}$이고, n=1인 경우 최댓값 $a=3^{\frac{8}{5}}$을 가지므로 ㄷ은 틀린 선지입니다.

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ입니다.

16. 로그의 계산 문제입니다.

$(2+\log_2\frac{5}{4})(\log_5 12-\log_5 3)$에서

$2+\log_2\frac{5}{4}=\log_2(2^2\times\frac{5}{4})=\log_2 5$이고,

$\log_5 12-\log_5 3=\log_5\frac{12}{3}=\log_5 4$이므로

$(2+\log_2\frac{5}{4})(\log_5 12-\log_5 3)=\log_2 5\times\log_5 4$

$=\log_2 5\times 2\log_5 2=2$입니다.

17. 미분계수 문제입니다.

$\lim_{x\to2}\frac{xf(x)-4}{x-2}=8$에서 (분모)→0일 때 (분자)→0이어야 하므로 $2f(2)-4=0$, $f(2)=2$입니다. $4=2f(2)$라고 하면

$\lim_{x\to2}\frac{xf(x)-2f(2)}{x-2}=8$이므로 8은 함수 $xf(x)$의 x=2에서의 미분계수입니다.

함수 $xf(x)$를 미분하면 $xf'(x)+f(x)$이고, $x=2$를 대입하면

$2f'(2)+f(2)=2f'(2)+2=8$이므로 $f'(2)=3$,

$f(2)+f'(2)=5$입니다.

18. 수열의 합을 구하는 문제입니다.

x에 대한 이차방정식 $(4n^2+8n+3)x^2-54x-1=0$의 두 근의 합은 $\frac{54}{4n^2+8n+3}=\frac{54}{(2n+1)(2n+3)}$입니다.

$\frac{54}{(2n+1)(2n+3)}=27\times\frac{(2n+3)-(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$

$=27(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3})$이고,

$\sum_{n=1}^{12}27(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3})$

$=27(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{25}-\frac{1}{27})$

$=27(\frac{1}{3}-\frac{1}{27})=9-1=8$

19. 적분을 활용한 문제입니다.

주어진 곡선과 직선이 만나는 점의 x좌표는 각각 α, 6이며,

$S_1=\int_0^\alpha\{m(x-6)+x^2-6x\}dx$,

$S_2=\int_\alpha^6\{-x^2+6x-m(x-6)\}dx$입니다.

$S_1-S_2=\int_0^6\{m(x-6)+x^2-6x\}dx=0$에서

$[m(\frac{1}{2}x^2-6x)+\frac{1}{3}x^3-3x^2]_0^6=-18m-36=0$, $m=-2$,

$m^2=4$입니다.

20. 도함수에 대한 문제입니다.

$\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h}$는 $f(x)$가 증가하는 상태인지, 감소하는 상태인지에 따라 다르게 나옵니다.

$f(x)$가 증가하는 구간에서는 (절댓값이 충분히 작은) 양수 h에 대하여 $f(x+h)>f(x)$이므로

$\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$입니

다.
$f(x)$가 감소하는 구간에서는 (절댓값이 충분히 작은) 양수 h에 대하여 $f(x+h) < f(x)$이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h}=-\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-f'(x)$$

입니다.

함수 $f(x)=x^3-\frac{15}{2}x^2+12x$에 대하여

$f'(x)=3x^2-15x+12=3(x-1)(x-4)$이므로 $x<1$ 또는 $x>4$에서 함수 $f(x)$는 증가하고, $1<x<4$에서 $f(x)$는 감소하므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h}=\begin{cases} f'(x) & (x<1, x>4) \\ -f'(x) & (1<x<4)\end{cases}$$ 입니다.

또한 $x=1$인 경우에는

$$\lim_{h\to 0+}\frac{|f(1+h)-f(1)|}{h}=-\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

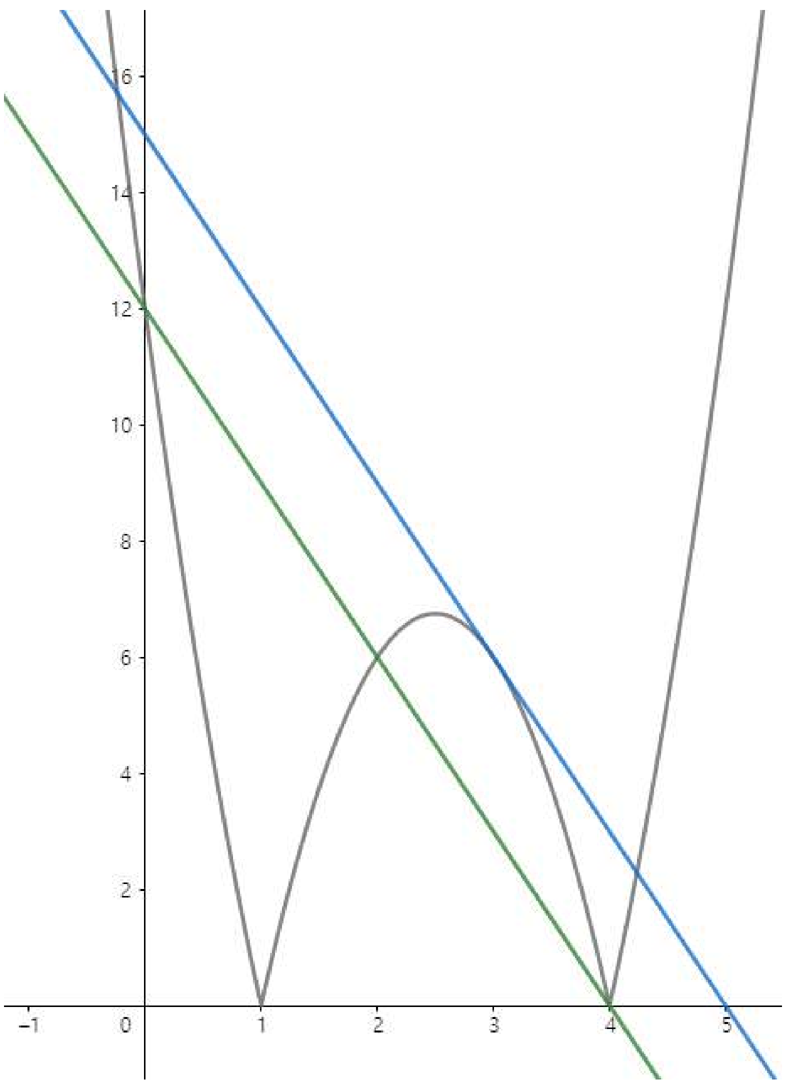
$=-f'(1)=0$이고, $x=4$인 경우에는

$$\lim_{h\to 0+}\frac{|f(4+h)-f(4)|}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$$

$=f'(4)=0$입니다.

즉, $\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h}=|f'(x)|$입니다.

집합 A의 원소의 개수는 x에 대한 방정식 $-3x+k=|f'(x)|$의 실근의 개수와 같습니다.
이때, 직선 $y=-3x+k$와 곡선 $y=|f'(x)|$의 교점의 개수가 3이 되도록 하는 k의 값을 탐색해 보겠습니다.



직선 $y=-3x+k$가 x축 위의 점 (4, 0)을 지나는 경우 그림과 같이 곡선 $y=|f'(x)|$가 서로 다른 세 점에서 만나므로 k=12인 경우 조건을 만족합니다.
또한, 직선 $y=-3x+k$가 곡선 $y=|f'(x)|$에 접하는 경우, k=15인 경우 점 (3, 6)에서 접하게 되므로 조건을 만족합니다.
따라서 모든 k의 값의 합은 12+15=27입니다.

21. 사인법칙과 코사인법칙을 활용한 문제입니다.
선분 BC의 길이는 6이고, 선분 BD의 길이를 x라고 하면$(0<x<3)$ 선분 AD의 길이의 제곱은 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=(3\sqrt{2})^2+x^2-2\times\cos\frac{\pi}{4}\times 3\sqrt{2}\times x=x^2-6x+18$$

입니다.
또한 주어진 그림에서 $\angle BAD=\alpha$라고 하면
$\angle BDA=\frac{3\pi}{4}-\alpha$이고, $\angle EDC=\angle BAD=\alpha$이므로 두 삼각형 ABD, DCE는 서로 닮음입니다.
$\overline{DC}=6-x$라고 하면 $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{DC}:\overline{DE}$이므로
$3\sqrt{2}:\overline{AD}=(6-x):\overline{DE}$, $\overline{DE}=\frac{6-x}{3\sqrt{2}}\overline{AD}$입니다.
삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이는
$\frac{1}{2}\times\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)}=\frac{\overline{AD}}{\sqrt{2}}$이고, 삼각형 DEC의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\times\frac{\overline{AE}}{\sin(\angle ADE)}=\frac{\overline{AE}}{\sqrt{2}}$입니다. 이때 두 삼각형 ABD, ADE의 외접원의 넓이의 차를 구하면
$(\frac{\overline{AD}}{\sqrt{2}})^2\pi-(\frac{\overline{AE}}{\sqrt{2}})^2\pi=\frac{\overline{AD}^2-\overline{AE}^2}{2}\pi=\frac{20}{9}\pi$,
$\overline{AD}^2-\overline{AE}^2=\frac{40}{9}$가 성립합니다.
삼각형 ADE에서 코사인법칙을 적용하면

$$\overline{AE}^2=\overline{AD}^2+\overline{DE}^2-2\times\cos\frac{\pi}{4}\times\overline{AD}\times\overline{DE}$$

$\overline{AE}^2=\overline{AD}^2-\frac{40}{9}$이고, $\overline{DE}=\frac{6-x}{3\sqrt{2}}\overline{AD}$이므로 대입해서 정리하면 $\overline{AD}^2-\frac{40}{9}=\overline{AD}^2+(\frac{36-12x+x^2}{18}-\frac{6-x}{3})\overline{AD}^2$,
$\overline{AD}^2=x^2-6x+18$을 대입하여 정리하면
$(x^2-6x+18)\frac{x^2-6x}{18}+\frac{40}{9}=0$, 양변에 18을 곱하고,
$x^2-6x=t$라고 하면 $t(t+18)+80$, $t^2+18t+80=0$,
$(t+8)(t+10)=0$, $x^2-6x+8=0$ 또는
$x^2-6x+10=0$인데, 방정식 $x^2-6x+10=0$는 실근을 갖지 않으므로 $x^2-6x+8=0$이고, $(x-2)(x-4)=0$에서
$0<x<3$이므로 $x=2$입니다. 이때 $\overline{AD}=\sqrt{10}$이고,
$l=\overline{DE}=\frac{4}{3\sqrt{2}}\times\sqrt{10}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$, $l^2=\frac{80}{9}$에서
$9l^2=80$입니다.
[다른 풀이]
주어진 그림에서 두 삼각형 AED, ADC는
$\angle ADE=\angle ACD=\frac{\pi}{4}$이고, 각 DAC를 공유하므로 서로

닮음입니다.
이때 $\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{AC}}$가 성립합니다.

$\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{2}$이고 $\overline{\mathrm{AD}}^2=\dfrac{40}{9}+\overline{\mathrm{AE}}^2$이므로

$\overline{\mathrm{AD}}^2=\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{AC}}$에서 $\overline{\mathrm{AE}}^2-3\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{AE}}+\dfrac{40}{9}=0$이고, 근의 공식을 사용하여 선분 AE의 길이를 구하면 $\overline{\mathrm{AE}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ 또는 $\overline{\mathrm{AE}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$로, $\overline{\mathrm{AE}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$인 경우 $\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{2}$인데, 점 A와 선분 BC 사이의 거리가 3이므로 $3<\overline{\mathrm{AD}}<3\sqrt{2}$인데, $2\sqrt{2}<3$이므로 모순입니다. 따라서 $\overline{\mathrm{AE}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$입니다.

$\overline{\mathrm{AE}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$인 경우 $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{10}$이고, $x^2-6x+18=10$에서 $0<x<3$이므로 $x=2$입니다.(이하동문)

22. 함수의 최대, 최소의 변화를 관찰하고, 함수의 미분가능성을 추론하는 문제입니다.
함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6(x+1)(x-t)$이고, t는 양수이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, $x=t$에서 극소입니다. 또한 함수 $f(x)$는 $(-\infty,-1)$과 (t,∞)에서 증가하며, $(-1,t)$에서는 감소합니다.
구간 [-2, 5]에서 함수 $f(x)$의 최댓값인 $M(t)$는 $f(-1)$과 $f(5)$ 중 작지 않은 값으로 결정할 수 있으며, 함수 $f(x)$의 최솟값인 $m(t)$는 $f(-2)$와 $f(t)$, $f(5)$ 중 크지 않은 값으로 결정할 수 있습니다.
$f(x)=2x^3-3(t-1)x^2-6tx+9t-5$에 대하여
$f(-1)=-2-3(t-1)+6t+9t-5=12t-4$,
$f(5)=250-75(t-1)-30t+9t-5=-96t+320$이고,
$f(-1)=f(5)$인 경우는 $t=3$이고, 함수 $M(t)$는
$M(t)=\begin{cases}-96t+320 & (0<t<3)\\ 12t-4 & (t\geq 3)\end{cases}$로 나타낼 수 있습니다.
$f(-2)=-16-12(t-1)+12t+9t-5=9t-9$,
$f(t)=-t^3-3t^2+9t-5$이고, $f(-2)=f(t)$인 경우 $t^3+3t^2-4=0$, $(t+2)^2(t-1)=0$이고, $t>0$이므로 $t=1$입니다. 또한 $t>5$인 경우 $m(t)=f(5)=-96t+320$입니다.
이때 함수 $m(t)$는
$m(t)=\begin{cases}9t-9 & (0<t<1)\\ -t^3-3t^2+9t-5 & (1\leq t<5)\\ -96t+320 & (t\geq 5)\end{cases}$로 나타낼 수 있습니다.
함수 $M(t)$의 $t=3$에서의 미분가능성을 조사하면,

$\displaystyle\lim_{t\to 3-}\frac{M(t)-M(3)}{t-3}=\lim_{t\to 3-}\frac{-96t+320-32}{t-3}$

$\displaystyle=\lim_{t\to 3-}\frac{-96(t-3)}{t-3}=-96$이고,

$\displaystyle\lim_{t\to 3+}\frac{M(t)-M(3)}{t-3}=\lim_{t\to 3+}\frac{12t-4-32}{t-3}$

$\displaystyle=\lim_{t\to 3+}\frac{12(t-3)}{t-3}=12$이므로 $\displaystyle\lim_{t\to 3}\frac{M(t)-M(3)}{t-3}$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $M(t)$는 $t=3$에서 미분가능하지 않습니다.
함수 $m(t)$의 $t=1$에서의 미분가능성을 조사하면

$\displaystyle\lim_{t\to 1-}\frac{m(t)-m(1)}{t-1}=\lim_{t\to 1-}\frac{9t-9}{t-1}=\lim_{t\to 1-}\frac{9(t-1)}{t-1}=9$이고,

$\displaystyle\lim_{t\to 1+}\frac{m(t)-m(1)}{t-1}=\lim_{t\to 1+}\frac{-t^3-3t^2+9t-5}{t-1}$

$\displaystyle=\lim_{t\to 1+}\frac{-(t-1)^2(t-5)}{t-1}=0$이므로 $\displaystyle\lim_{t\to 1}\frac{m(t)-m(1)}{t-1}$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $m(t)$는 $t=1$에서 미분가능하지 않습니다.
함수 $m(t)$의 $t=5$에서의 미분가능성을 조사하면

$\displaystyle\lim_{t\to 5-}\frac{m(t)-m(5)}{t-5}=\lim_{t\to 5-}\frac{-t^3-3t^2+9t+155}{t-5}$

$\displaystyle=\lim_{t\to 5-}\frac{-(t-5)(t^2+8t+31)}{t-5}=-96$이고,

$\displaystyle\lim_{t\to 5+}\frac{m(t)-m(5)}{t-5}=\lim_{t\to 5+}\frac{-96t+320+160}{t-5}$

$\displaystyle=\lim_{t\to 5+}\frac{-96(t-5)}{t-5}=-96$으로 $\displaystyle\lim_{t\to 5}\frac{m(t)-m(5)}{t-5}$의 값이 존재하므로 함수 $m(t)$는 $t=5$에서 미분가능합니다.
함수 $\{M(t)-a\}\{m(t)-b\}$가 $t=1$과 $t=3$에서 미분가능하도록 a, b의 값을 정해야 하는데, 주어진 함수는 다음과 같습니다.

$\{M(t)-a\}\{m(t)-b\}=$
$\begin{cases}(-96t+320-a)(9t-9-b) & (0<t<1)\\ (-96t+320-a)(-t^3-3t^2+9t-5-b) & (1\leq t<3)\\ (12t-4-a)(-t^3-3t^2+9t-5-b) & (3\leq t<5)\end{cases}$

$\{M(t)-a\}\{m(t)-b\}=g(t)$라고 하면

$\displaystyle\lim_{t\to 1-}\frac{g(t)-g(1)}{t-1}$
$\displaystyle=\lim_{t\to 1-}\frac{(-96t+320-a)(9t-9-b)+b(224-a)}{t-1}$
$\displaystyle=\lim_{t\to 1-}\frac{9(t-1)(-96t+320-a)+96b(t-1)}{t-1}$
$\displaystyle=\lim_{t\to 1-}\{9(-96t+320-a)+96b\}=9(224-a)+96b$

같은 방법으로 $\displaystyle\lim_{t\to 1+}\frac{g(t)-g(1)}{t-1}=96b$이고,

$9(224-a)+96b=96b$이므로 $a=224$입니다.

$\displaystyle\lim_{t\to 3-}\frac{g(t)-g(3)}{t-3}=96(b+104)$이고,

$\displaystyle\lim_{t\to 3+}\frac{g(t)-g(3)}{t-3}=-12(b-544)$이고,

$96(b+104)=-12(b-544)$에서 $b=-32$입니다.
따라서 $a+2b=224-2\times 32=160$입니다.