

# 수능 특강

수학영역 수학Ⅱ

# 이 책의 차례 Contents

	단원	쪽수
01	함수의 극한	4
02	함수의 연속	18
03	미분계수와 도함수	30
04	도함수의 활용(1)	44
05	도함수의 활용(2)	60
06	부정적분과 정적분	72
07	정적분의 활용	88



## 학생 EBS 교재 문제 검색

EBS 단추에서 문항코드나 사진으로 문제를 검색하면 푸러봇이 해설 영상을 제공합니다.

**[22009-0001]** 22009-0001

1. 아래 그래프를 이해한 내용으로 가장 적절한 것은?

1. 아래 그래프를 이해한 내용으로 가장 적절한 것은?

1. 200  
2. 40  
3. 60  
4. 80

1. 200  
2. 40  
3. 60  
4. 80

※ EBSi 사이트 및 모바일에서 이용이 가능합니다.  
 ※ 사진 검색은 EBSi 고교강의 앱에서만 이용하실 수 있습니다.



## 교사 교사자원센터 교재 자료실

교재 문항 한글 문서(HWP)와 교재의 이미지 파일을 무료로 제공합니다.

### 교재 자료실

- 한글다운로드
- 교재이미지 활용
- 강의활용자료

※ 교사자원센터(<http://teacher.ebsi.co.kr>) 접속 후 '교사인증'을 통해 이용 가능

# 이 책의 구성과 특징 Structure

## • 개념 정리

**01 함수의 극한**

**1. 함수의 수렴과 발산**

① 함수의 수렴

① 함수  $f(x)$ 에서  $x$ 의 값이  $a$ 가 아니면서  $a$ 에 한없이 가까워질 때,  $f(x)$ 의 값이 일정한 값  $L$ 에 한없이 가까워지면 함수  $f(x)$ 는  $L$ 에 수렴한다고 한다. 이때  $L$ 을 함수  $f(x)$ 의  $x=a$ 에서의 극한값 또는 극한이라고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ 또는 } x \rightarrow a \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow L$$

② 함수  $f(x)$ 에서  $x$ 의 값이 한없이 커질 때,  $f(x)$ 의 값이 일정한 값  $L$ 에 한없이 가까워지면 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \text{ 또는 } x \rightarrow \infty \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow L$$

③ 함수  $f(x)$ 에서  $x$ 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때,  $f(x)$ 의 값이 일정한 값  $L$ 에 한없이 가까워지면 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \text{ 또는 } x \rightarrow -\infty \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow L$$

② 함수의 발산

① 함수  $f(x)$ 에서  $x$ 의 값이  $a$ 가 아니면서  $a$ 에 한없이 가까워질 때,  $f(x)$ 의 값이 한없이 커지면 함수  $f(x)$ 는 양의 무한대로 발산한다고 하고,  $f(x)$ 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수  $f(x)$ 는 음의 무한대로 발산한다고 한다. 이것을 각각 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ 또는 } x \rightarrow a \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow \infty, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ 또는 } x \rightarrow a \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow -\infty$$

② 함수  $f(x)$ 에서  $x$ 의 값이 커지거나  $x$ 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, 함수  $f(x)$ 가 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하면 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

**2. 함수의 우극한과 좌극한**

교과서의 핵심 내용을 체계적으로 정리하였다.

## • 예제 & 유제

**예제 1 함수의 극한**

함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값은?

① -2                      ② -1                      ③ 0  
④ 1                        ⑤ 2

**유제**

1 함수  $f(x) = \begin{cases} ax+2 & (x < a) \\ 2x+1 & (x \geq a) \end{cases}$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 8$ 일 때,  $a+8$ 의 값은? (단,  $a, 8$ 는 상수이다.)

① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

예제는 개념을 적용한 대표 문항으로 문제를 해결하는 데 필요한 주요 개념을 풀이 전략으로 제시하여 풀이 과정의 이해를 돕도록 하였고, 유제는 예제와 유사한 내용의 문제나 일반화된 문제를 제시하여 학습 내용과 문제에 대한 연관성을 익히도록 구성하였다.

## • Level 1-Level 2-Level 3

**Level 1 기초 연습**

1 함수  $f(x) = \begin{cases} ax & (x < 1) \\ -x+a & (x \geq 1) \end{cases}$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 1} 2f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ 일 때, 상수  $a$ 의 값은?

① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

2 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다. 정수  $a$  ( $-4 < a < 4$ )에 대하여  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq 0$ 을 만족시키는 모든  $a$ 의 개수는?

① 2                      ② 3                      ③ 4                      ④ 5                      ⑤ 6

3 함수  $f(x)$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 3$ 일 때,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2-4}$ 의 값은?

①  $\frac{1}{4}$                       ②  $\frac{1}{2}$                       ③  $\frac{3}{4}$                       ④ 1                      ⑤  $\frac{5}{4}$

Level 1 기초 연습은 기초 개념의 인지 정도를 확인할 수 있는 문항을 제시하였으며, Level 2 기본 연습은 기본 응용 문항을, 그리고 Level 3 실력 완성은 수학적 사고력과 문제 해결 능력을 함양할 수 있는 문항을 제시하여 대학 수학능력시험 실전에 대비할 수 있도록 구성하였다.

## • 대표 기출 문제

**대표 기출 문제**

함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 함수의 극한을 결정하고, 함수값의 근삿값을 구할 수 있는지를 묻는 문항이다.

다항함수  $f(x)$ 가  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x+1} = 2$ 를 만족시킨다.  $f(1) \leq 12$ 일 때,  $f(2)$ 의 최댓값은? [4점]

① 27                      ② 30                      ③ 33                      ④ 36                      ⑤ 39

함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 함수의 극한을 결정하고, 함수값의 근삿값을 구할 수 있는지를 묻는 문항이다.

다항함수  $f(x)$ 가  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ 을 만족시키고 함수  $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-1} = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

①에서  $x \rightarrow -1$ 일 때 (보통)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (보통)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.  
즉,  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = 0$   
따라서 다항함수  $f(x)$ 는  $x+1$ 을 인수로 가지므로  $f(x) = (x+1)(x^2+ax+b)$  ( $a, b$ 는 상수)로 놓을 수 있다.  
이름  $\textcircled{B}$ 에 대입하면  $(x+1)(x^2+ax+b) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2-1) = 0$ 이므로  $(x+1)(x^2+ax+b) = (x-1)(x+1) = x^2-1$ 이므로  $x^2+ax+b = x-1$ 이므로  $a=0, b=-1$ 이다.

대학수학능력시험과 모의평가 기출 문항으로 구성하였으며 기존 출제 유형을 파악할 수 있도록 출제 경향과 출제 의도를 제시하였다.

# 01 함수의 극한

## 1. 함수의 수렴과 발산

### (1) 함수의 수렴

- ① 함수  $f(x)$ 에서  $x$ 의 값이  $a$ 가 아니면서  $a$ 에 한없이 가까워질 때,  $f(x)$ 의 값이 일정한 값  $L$ 에 한없이 가까워지면 함수  $f(x)$ 는  $L$ 에 수렴한다고 한다. 이때  $L$ 을 함수  $f(x)$ 의  $x=a$ 에서의 극한값 또는 극한이라고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ 또는 } x \rightarrow a \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow L$$

- ② 함수  $f(x)$ 에서  $x$ 의 값이 한없이 커질 때,  $f(x)$ 의 값이 일정한 값  $L$ 에 한없이 가까워지면 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \text{ 또는 } x \rightarrow \infty \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow L$$

- ③ 함수  $f(x)$ 에서  $x$ 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때,  $f(x)$ 의 값이 일정한 값  $L$ 에 한없이 가까워지면 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \text{ 또는 } x \rightarrow -\infty \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow L$$

### (2) 함수의 발산

- ① 함수  $f(x)$ 에서  $x$ 의 값이  $a$ 가 아니면서  $a$ 에 한없이 가까워질 때,  $f(x)$ 의 값이 한없이 커지면 함수  $f(x)$ 는 양의 무한대로 발산한다고 하고,  $f(x)$ 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수  $f(x)$ 는 음의 무한대로 발산한다고 한다. 이것을 각각 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ 또는 } x \rightarrow a \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow \infty, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ 또는 } x \rightarrow a \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow -\infty$$

- ② 함수  $f(x)$ 에서  $x$ 의 값이 한없이 커지거나  $x$ 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, 함수  $f(x)$ 가 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하면 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

## 2. 함수의 우극한과 좌극한

- (1) 함수  $f(x)$ 에서  $x$ 의 값이  $a$ 보다 크면서  $a$ 에 한없이 가까워질 때,  $f(x)$ 의 값이 일정한 값  $L$ 에 한없이 가까워지면  $L$ 을 함수  $f(x)$ 의  $x=a$ 에서의 우극한이라고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \text{ 또는 } x \rightarrow a^+ \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow L$$

- (2) 함수  $f(x)$ 에서  $x$ 의 값이  $a$ 보다 작으면서  $a$ 에 한없이 가까워질 때,  $f(x)$ 의 값이 일정한 값  $L$ 에 한없이 가까워지면  $M$ 을 함수  $f(x)$ 의  $x=a$ 에서의 좌극한이라고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \text{ 또는 } x \rightarrow a^- \text{ 일 때 } f(x) \rightarrow L$$

- (3) 함수  $f(x)$ 의  $x=a$ 에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하면서 그 값이  $L$ 로 서로 같으면 극한값  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재한다. 또 그 역도 성립하므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

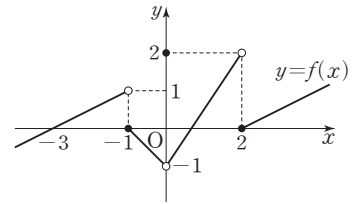
**참고** 함수  $f(x)$ 의  $x=a$ 에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하더라도 그 값이 같지 않으면 극한값  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 는 존재하지 않는다.

**예제 1** 함수의 극한

함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2



**풀이 전략**

함수  $y=f(x)$ 의 그래프를 이용하여 좌극한, 우극한, 극한값을 구한다.

**풀이**

함수  $y=f(x)$ 의 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$$

또한  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$ 이므로  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

따라서  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 + 0 + (-1) = 0$

**답** ③

**유제**

정답과 풀이 4쪽

**1**

[22009-0001]

함수  $f(x) = \begin{cases} ax+2 & (x < a) \\ 2x+1 & (x \geq a) \end{cases}$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 일 때,  $a+b$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

**2**

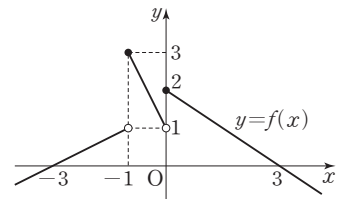
[22009-0002]

함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x+1) + \lim_{x \rightarrow -1^+} f(-x)$$

의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5



3. 함수의 극한에 대한 성질

두 함수  $f(x), g(x)$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$  ( $\alpha, \beta$ 는 실수)일 때

- (1)  $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c\alpha$  (단,  $c$ 는 상수)
- (2)  $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha + \beta$
- (3)  $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha - \beta$
- (4)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha\beta$

(5)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$  (단,  $\beta \neq 0$ )

**예** ①  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 2x = \lim_{x \rightarrow 1} x \times \lim_{x \rightarrow 1} x - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \times 1 - 2 \times 1 = -1$

②  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-1}{x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x-1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1} = \frac{3 \times 1 - 1}{1 + 1} = 1$

**참고** (1) 함수의 극한에 대한 성질은  $x \rightarrow a+, x \rightarrow a-, x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$ 인 경우에도 성립한다.  
 (2) 함수의 극한에 대한 성질은 각 함수의 극한값이 모두 존재할 때에만 성립한다.

①  $c=0, f(x) = \frac{1}{x}$ 이면  $\lim_{x \rightarrow 0} cf(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(0 \times \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ 이지만

극한값  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 가 존재하지 않으므로  $\lim_{x \rightarrow 0} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 가 성립하지 않는다.

②  $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = -\frac{1}{x}$ 이면  $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{\frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x}\right)\right\} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ 이지만

두 극한값  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 가 모두 존재하지 않으므로  $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 가 성립하지 않는다.

③  $f(x) = x, g(x) = \frac{1}{x}$ 이면  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \times \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ 이지만

극한값  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 가 존재하지 않으므로  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 가 성립하지 않는다.

④  $f(x) = x, g(x) = \frac{1}{x}$ 이면  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ 이지만

극한값  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 가 존재하지 않으므로  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 0} g(x)}$ 가 성립하지 않는다.

## 예제 2 함수의 극한에 대한 성질

두 함수  $f(x), g(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x+1)f(x) = 12, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x)+g(x)}{f(x)} = 2$$

를 만족시킬 때,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-g(x)}$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{5}$                       ②  $\frac{2}{5}$                       ③  $\frac{3}{5}$                       ④  $\frac{4}{5}$                       ⑤ 1

### 풀이 전략

두 함수  $f(x), g(x)$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$  ( $\alpha, \beta$ 는 실수)일 때

- (1)  $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta$                       (2)  $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = \alpha - \beta$   
 (3)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \alpha\beta$                       (4)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$  (단,  $\beta \neq 0$ )

### 풀이

$\lim_{x \rightarrow 1} (2x+1)f(x) = 12$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+1)f(x)}{2x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (2x+1)f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x+1)} = \frac{12}{2+1} = 4$$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x)+g(x)}{f(x)} = 2$ 에서  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ 3 + \frac{g(x)}{f(x)} \right] = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \left( 3 + \frac{g(x)}{f(x)} \right) - 3 \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left( 3 + \frac{g(x)}{f(x)} \right) - \lim_{x \rightarrow 1} 3 = 2 - 3 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ f(x) \times \frac{g(x)}{f(x)} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)} = 4 \times (-1) = -4$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{4}{1^2 - (-4)} = \frac{4}{5}$$

답 ④

## 유제

정답과 풀이 4쪽

### 3

[22009-0003]

함수  $f(x)$ 가  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)f(x) = \frac{1}{3}$ 을 만족시킬 때,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x^2-1)f(x)}$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{2}$                       ② 1                      ③  $\frac{3}{2}$                       ④ 2                      ⑤  $\frac{5}{2}$

### 4

[22009-0004]

두 함수  $f(x), g(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\} = 2, \lim_{x \rightarrow 1} [\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2] = \frac{2}{3}$$

를 만족시킬 때,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2x-g(x)}$ 의 값은?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

4. 함수의 극한값의 계산

(1)  $\frac{0}{0}$  꼴의 극한값

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 에서  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 인 경우

- ①  $f(x), g(x)$ 가 다항식이면 각각 인수분해하여 공통인수를 약분한 후 극한값을 구한다.
- ②  $f(x)$  또는  $g(x)$ 가 무리식이면 무리식이 있는 쪽을 유리화한 다음 분모, 분자의 공통인수를 약분한 후 극한값을 구한다.

(2)  $\frac{\infty}{\infty}$  꼴의 극한값

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 에서  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ 인 경우

$f(x), g(x)$ 가 다항식이면 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어 극한값을 구한다.

**참고**  $f(x), g(x)$ 가 다항식이면  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 는 다음과 같다.

- ① (분자의 차수) < (분모의 차수)이면  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- ② (분자의 차수) = (분모의 차수)이면  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(f(x) \text{의 최고차항의 계수})}{(g(x) \text{의 최고차항의 계수})}$
- ③ (분자의 차수) > (분모의 차수)이면  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$  또는  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

**예**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{3x^2+2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{2+0}{3+0-0} = \frac{2}{3}$

(3)  $\infty - \infty$  꼴의 극한값

$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - g(x)\}$ 에서  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ 인 경우

- ①  $f(x) - g(x)$ 가 다항식이면  $f(x) - g(x)$ 의 최고차항으로 묶어 극한값을 구한다.
- ②  $f(x) - g(x)$ 가 무리식이면 분모가 1인 분수 꼴의 식으로 생각하여 분자를 유리화한 후 극한값을 구한다.

**예**  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+2x) - x^2}{\sqrt{x^2+2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x} + x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 1} = \frac{2}{1+1} = 1$

(4)  $0 \times \infty$  꼴의 극한값

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ 에서  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ 인 경우는 식을  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \frac{c}{\infty}$  ( $c$ 는 상수)의 꼴로 변형하여 극한값을 구한다.

**예**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left\{ \frac{(x+2) - 2}{2(x+2)} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left\{ \frac{x}{2(x+2)} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(x+2)} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$



### 예제 3 함수의 극한값의 계산

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-9}$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{36}$                       ②  $\frac{1}{18}$                       ③  $\frac{1}{12}$                       ④  $\frac{1}{9}$                       ⑤  $\frac{5}{36}$

**풀이 전략**

분자를 유리화하고 분모, 분자의 공통인수를 약분한 후 극한값을 구한다.

**풀이**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x^2-9)(\sqrt{x+6}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+6}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+3)(\sqrt{x+6}+3)} \\ &= \frac{1}{6 \times (\sqrt{9}+3)} \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

답 ①

### 유제

정답과 풀이 4쪽

**5**

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)(x^2-2x-3)}{x^2+x}$ 의 값은?

[22009-0005]

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

**6**

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}-x}$ 의 값은?

[22009-0006]

- ①  $\frac{1}{4}$                       ②  $\frac{1}{2}$                       ③  $\frac{3}{4}$                       ④ 1                      ⑤  $\frac{5}{4}$

### 5. 미정계수의 결정

(1) 두 함수  $f(x), g(x)$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$  ( $\alpha$ 는 실수)이고

①  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이면  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 이다.

②  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 이고  $\alpha \neq 0$ 이면  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이다.

**설명** ①  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$  ( $\alpha$ 는 실수)이고,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이면 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \times g(x) \right\} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha \times 0 = 0$$

②  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$  ( $\alpha$ 는 0이 아닌 실수)이면  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\alpha}$ 이다.

이때  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 이므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} \times f(x) \right\} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{1}{\alpha} \times 0 = 0$$

**예** ①  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + a}{x - 1} = 2$  ( $a$ 는 상수)이면  $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 1 - 1 = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + a) = 1 + a = 0 \text{ 이어야 한다.}$$

따라서  $a = -1$ 이다.

②  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 + ax} = \frac{1}{2}$  ( $a$ 는 상수)이면  $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 2 - 2 = 0$ 이고  $\frac{1}{2} \neq 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax) = 4 + 2a = 0 \text{ 이어야 한다.}$$

따라서  $a = -2$ 이다.

(2) 두 다항함수  $f(x), g(x)$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$  ( $\alpha$ 는 0이 아닌 실수)이면

$$(\text{f(x)의 차수}) = (\text{g(x)의 차수}) \text{ 이고 } \alpha = \frac{(\text{f(x)의 최고차항의 계수})}{(\text{g(x)의 최고차항의 계수})} \text{ 이다.}$$

**예**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 - x}{3x^2 + 1} = 2$  ( $a$ 는 상수)이면  $\frac{a}{3} = 2$ 에서  $a = 6$ 이다.

### 6. 함수의 극한의 대소 관계

두 함수  $f(x), g(x)$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$  ( $\alpha, \beta$ 는 실수)일 때,  $a$ 에 가까운 모든 실수  $x$ 에 대하여

(1)  $f(x) \leq g(x)$ 이면  $\alpha \leq \beta$ 이다.

(2) 함수  $h(x)$ 에 대하여  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ 이고  $\alpha = \beta$ 이면  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$ 이다.

## 예제 4 미정계수의 결정

www.ebsi.co.kr

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = 6$ 일 때,  $a + b$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

- ① -7                      ② -6                      ③ -5                      ④ -4                      ⑤ -3

풀이  
전략

두 함수  $f(x), g(x)$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 의 값이 존재하고  $x \rightarrow a$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이면 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

풀이

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = 6 \quad \cdots \textcircled{1}$$

①에서  $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b = 0 \text{에서}$$

$$b = -2(a + 2) \quad \cdots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax - 2(a + 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + a + 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + a + 2) \\ &= a + 4 = 6 \end{aligned}$$

따라서  $a = 2$ 이고 ②에서  $b = -2 \times (2 + 2) = -8$ 이므로

$$a + b = 2 + (-8) = -6$$

답 ②

## 유제

정답과 풀이 5쪽

7

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 + ax + b} = \frac{1}{6}$ 일 때,  $a - b$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

[22009-0007]

- ① 6                      ② 7                      ③ 8                      ④ 9                      ⑤ 10

8

다항함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

[22009-0008]

(가) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $|f(x) - x^2| \leq 2$

$$(나) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{4x^2 + 4x - 3} = \frac{1}{8}$$

$f(1)$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{4}$                       ②  $\frac{1}{2}$                       ③  $\frac{3}{4}$                       ④ 1                      ⑤  $\frac{5}{4}$

[22009-0009]

1 함수  $f(x) = \begin{cases} ax & (x < 1) \\ -x+a & (x \geq 1) \end{cases}$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 1^-} 2f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ 일 때, 상수  $a$ 의 값은?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

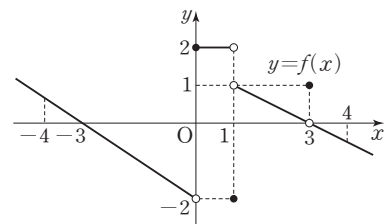
[22009-0010]

2 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다. 정수  $a$  ( $-4 < a < 4$ )에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \leq 0$$

을 만족시키는 모든  $a$ 의 개수는?

- ① 2                      ② 3                      ③ 4  
④ 5                      ⑤ 6



[22009-0011]

3 함수  $f(x)$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 3$ 일 때,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2-4}$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{4}$                       ②  $\frac{1}{2}$                       ③  $\frac{3}{4}$                       ④ 1                      ⑤  $\frac{5}{4}$

[22009-0012]

4  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x-1} \left( \frac{1}{x} - 1 \right)$ 의 값은?

- ① -5                      ② -4                      ③ -3                      ④ -2                      ⑤ -1

[22009-0013]

5  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^2 - (a+3)x + 3a} = -2$ 일 때, 상수  $a$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{2}$                       ② 1                      ③  $\frac{3}{2}$                       ④ 2                      ⑤  $\frac{5}{2}$

[22009-0014]

6  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+a-3}}{x-2} = b$ 일 때,  $ab$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

- ①  $\frac{1}{3}$                       ②  $\frac{2}{3}$                       ③ 1                      ④  $\frac{4}{3}$                       ⑤  $\frac{5}{3}$

[22009-0015]

7 최고차항의 계수가 1인 이차함수  $f(x)$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x)-4}{x-2} = 4$ 일 때,  $f(3)$ 의 값은?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

[22009-0016]

8 다항함수  $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2-1} = 1, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2-1} = 2$$

를 만족시킬 때,  $f(3)$ 의 값은?

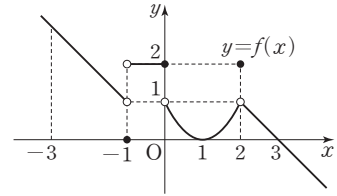
- ① 8                      ② 9                      ③ 10                      ④ 11                      ⑤ 12

[22009-0017]

1 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다. 정수  $a$  ( $-3 < a < 3$ )에 대하여

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{f(x)}$ 의 값이 존재하도록 하는 모든  $a$ 의 개수는?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3  
④ 4                      ⑤ 5



[22009-0018]

2 일차함수  $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x)\}^2 - 4}{\sqrt{f(-x)} - 2} = k$$

를 만족시킬 때, 0이 아닌 상수  $k$ 의 값은?

- ① -16                  ② -14                  ③ -12                  ④ -10                  ⑤ -8

[22009-0019]

3  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)\{f(x) - x^2\}}{2x^2} = 3$ 을 만족시키는 상수함수가 아닌 다항함수  $f(x)$ 에 대하여  $f(1)$ 의 값은?

- ① 5                      ② 6                      ③ 7                      ④ 8                      ⑤ 9

[22009-0020]

4 다항함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $f(2)$ 의 값을 구하시오.

(가) 모든 양의 실수  $x$ 에 대하여  $2x^2 - 3x \leq f(x) - x^3 \leq 2x^2 + 3$

(나)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 5$

[22009-0021]

5 삼차함수  $f(x)$ 와 일차함수  $g(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$f(x) = 2x^3 - x^2g(x) - 2x$$

를 만족시킨다.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x) + g(x)} = -\frac{1}{2}$  일 때,  $g(-3)$ 의 값은?

- ① 6                      ② 7                      ③ 8                      ④ 9                      ⑤ 10

[22009-0022]

6 다항식  $f(x)$ 를  $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을  $Q(x)$ , 나머지를  $R(x)$ 라 하자.

$Q(2) = R(2)$ 일 때,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 2x^2}{f(x) - R(x)} = k$ 이다. 상수  $k$ 의 값은?

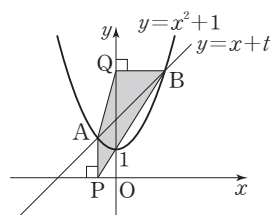
- ①  $\frac{3}{4}$                       ② 1                      ③  $\frac{5}{4}$                       ④  $\frac{3}{2}$                       ⑤  $\frac{7}{4}$

[22009-0023]

7 그림과 같이 곡선  $y = x^2 + 1$ 과 직선  $y = x + t$  ( $t > \frac{3}{4}$ )이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 점 A에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을 P, 점 B에서  $y$ 축에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 삼각형 APB와 삼각형 ABQ의 넓이를 각각  $S(t)$ ,  $T(t)$ 라 할 때,

$\lim_{t \rightarrow \frac{3}{4}^+} \frac{T(t)}{S(t)}$ 의 값은? (단, 점 A의  $x$ 좌표는 점 B의  $x$ 좌표보다 작다.)

- ①  $\frac{1}{5}$                       ②  $\frac{2}{5}$                       ③  $\frac{3}{5}$                       ④  $\frac{4}{5}$                       ⑤ 1



[22009-0024]

- 1 두 실수  $a, b$ 와 최고차항의 계수가 1인 오차함수  $f(x)$ 에 대하여 두 집합  $A, B$ 를 각각

$$A = \left\{ a \mid \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3(x-1)}{f(x)} \text{의 값이 존재한다.} \right\},$$

$$B = \left\{ b \mid \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{x^2(x-1)^4} \text{의 값이 존재하지 않는다.} \right\}$$

라 하자.  $0 \in (A-B)$ ,  $1 \in (B-A)$ 이고  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 18$ 일 때,  $f(4)$ 의 값을 구하시오.

[22009-0025]

- 2 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 에 대하여 함수  $y=f(x)$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를  $y=g(x)$ 라 하자.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)g(x)} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{(x-1)g(x)} = k$$

일 때, 상수  $k$ 의 값은?

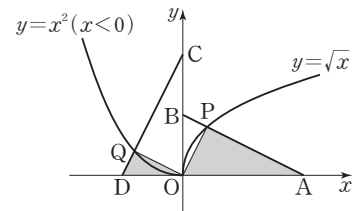
- ①  $-\frac{7}{4}$       ②  $-\frac{3}{2}$       ③  $-\frac{5}{4}$       ④  $-1$       ⑤  $-\frac{3}{4}$

[22009-0026]

- 3 양의 실수  $t$ 에 대하여 좌표평면 위에 네 점  $A(t, 0)$ ,  $B(0, 1)$ ,  $C(0, t)$ ,  $D(-1, 0)$ 이 있다. 그림과 같이 곡선  $y=\sqrt{x}$ 가 선분  $AB$ 와 만나는 점을  $P$ , 곡선  $y=x^2 (x < 0)$ 이 선분  $CD$ 와 만나는 점을  $Q$ 라 하자. 원점  $O$ 에 대하여 삼각형  $OAP$ 의 넓이를  $S(t)$ , 삼각형  $OQD$ 의 넓이를  $T(t)$ 라 할 때,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{tT(t)}{S(t)} \text{의 값은?}$$

- ①  $\frac{1}{4}$       ②  $\frac{1}{2}$       ③  $\frac{3}{4}$       ④  $1$       ⑤  $\frac{5}{4}$





**출제 경향**

함수의 그래프 또는 함수에서의 좌극한, 우극한, 극한값을 구하는 문제, 간단한 함수의 극한값을 구하는 문제, 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 함수의 극한값을 구하거나 함수식을 결정하는 문제, 방정식이나 도형과 관련된 극한값을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

다항함수  $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2$$

를 만족시킨다.  $f(1) \leq 12$ 일 때,  $f(2)$ 의 최댓값은? [4점]

- ① 27                      ② 30                      ③ 33                      ④ 36                      ⑤ 39

2020학년도 대수능 9월 모의평가

**출제 의도** 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 함수식을 결정하고, 함수값의 최댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이** 다항함수  $f(x)$ 가  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1$ 을 만족시키므로 함수  $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에서  $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉,  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = 0$

따라서 다항함수  $f(x)$ 는  $x+1$ 을 인수로 가지므로

$$f(x) = (x+1)(x^2+ax+b) \quad (a, b \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

이를 ①에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2+ax+b)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2+ax+b) = 1-a+b$$

이므로

$$1-a+b=2 \text{에서 } b=a+1$$

이때  $f(1) = 2(1+a+b) = 2(2a+2) = 4(a+1)$ 이므로

$$4(a+1) \leq 12 \text{에서 } a \leq 2$$

따라서

$$f(2) = 3(4+2a+b) = 3(3a+5) \leq 3 \times (3 \times 2 + 5) = 33 \quad (\text{등호는 } a=2 \text{일 때 성립한다.})$$

이므로  $f(2)$ 의 최댓값은 33이다.

③

# 02 함수의 연속

## 1. 함수의 연속과 불연속

### (1) 함수의 연속

함수  $f(x)$ 가 실수  $a$ 에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, 함수  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 연속이라고 한다.

(i) 함수  $f(x)$ 가  $x=a$ 에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재한다.

(iii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

**참고** 함수  $f(x)$ 가  $x=a$ 에서 연속이다.  $\iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

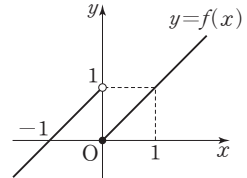
### (2) 함수의 불연속

함수  $f(x)$ 가  $x=a$ 에서 연속이 아닐 때, 함수  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 불연속이라고 한다.

**예** ① 함수  $f(x) = \begin{cases} x+1 & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$  은  $x=0$ 에서  $f(0)=0$ 으로 정의되어 있지만

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \text{ 이므로}$$

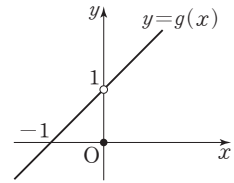
극한값  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 가 존재하지 않는다. 따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 불연속이다.



② 함수  $g(x) = \begin{cases} x+1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$  은  $x=0$ 에서  $g(0)=0$ 으로 정의되어 있고,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1 \text{로 극한값 } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \text{가 존재하지만 } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq g(0) \text{이다.}$$

따라서 함수  $g(x)$ 는  $x=0$ 에서 불연속이다.



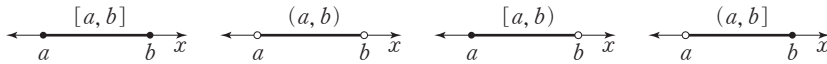
## 2. 구간

두 실수  $a, b$  ( $a < b$ )에 대하여

(1) 실수의 집합  $\{x | a \leq x \leq b\}$ ,  $\{x | a < x < b\}$ ,  $\{x | a \leq x < b\}$ ,  $\{x | a < x \leq b\}$ 를 구간이라고 하며, 이것을 각각 기호로

$$[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$$

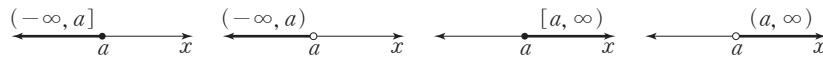
와 같이 나타낸다. 이때  $[a, b]$ 를 닫힌구간,  $(a, b)$ 를 열린구간이라고 하며,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ 를 반닫힌 구간 또는 반열린 구간이라고 한다.



(2) 실수의 집합  $\{x | x \leq a\}$ ,  $\{x | x < a\}$ ,  $\{x | x \geq a\}$ ,  $\{x | x > a\}$ 도 구간이라고 하며, 이것을 각각 기호로

$$(-\infty, a], (-\infty, a), [a, \infty), (a, \infty)$$

와 같이 나타낸다.



(3) 실수 전체의 집합은 기호로  $(-\infty, \infty)$ 와 같이 나타낸다.

예제 1

함수의 연속

함수  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x+a}{x-2} & (x \neq 2) \\ b & (x = 2) \end{cases}$  가  $x=2$ 에서 연속일 때,  $a+b$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

풀이 전략

실수  $a$ 에 대하여 함수  $f(x)$ 가  $x=a$ 에서 연속이면  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 이다.

풀이

함수  $f(x)$ 가  $x=2$ 에서 연속이므로  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x+a}{x-2} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에서  $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-x+a) = 4-2+a=0 \text{에서 } a = -2$$

$a = -2$ 를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 2+1 = 3 \end{aligned}$$

따라서  $a+b = -2+3 = 1$

답 ①

유제

정답과 풀이 12쪽

1

[22009-0027]

함수  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+a}-3}{x-1} & (x \neq 1) \\ b & (x = 1) \end{cases}$  이  $x=1$ 에서 연속일 때,  $ab$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

- ①  $\frac{1}{3}$                       ②  $\frac{2}{3}$                       ③ 1                      ④  $\frac{4}{3}$                       ⑤  $\frac{5}{3}$

2

[22009-0028]

함수  $f(x) = \begin{cases} 3x+a & (x < 1) \\ x+7 & (x \geq 1) \end{cases}$  이  $x=1$ 에서 연속일 때, 상수  $a$ 의 값은?

- ① 4                      ② 5                      ③ 6                      ④ 7                      ⑤ 8

## 3. 구간에서의 연속

함수  $f(x)$ 가 어떤 구간에 속하는 모든 실수  $x$ 에서 연속일 때, 함수  $f(x)$ 는 그 구간에서 연속 또는 그 구간에서 연속함수라고 한다.

## (1) 열린구간에서의 연속

함수  $f(x)$ 가 열린구간  $(a, b)$ 에 속하는 모든 실수  $x$ 에서 연속일 때, 함수  $f(x)$ 는 열린구간  $(a, b)$ 에서 연속이라고 한다.

## (2) 닫힌구간에서의 연속

함수  $f(x)$ 가 다음 두 조건을 모두 만족시킬 때, 함수  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이라고 한다.

- ① 함수  $f(x)$ 는 열린구간  $(a, b)$ 에서 연속이다.      ②  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ,  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

## 4. 연속함수의 성질

두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가  $x=a$ 에서 연속이면 다음 함수도  $x=a$ 에서 연속이다.

- (1)  $cf(x)$  (단,  $c$ 는 상수)      (2)  $f(x)+g(x)$ ,  $f(x)-g(x)$   
 (3)  $f(x)g(x)$       (4)  $\frac{f(x)}{g(x)}$  (단,  $g(a) \neq 0$ )

**설명** 함수의 연속의 정의와 함수의 극한에 대한 성질을 이용하면 연속함수의 성질이 성립함을 보일 수 있다.

두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가  $x=a$ 에서 연속이면  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ 이므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

- (1)  $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cf(a)$  ( $c$ 는 상수)이므로 함수  $cf(x)$ 는  $x=a$ 에서 연속이다.  
 (2)  $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)+g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) + g(a)$   
 $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)-g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) - g(a)$   
 이므로 두 함수  $f(x)+g(x)$ ,  $f(x)-g(x)$ 는  $x=a$ 에서 연속이다.  
 (3)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a)g(a)$ 이므로 함수  $f(x)g(x)$ 는  $x=a$ 에서 연속이다.  
 (4)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$  ( $g(a) \neq 0$ )이므로 함수  $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는  $x=a$ 에서 연속이다.

**참고** ① 두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 어떤 구간에서 연속이면 함수

$$cf(x) \text{ (} c \text{는 상수), } f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \text{ (} g(x) \neq 0 \text{)}$$

도 그 구간에서 연속이다.

② 함수  $y=x$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 연속함수의 성질 (3)에 의하여 함수

$$y=x^2, y=x^3, y=x^4, \dots, y=x^n \text{ (} n \text{은 2 이상의 자연수)}$$

도 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때 상수함수도 실수 전체의 집합에서 연속이므로 연속함수의 성질 (1), (2)에 의하여 다항함수

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ (} a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0 \text{은 상수)}$$

도 실수 전체의 집합에서 연속이다. 즉, 모든 다항함수는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

**예제 2** 연속함수의 성질

함수  $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & (|x| < 1) \\ a & (|x| = 1) \\ x+b & (|x| > 1) \end{cases}$ 에 대하여 함수  $f(x)f(-x)$ 가  $x=1$ 에서 연속일 때,  $ab$ 의 값은?

(단,  $a, b$ 는 상수이고,  $a > 0, b > 0$ 이다.)

- ① 2                      ②  $2\sqrt{2}$                       ③  $2\sqrt{3}$                       ④ 4                      ⑤  $2\sqrt{5}$

**풀이 전략**

실수  $a$ 에 대하여 함수  $f(x)g(x)$ 가  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = f(a)g(a)$ 를 만족시키면 함수  $f(x)g(x)$ 는  $x=a$ 에서 연속이다.

**풀이**

함수  $f(x)f(-x)$ 가  $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)f(-x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)f(-x) = f(1)f(-1)$$

이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(-x) = \lim_{s \rightarrow -1^+} f(s) = \lim_{s \rightarrow -1^+} (s^2+1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+b) = 1+b, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(-x) = \lim_{t \rightarrow -1^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow -1^-} (t+b) = -1+b$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)f(-x) = 2 \times 2 = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)f(-x) = (1+b)(-1+b) = b^2 - 1$$

이고,  $f(1)f(-1) = a \times a = a^2$

따라서  $4 = b^2 - 1 = a^2$

(i)  $a^2 = 4$ 에서  $a = -2$  또는  $a = 2$ 이고,  $a > 0$ 이므로  $a = 2$

(ii)  $b^2 - 1 = 4$ 에서  $b = -\sqrt{5}$  또는  $b = \sqrt{5}$ 이고,  $b > 0$ 이므로  $b = \sqrt{5}$

따라서  $ab = 2\sqrt{5}$

**답** ⑤

**유제**

정답과 풀이 12쪽

**3**

[22009-0029]

두 함수  $f(x) = \begin{cases} x^2+2x & (x < 1) \\ -2x+1 & (x \geq 1) \end{cases}$ ,  $g(x) = 2x^2+ax$ 에 대하여 함수  $f(x)g(x)$ 가  $x=1$ 에서 연속이

되도록 하는 상수  $a$ 의 값은?

- ① -5                      ② -4                      ③ -3                      ④ -2                      ⑤ -1

**4**

[22009-0030]

함수  $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & (x < a) \\ -x+2 & (x \geq a) \end{cases}$ 에 대하여 함수  $\{f(x)+1\}^2$ 이  $x=a$ 에서 연속이 되도록 하는 모든 실

수  $a$ 의 값의 합은?

- ①  $\frac{1}{3}$                       ②  $\frac{2}{3}$                       ③ 1                      ④  $\frac{4}{3}$                       ⑤  $\frac{5}{3}$

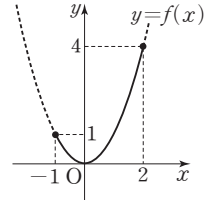
5. 최대·최소 정리

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이면 함수  $f(x)$ 는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

**예** 함수  $f(x)=x^2$ 은 닫힌구간  $[-1, 2]$ 에서 연속이므로 함수  $f(x)$ 는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이때

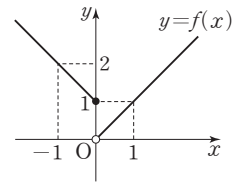
$$f(-1)=1, f(0)=0, f(2)=4$$

이고, 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같으므로 닫힌구간  $[-1, 2]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 최댓값은 4, 최솟값은 0이다.



**참고** ① 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이 아니면 함수  $f(x)$ 는 이 구간에서 최댓값 또는 최솟값을 갖지 않을 수도 있다.

예를 들어  $x=0$ 에서 불연속인 함수  $f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x \leq 0) \\ x & (x > 0) \end{cases}$ 은 닫힌구간  $[-1, 1]$ 에서 최솟값을 갖지 않는다.



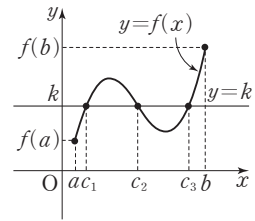
② 함수  $f(x)$ 가 열린구간  $(a, b)$  또는 구간  $[a, b)$  또는 구간  $(a, b]$ 에서 연속인 경우에는 함수  $f(x)$ 가 이 구간에서 최댓값 또는 최솟값을 갖지 않을 수도 있다.

예를 들어 실수 전체의 집합에서 연속인 함수  $f(x)=x^2$ 은 열린구간  $(-1, 2)$  또는 구간  $[-1, 2)$ 에서 연속이고 두 구간에서 최솟값  $f(0)=0$ 을 갖지만 두 구간에서 최댓값을 갖지 않는다.

6. 사잇값의 정리

(1) 사잇값의 정리

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고  $f(a) \neq f(b)$ 이면  $f(a)$ 와  $f(b)$  사이의 임의의 값  $k$ 에 대하여  $f(c)=k$ 인  $c$ 가 열린구간  $(a, b)$ 에 적어도 하나 존재한다.



**예** 함수  $f(x)=x^2$ 은 닫힌구간  $[0, 2]$ 에서 연속이고  $f(0)=0, f(2)=4$ 이므로  $f(c)=2$ 인  $c$ 가 열린구간  $(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

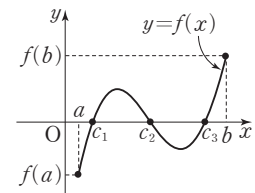
이때  $f(c)=c^2=2$ 에서  $0 < \sqrt{2} < 2$ 인  $c=\sqrt{2}$ 가 존재한다.

(2) 사잇값의 정리의 활용

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고  $f(a)f(b) < 0$ 이면 사잇값의 정리에 의하여  $f(c)=0$ 인  $c$ 가 열린구간  $(a, b)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식  $f(x)=0$ 은 열린구간  $(a, b)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

**설명** 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고  $f(a)f(b) < 0$ 이면  $f(a)$ 와  $f(b)$ 의 부호가 서로 다르므로  $f(a)$ 와  $f(b)$  사이의 값인 0에 대하여  $f(c)=0$ 인  $c$ 가 열린구간  $(a, b)$ 에 적어도 하나 존재한다.



함수  $f(x) = \begin{cases} x+1 & (x < -1) \\ ax^2+x & (-1 \leq x < 1) \\ ax+b & (x \geq 1) \end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 닫힌구간  $[-1, 2]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 하자.  $4(M+m)$ 의 값을 구하시오. (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

풀이 전략

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이면 최대 · 최소 정리에 의하여 함수  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

풀이

함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수  $f(x)$ 는  $x=-1, x=1$ 에서 연속이다.

함수  $f(x)$ 가  $x=-1$ 에서 연속이므로  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax^2+x) = a-1, \quad f(-1) = a-1$$

이므로  $a-1=0$ 에서  $a=1$

함수  $f(x)$ 가  $x=1$ 에서 연속이므로  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+b) = 1+b, \quad f(1) = 1+b$$

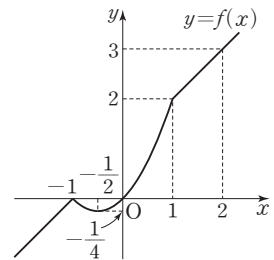
이므로  $1+b=2$ 에서  $b=1$

$$\text{즉, } f(x) = \begin{cases} x+1 & (x < -1) \\ x^2+x & (-1 \leq x < 1) \\ x+1 & (x \geq 1) \end{cases} \text{이고, 함수 } f(x) \text{가 닫힌구간 } [-1, 2] \text{에서 연속이}$$

므로 최대 · 최소 정리에 의하여 함수  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[-1, 2]$ 에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

이때  $-1 \leq x < 1$ 에서  $f(x) = x^2+x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ 이므로 닫힌구간  $[-1, 2]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 최댓값  $M = f(2) = 3$ 이고 최솟값  $m = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

따라서  $4(M+m) = 4 \times \left\{3 + \left(-\frac{1}{4}\right)\right\} = 11$



답 11

유제

정답과 풀이 12쪽

5

방정식  $x^3+2x-8=0$ 은 오직 하나의 실근  $\alpha$ 를 갖는다. 다음 열린구간 중에서  $\alpha$ 가 속하는 구간은?

[22009-0031]

- ①  $(-2, -1)$     ②  $(-1, 0)$     ③  $(0, 1)$     ④  $(1, 2)$     ⑤  $(2, 3)$

[22009-0032]

- 1 정의역이 실수 전체의 집합인 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 연속이다. 함수

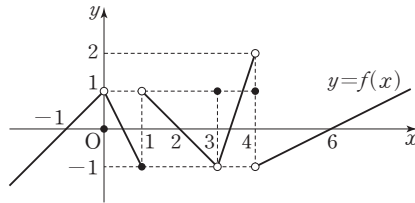
$$g(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 - f(x) & (x < 1) \\ (x^2 + 1)f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 14$ 일 때,  $f(1)$ 의 값은?

- ① 6                      ② 7                      ③ 8                      ④ 9                      ⑤ 10

[22009-0033]

- 2 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



정수  $a$  ( $-1 < a < 6$ )에 대하여 함수  $|f(x)|$ 가  $x=a$ 에서 연속이 되도록 하는 모든  $a$ 의 개수는?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

[22009-0034]

- 3 함수

$$f(x) = \begin{cases} a(x-4) & (x \neq a) \\ -4 & (x = a) \end{cases}$$

가  $x=a$ 에서 연속일 때, 상수  $a$ 의 값은?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

[22009-0035]

- 4 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{\sqrt{x-2}} & (x \neq 4) \\ b & (x = 4) \end{cases}$$

가  $x=4$ 에서 연속일 때,  $a+b$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

- ① -2                      ② -1                      ③ 0                      ④ 1                      ⑤ 2



[22009-0036]

## 5 함수

$$f(x) = \begin{cases} ax+4 & (x < 1) \\ 6 & (x = 1) \\ -3x+b & (x > 1) \end{cases}$$

이  $x=1$ 에서 연속일 때, 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

(단,  $a, b$ 는 상수이다.)

[22009-0037]

6 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다. 함수  $\{f(x)-k\}^2$ 이  $x=0$ 에서 연속일 때, 상수  $k$ 의 값은?

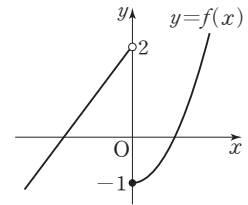
①  $-\frac{2}{3}$

②  $-\frac{1}{3}$

③  $\frac{1}{2}$

④ 1

⑤  $\frac{3}{2}$



[22009-0038]

## 7 두 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2-2x+3 & (x \neq 1) \\ a & (x = 1) \end{cases}, g(x) = 3x-a$$

에 대하여 함수  $f(x)g(x)$ 가  $x=1$ 에서 연속이 되도록 하는 모든 실수  $a$ 의 값의 합을 구하시오.

[22009-0039]

8  $x$ 에 대한 방정식  $x^2+2x+a=0$ 이 열린구간  $(-1, 2)$ 에서 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 정수  $a$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 하자.  $M-m$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

[22009-0040]

- 1 함수  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 모든 실수  $x$ 에 대하여  
 $(x+1)f(x) = (x^2+3x+2)(x+a)$   
 를 만족시킨다.  $f(-1)=7$ 일 때, 상수  $a$ 의 값은?

① 5                      ② 6                      ③ 7                      ④ 8                      ⑤ 9

[22009-0041]

- 2 함수  $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ ax^2+bx+c & (0 < x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(나) 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=\frac{9}{8}$ 는 오직 한 점에서 만난다.

$32 \times f\left(\frac{1}{4}\right)$ 의 값을 구하시오. (단,  $a, b, c$ 는 상수이다.)

[22009-0042]

- 3 최고차항의 계수가 1인 이차함수  $f(x)$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} 3x+1 & (x < 1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수  $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 함수  $g(x)$ 의 역함수가 존재하도록 하는 모든 함수  $f(x)$ 에 대하여  $f(2)$ 의 최솟값은?

① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

[22009-0043]

- 4 함수  $f(x) = \frac{x^2+(a-1)x+4}{x^2+ax+3a}$ 에 대하여 함수  $\frac{1}{f(x)}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 정수  $a$ 의 개수는?

① 3                      ② 4                      ③ 5                      ④ 6                      ⑤ 7

[22009-0044]

- 5 함수  $f(x)$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = a+2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = a^2-4$ ,  $f(2) = a+2$ 일 때, 함수  $\frac{a-2x}{f(x)}$ 가  $x=2$ 에서 연속이 되도록 하는 모든 실수  $a$ 의 값의 합을 구하시오.

[22009-0045]

- 6  $p < 5 < q$ 를 만족시키는 두 실수  $p, q$ 에 대하여

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-5} & (x < p \text{ 또는 } x > q) \\ a & (p \leq x \leq q) \end{cases}$$

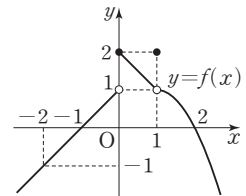
이다. 자연수  $m$ 에 대하여  $q-p=m$ 일 때, 함수  $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 양수  $a$ 의 값을  $a_m$ 이라 하자.  $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k} = \frac{t}{s}$ 일 때,  $s+t$ 의 값을 구하시오. (단,  $s$ 와  $t$ 는 서로소인 자연수이다.)

[22009-0046]

- 7 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

- ㄱ. 함수  $\frac{1}{f(x)}$ 은 열린구간  $(-2, 0)$ 에서 연속이다.
- ㄴ. 함수  $\frac{x}{f(x)}$ 는 열린구간  $(-1, 1)$ 에서 연속이다.
- ㄷ. 함수  $f(x)\{f(x)-1\}$ 은 열린구간  $(0, 2)$ 에서 연속이다.



- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄷ                      ④ ㄱ, ㄴ                      ⑤ ㄴ, ㄷ

[22009-0047]

## 1 함수

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 3 & (x < 0) \\ \frac{1}{2}x + 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

에 대하여 함수  $g(x)$ 는  $g(x) = f(x) + |f(x)| + k$ 이다. 함수  $|g(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수  $k$ 의 값은?

- ① -5                      ② -4                      ③ -3                      ④ -2                      ⑤ -1

[22009-0048]

## 2 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (x \leq -3 \text{ 또는 } x \geq 0) \\ x^2+ax+b & (-3 < x < 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 실수  $a, b$ 에 대하여  $|\frac{1}{2}a+b|$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 하자.  $3(M+m)$ 의 값을 구하시오.

(가) 함수  $|f(x)|$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(나)  $-4 \leq x \leq 1$ 에서 함수  $|f(x)|$ 의 최댓값은 3이다.

[22009-0049]

## 3

실수  $t$ 에 대하여 함수  $f(x) = \left| \frac{1}{2}x^2 - 2 \right|$ 의 그래프가 직선  $y = ax + t$  ( $a > 0$ )과 만나는 서로 다른 점의 개수를  $g(t)$ 라 하자. 양수  $k$ 에 대하여  $a = k$ 일 때, 함수  $g(t)$ 가  $t = a$ 에서 불연속이 되도록 하는 실수  $a$ 의 개수를  $N(k)$ 라 하자.  $\sum_{k=1}^{10} N(k)$ 의 값을 구하시오.

**출제  
경향**

함수의 연속의 정의를 이용하여 함수의 미정계수를 구하는 문제, 함수의 그래프를 이용하여 새롭게 정의된 함수의 연속 여부를 판단하는 문제, 연속함수의 성질을 이용하여 함수가 연속이 될 조건을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수  $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x)g(x) = x(x+3)$ 이다.

(나)  $g(0) = 1$

$f(1)$ 이 자연수일 때,  $g(2)$ 의 최솟값은? [4점]

- ①  $\frac{5}{13}$       ②  $\frac{5}{14}$       ③  $\frac{1}{3}$       ④  $\frac{5}{16}$       ⑤  $\frac{5}{17}$

2019학년도 대수능

**출제 의도** 함수의 연속의 정의를 이용하여 함숫값의 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이** 조건 (가)의 식에  $x=0$ 을 대입하면  $f(0)g(0)=0$ 이고,

조건 (나)에서  $g(0)=1$ 이므로  $f(0)=0$

이때 함수  $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$f(x) = x(x^2 + ax + b) \quad (a, b \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

$f(x) \neq 0$ 일 때  $x \neq 0$ 이므로 조건 (가)의 식에서

$$g(x) = \frac{x(x+3)}{f(x)} = \frac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)} = \frac{x+3}{x^2+ax+b} \quad (\text{단, } f(x) \neq 0)$$

함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로  $x=0$ 에서도 연속이다. 즉,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$ 이 성립한다.

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x^2+ax+b} = \frac{3}{b} \text{이고 } g(0) = 1 \text{이므로 } \frac{3}{b} = 1 \text{에서 } b = 3$$

한편 함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이라면 함수  $y = \frac{x+3}{x^2+ax+3}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이어야 하므로 모든 실수  $x$ 에 대하여  $x^2+ax+3 \neq 0$ 이어야 한다.

즉, 이차방정식  $x^2+ax+3=0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면  $D < 0$ 이어야 하므로

$$D = a^2 - 12 < 0, \quad (a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3}) < 0, \quad -2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

그런데  $f(1) = 1 \times (1+a+3) = a+4$ 이고  $f(1)$ 이 자연수이므로  $a$ 의 값은  $a > -4$ 인 정수이어야 한다.

그러므로  $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 정수  $a$ 의 값은  $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 이다.

따라서  $g(2) = \frac{5}{2a+7}$ 는  $a=3$ 일 때 최솟값  $\frac{5}{13}$ 를 갖는다.

①

# 03 미분계수와 도함수

## 1. 평균변화율

### (1) 평균변화율

함수  $y=f(x)$ 에서  $x$ 의 값이  $a$ 에서  $b$ 까지 변할 때,  $y$ 의 값은  $f(a)$ 에서  $f(b)$ 까지 변한다.  $x$ 의 값의 변화량  $b-a$ 를  $x$ 의 증분,  $y$ 의 값의 변화량  $f(b)-f(a)$ 를  $y$ 의 증분이라 하고, 기호로 각각  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ 와 같이 나타낸다.

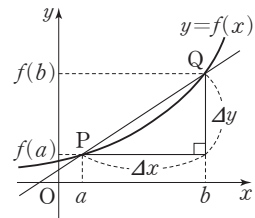
또  $x$ 의 증분  $\Delta x$ 에 대한  $y$ 의 증분  $\Delta y$ 의 비율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

를  $x$ 의 값이  $a$ 에서  $b$ 까지 변할 때의 함수  $y=f(x)$ 의 평균변화율이라고 한다.

### (2) 평균변화율의 기하적 의미

함수  $y=f(x)$ 에서  $x$ 의 값이  $a$ 에서  $b$ 까지 변할 때의 함수  $y=f(x)$ 의 평균변화율은 곡선  $y=f(x)$  위의 두 점  $P(a, f(a))$ ,  $Q(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기와 같다.



## 2. 미분계수

### (1) 미분계수

함수  $y=f(x)$ 에서  $x$ 의 값이  $a$ 에서  $a+\Delta x$ 까지 변할 때의 함수  $y=f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이다. 이때  $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때의 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 이 극한값을 함수  $y=f(x)$ 의  $x=a$ 에서의 순간변화율 또는 미분계수라 하고 이것을 기호로  $f'(a)$ 와 같이 나타낸다. 즉,

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

**참고** 위의 식에서  $a+\Delta x=x$ 라고 하면  $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때  $x \rightarrow a$ 이므로

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

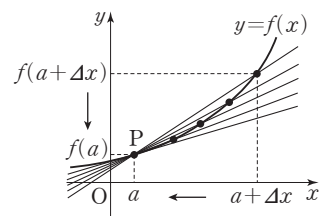
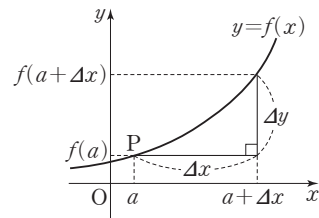
### (2) 미분계수의 기하적 의미

함수  $y=f(x)$ 의  $x=a$ 에서의 미분계수  $f'(a)$ 는 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기와 같다.

**예** 함수  $f(x)=x^2+x$ 의  $x=1$ 에서의 미분계수는

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$$

이므로 곡선  $y=x^2+x$  위의 점  $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 3이다.



다항함수  $f(x)$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-1}{x^2+2x} = 4$ 일 때,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h-2)-1}{h}$ 의 값은?

- ① -28                      ② -26                      ③ -24                      ④ -22                      ⑤ -20

풀이 전략

함수  $f(x)$ 의  $x=a$ 에서의 미분계수는  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

풀이

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-1}{x^2+2x} = 4$ 에서  $x \rightarrow -2$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉,  $\lim_{x \rightarrow -2} \{f(x)-1\} = 0$ 이고 다항함수  $f(x)$ 는 연속함수이므로

$$f(-2)-1=0 \text{에서 } f(-2)=1$$

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-1}{x^2+2x} = 4$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-1}{x^2+2x} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \left\{ \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} \times \frac{1}{x} \right\} \\ &= \frac{f'(-2)}{-2} = 4 \end{aligned}$$

이므로  $f'(-2) = -8$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h-2)-1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+3h)-f(-2)}{3h} \times 3 \\ &= 3f'(-2) = -24 \end{aligned}$$

답 ③

유제

정답과 풀이 20쪽

1

다항함수  $f(x)$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+3}{x-1} = 7$ 일 때,  $f(1)+f'(1)$ 의 값을 구하시오.

[22009-0050]

2

함수  $f(x) = x^2 + 1$ 에 대하여  $x$ 의 값이 1에서 4까지 변할 때의 함수  $y = f(x)$ 의 평균변화율이  $x=c$ 에서의 미분계수와 같도록 하는 상수  $c$ 의 값은?

[22009-0051]

- ①  $\frac{3}{2}$                       ② 2                      ③  $\frac{5}{2}$                       ④ 3                      ⑤  $\frac{7}{2}$

### 3. 미분가능과 연속

(1) 미분가능

함수  $f(x)$ 의  $x=a$ 에서의 미분계수

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

가 존재하면 함수  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 미분가능하다고 한다.

(2) 미분가능한 함수

함수  $f(x)$ 가 어떤 열린구간에 속하는 모든  $x$ 의 값에서 미분가능하면 함수  $f(x)$ 는 그 구간에서 미분가능하다고 한다. 또한 함수  $f(x)$ 가 정의역에 속하는 모든  $x$ 의 값에서 미분가능하면 함수  $f(x)$ 는 미분가능한 함수라고 한다.

(3) 미분가능과 연속

함수  $f(x)$ 가  $x=a$ 에서 미분가능하면 함수  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 연속이다.

**참고** 위의 명제의 대우는 참이다. 즉, 함수  $f(x)$ 가  $x=a$ 에서 불연속이면 함수  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 미분가능하지 않다.

한편, 함수  $f(x)$ 가  $x=a$ 에서 연속이라고 해서 항상  $x=a$ 에서 미분가능한 것은 아니다.

**설명** 함수  $f(x)$ 가  $x=a$ 에서 미분가능하면  $x=a$ 에서의 미분계수

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

가 존재하므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - f(a)\} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) \right\} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \times 0 = 0$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [\{f(x) - f(a)\} + f(a)] = \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - f(a)\} + f(a) = 0 + f(a) = f(a)$$

이므로 함수  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 연속이다.

**예** 함수  $f(x) = |x|$ 는  $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않음을 보이자.

(i)  $x=0$ 에서의 연속성

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

에서  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ 이므로 함수  $f(x) = |x|$ 는  $x=0$ 에서 연속이다.

(ii)  $x=0$ 에서의 미분가능성

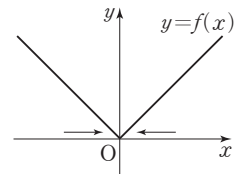
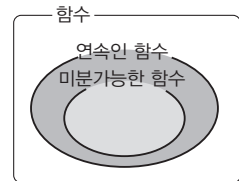
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

이므로  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ 이다. 따라서  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ 의 값이 존재하지 않으므로

함수  $f(x) = |x|$ 는  $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수  $f(x) = |x|$ 는  $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.





함수  $f(x) = \begin{cases} ax+3 & (x < 2) \\ x^2-2x+b & (x \geq 2) \end{cases}$  가  $x=2$ 에서 미분가능할 때,  $f(1)+f(3)$ 의 값을 구하시오.

(단,  $a, b$ 는 상수이다.)

풀이 전략

함수  $f(x)$ 가  $x=a$ 에서 미분가능하면

(1) 함수  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 연속이다. 즉,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

(2)  $f'(a)$ 가 존재한다. 즉,  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

풀이

함수  $f(x)$ 가  $x=2$ 에서 미분가능하므로  $x=2$ 에서 연속이다.

즉,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$ 이다.

이때

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax+3) = 2a+3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2-2x+b) = b$$

$$f(2) = b$$

이므로

$$2a+3 = b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

함수  $f(x)$ 는  $x=2$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(ax+3)-b}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(ax+3)-(2a+3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{a(x-2)}{x-2} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^2-2x+b)-b}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2$$

이므로  $a=2$

$\textcircled{1}$ 에 대입하면  $b=7$

따라서  $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & (x < 2) \\ x^2-2x+7 & (x \geq 2) \end{cases}$  이므로

$$f(1)+f(3) = (2+3) + (9-6+7) = 5+10 = 15$$

답 15

유제

정답과 풀이 20쪽

3

함수  $f(x) = \begin{cases} 3x^2-x+2 & (x \leq 0) \\ ax+b & (x > 0) \end{cases}$  이  $x=0$ 에서 미분가능할 때,  $f(b)$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

[22009-0052]

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

### 4. 도함수

(1) 도함수

함수  $y=f(x)$ 가 정의역에 속하는 모든  $x$ 에서 미분가능할 때, 정의역에 속하는 임의의 원소  $x$ 에 미분계수  $f'(x)$ 를 대응시키는 새로운 함수

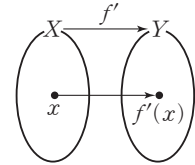
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

를 함수  $y=f(x)$ 의 도함수라 하고, 이것을 기호로

$$f'(x), y', \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}f(x)$$

와 같이 나타낸다.

함수  $f(x)$ 의 도함수  $f'(x)$ 를 구하는 것을 함수  $f(x)$ 를  $x$ 에 대하여 미분한다고 하고, 그 계산법을 미분법이라고 한다.



**참고** ①  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

② 위의 식에서  $x + \Delta x = t$ 라고 하면  $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때  $t \rightarrow x$ 이므로

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

(2) 도함수와 미분계수

도함수의 정의에 의하여  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 이다. 따라서 함수  $f(x)$ 에 대하여  $x=a$ 에서의 미분계수  $f'(a)$ 는 도함수  $f'(x)$ 에  $x=a$ 를 대입하여 얻은 함수값이다.

### 5. 함수 $y=x^n$ ( $n$ 은 자연수)와 상수함수의 도함수

(1)  $y=x^n$  ( $n \geq 2$ 인 자연수)이면  $y' = nx^{n-1}$

**설명** 함수  $y=x^n$  ( $n \geq 2$ 인 자연수)에서  $f(x)=x^n$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h) - x\} \{(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \{(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\} \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n\text{개}} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

(2)  $y=x$ 이면  $y'=1$

(3)  $y=c$  ( $c$ 는 상수)이면  $y'=0$

모든 실수  $t$ 에 대하여 다항함수  $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점  $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기가  $3t^2+4t-1$ 이다. 두 상수  $a, b$  ( $a < b$ )에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b)-f(b-2h)}{h} = 6$$

일 때,  $b-a$ 의 값은?

- ①  $\frac{13}{6}$                       ②  $\frac{7}{3}$                       ③  $\frac{5}{2}$                       ④  $\frac{8}{3}$                       ⑤  $\frac{17}{6}$

풀이 전략

미분가능한 함수  $f(x)$ 에 대하여 도함수  $f'(x)$ 는 정의역에 속하는 임의의 원소  $x$ 에 미분계수  $f'(x)$ 를 대응시키는 새로운 함수이다.

풀이

모든 실수  $t$ 에 대하여 다항함수  $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점  $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기가  $3t^2+4t-1$ 이므로 함수  $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b)-f(b-2h)}{h} = 6 \text{에서}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{2h} \times 2 = 2f'(a)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b)-f(b-2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b-2h)-f(b)}{-2h} \times 2 = 2f'(b)$$

이므로  $f'(a) = f'(b) = 3$

즉,  $a, b$  ( $a < b$ )는 이차방정식  $3x^2+4x-1=3$ 의 서로 다른 두 실근이다.

$$3x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$(x+2)(3x-2) = 0$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}$$

따라서  $a = -2, b = \frac{2}{3}$ 이므로

$$b-a = \frac{2}{3} - (-2) = \frac{8}{3}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 2쪽

4

다항함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

[22009-0053]

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^2 - x + 4$$

를 만족시킨다.  $f'(3)$ 의 값을 구하시오.

6. 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법

두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 미분가능할 때

- (1)  $y = cf(x)$  ( $c$ 는 상수)이면  $y' = cf'(x)$
- (2)  $y = f(x) + g(x)$ 이면  $y' = f'(x) + g'(x)$
- (3)  $y = f(x) - g(x)$ 이면  $y' = f'(x) - g'(x)$
- (4)  $y = f(x)g(x)$ 이면  $y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

**설명** (2)  $y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) + g(x+h)\} - \{f(x) + g(x)\}}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\} + \{g(x+h) - g(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

(4)  $y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + f(x) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

**참고** 세 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$ 가 미분가능할 때

- ①  $y = f(x)g(x)h(x)$ 이면  $y' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$
- ②  $y = \{f(x)\}^2$ 이면  $y' = 2f(x)f'(x)$
- ③ 상수  $a$ 에 대하여 다항식  $f(x)$ 가  $(x-a)^2$ 으로 나누어떨어지기 위한 필요충분조건은  $f(a) = 0$ ,  $f'(a) = 0$ 이다.

**설명** ①  $y' = f'(x)\{g(x)h(x)\} + f(x)\{g(x)h(x)\}'$

$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)\{g'(x)h(x) + g(x)h'(x)\}$$

$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

②  $y' = \{f(x) \times f(x)\}' = f'(x)f(x) + f(x)f'(x) = 2f(x)f'(x)$

③ ( $\implies$ ) 다항식  $f(x)$ 를  $(x-a)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을  $Q(x)$ 라 하면

$$f(x) = (x-a)^2 Q(x) = (x^2 - 2ax + a^2)Q(x) \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$$f'(x) = (2x-2a)Q(x) + (x^2 - 2ax + a^2)Q'(x) = 2(x-a)Q(x) + (x-a)^2 Q'(x) \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

$\textcircled{㉑}$ ,  $\textcircled{㉒}$ 에  $x=a$ 를 대입하면  $f(a) = 0$ ,  $f'(a) = 0$

( $\impliedby$ ) 다항식  $f(x)$ 를  $(x-a)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을  $Q(x)$ , 나머지를  $px+q$  ( $p, q$ 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x-a)^2 Q(x) + px + q = (x^2 - 2ax + a^2)Q(x) + px + q \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

$$f'(x) = (2x-2a)Q(x) + (x^2 - 2ax + a^2)Q'(x) + p = 2(x-a)Q(x) + (x-a)^2 Q'(x) + p \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$\textcircled{㉓}$ ,  $\textcircled{㉔}$ 에  $x=a$ 를 대입하면  $f(a) = pa + q = 0$ ,  $f'(a) = p = 0$

즉,  $p=0, q=0$ 에서  $f(x) = (x-a)^2 Q(x)$ 이므로 다항식  $f(x)$ 가  $(x-a)^2$ 으로 나누어떨어진다.

예제 4 미분법

함수  $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 3x + b$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 5$ 일 때,  $f'(b)$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

- ① 21                      ② 22                      ③ 23                      ④ 24                      ⑤ 25

풀이 전략

두 함수  $f(x), g(x)$ 가 미분가능할 때

- (1)  $y = cf(x)$  ( $c$ 는 상수)이면  $y' = cf'(x)$
- (2)  $y = f(x) + g(x)$ 이면  $y' = f'(x) + g'(x)$
- (3)  $y = f(x) - g(x)$ 이면  $y' = f'(x) - g'(x)$

풀이

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 5$ 에서  $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉,  $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 2\} = 0$ 이고 다항함수  $f(x)$ 는 연속함수이므로

$$f(1) - 2 = 0 \text{에서 } f(1) = 2$$

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 5$$

함수  $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 3x + b$ 에서

$$f(1) = 2 + a - 3 + b = 2$$

$$a + b = 3 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$f'(x) = 6x^2 + 2ax - 3$ 에서

$$f'(1) = 6 + 2a - 3 = 5$$

$$a = 1$$

㉠에서  $b = 2$

따라서  $f'(x) = 6x^2 + 2x - 3$ 이므로

$$f'(b) = f'(2) = 24 + 4 - 3 = 25$$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 21쪽

5

함수  $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 + ax - 1)$ 에 대하여  $f'(0) = 6$ 일 때,  $f'(2)$ 의 값은? (단,  $a$ 는 상수이다.)

[22009-0054]

- ① -5                      ② -4                      ③ -3                      ④ -2                      ⑤ -1

6

다항함수  $f(x)$ 에 대하여  $f(3) = -1, f'(3) = 2$ 이다. 함수  $g(x)$ 를

[22009-0055]

$$g(x) = (x^2 + 1)f(x)$$

라 할 때,  $g'(3)$ 의 값은?

- ① 12                      ② 14                      ③ 16                      ④ 18                      ⑤ 20

[22009-0056]

1 다항함수  $f(x)$ 에 대하여  $f'(a)=2$ 일 때,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h)-f(a)}{h}$ 의 값은? (단,  $a$ 는 상수이다.)

- ① 2                      ② 3                      ③ 4                      ④ 5                      ⑤ 6

[22009-0057]

2 함수  $f(x)=x^3-2x+6$ 에서  $x$ 의 값이  $-1$ 에서  $3$ 까지 변할 때의 함수  $y=f(x)$ 의 평균변화율은?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

[22009-0058]

3 함수  $f(x)=(2x-3)(x^2-4x+1)$ 에 대하여  $f'(1)$ 의 값은?

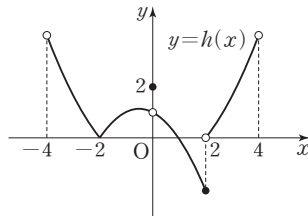
- ①  $-1$                       ②  $-2$                       ③  $-3$                       ④  $-4$                       ⑤  $-5$

[22009-0059]

4 두 이차함수  $f(x), g(x)$ 에 대하여 열린구간  $(-4, 4)$ 에서 정의된 함수

$$h(x) = \begin{cases} 2 & (x=0) \\ f(x) & (0 < |x| \leq 2) \\ g(x) & (2 < |x| < 4) \end{cases}$$

의 그래프가 그림과 같을 때, 함수  $h(x)$ 가  $x=k$  ( $-4 < k < 4$ )에서 미분가능한 모든 정수  $k$ 의 개수는?



- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

[22009-0060]

- 5 곡선  $y=x^3+ax^2-5x+b$  위의 점  $(-1, 9)$ 에서의 접선의 기울기가  $-10$ 일 때,  $a^2+b^2$ 의 값을 구하시오.  
(단,  $a, b$ 는 상수이다.)

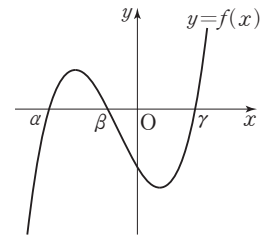
[22009-0061]

- 6 다항함수  $f(x)$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)+4}{x-3} = 2$ 일 때, 함수  $g(x)$ 를  $g(x)=x^2f(x)$ 라 하자.  $g'(3)$ 의 값은?  
①  $-15$                       ②  $-12$                       ③  $-9$                       ④  $-6$                       ⑤  $-3$

[22009-0062]

- 7 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다. 방정식  $f(x)=0$ 의 세 실근을  $\alpha, \beta, \gamma$  ( $\alpha < \beta < \gamma$ )라 할 때, 보기에 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기   ㄱ. $f'(\beta) < 0$ ㄴ. $f'(\alpha) + f'(\gamma) > 0$ ㄷ. $\{f'(\alpha) - f'(\beta)\}\{f'(0) - f'(\gamma)\} > 0$
---



- ① ㄱ                                      ② ㄷ                                      ③ ㄱ, ㄴ  
④ ㄴ, ㄷ                                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[22009-0063]

- 8 함수  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x & (x \leq a) \\ k & (x > a) \end{cases}$ 가  $x=a$ 에서 미분가능할 때,  $f(-4) + f(4)$ 의 값은? (단,  $a, k$ 는 상수이다.)  
① 31                                      ② 33                                      ③ 35                                      ④ 37                                      ⑤ 39

[22009-0064]

1 다항함수  $f(x)$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-5}{x^2+x-2} = 3$ 일 때,  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x^2)-5}{x+1}$ 의 값은?

- ① -21                      ② -18                      ③ -15                      ④ -12                      ⑤ -9

[22009-0065]

2 다항함수  $f(x)$ 에 대하여 곡선  $y=(2x+1)f(x)$  위의 점  $(2, 5)$ 에서의 접선의 기울기가 3일 때, 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $(2, a)$ 에서의 접선의 기울기는  $b$ 이다.  $a+b$ 의 값은?

- ①  $\frac{11}{10}$                       ②  $\frac{6}{5}$                       ③  $\frac{13}{10}$                       ④  $\frac{7}{5}$                       ⑤  $\frac{3}{2}$

[22009-0066]

3 다항함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = x^2 + 4$$

를 만족시킨다. 함수  $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점  $(0, 0)$ 에서의 접선의 기울기가 양수일 때,  $f'(4)$ 의 값은?

- ① 6                      ② 7                      ③ 8                      ④ 9                      ⑤ 10

[22009-0067]

4 두 다항함수  $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $g(1)+g'(1)$ 의 값은?

(가) 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $(-1, 5)$ 에서의 접선의 기울기는 2이다.

(나) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x)=g(-x)$ 이다.

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5



[22009-0068]

- 5 이차함수  $f(x)$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 를  

$$g(x) = |x+1|f(x)$$

라 하자. 함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 2$ 일 때,  $g(1)$ 의 값은?

- ① 2                      ② 4                      ③ 6                      ④ 8                      ⑤ 10

[22009-0069]

- 6 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $f(3)$ 의 값은?

(가)  $f(0) - 2 = f'(0) = 0$

(나) 5는 방정식  $f(x) = 2$ 의 실근이다.

- ① -20                      ② -18                      ③ -16                      ④ -14                      ⑤ -12

[22009-0070]

- 7 최고차항의 계수가 1인 이차함수  $f(x)$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq 1) \\ \frac{2x+a}{x-1} & (x > 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때,  $g(a)$ 의 값은? (단,  $a$ 는 상수이다.)

- ① 11                      ② 12                      ③ 13                      ④ 14                      ⑤ 15

[22009-0071]

- 8 다항함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수  $x, y$ 에 대하여

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + ax^2y + axy^2 + bxy - 1$$

이다.

(나) 곡선  $y = f'(x)$ 는 직선  $x = 1$ 에 대하여 대칭이고 직선  $y = 15$ 와 오직 한 점에서 만난다.

$f'(0) + f'(-2) = 0$ 일 때,  $f'(a+b)$ 의 값을 구하시오. (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

[22009-0072]

- 1 삼차함수  $f(x)$ 와 이차함수  $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 는 모두 최고차항의 계수가 정수이다.

(나) 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f(x)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g\left(x - \frac{h}{3}\right) - g(x)}{h} = -x^3 - x^2 + 2$$

이다.

함수  $f'(x)$ 가 최솟값  $m$ 을 가질 때,  $g'(m)$ 의 값을 구하시오.

[22009-0073]

- 2 사차함수  $f(x)$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x^2 - 4} & (|x| \neq 2) \\ -x + a & (|x| = 2) \end{cases}$$

라 하자. 함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - 3}{f(x)} = \frac{1}{4}$ 일 때,  $g(a)$ 의 값은?

(단,  $a$ 는 상수이다.)

- ① 21                      ② 23                      ③ 25                      ④ 27                      ⑤ 29

[22009-0074]

- 3 함수  $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 임의의 두 실수  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 에 대하여  $x$ 의 값이  $x_1$ 에서  $x_2$ 까지 변할 때의 함수  $y=f(x)$ 의 평균변화율은 2로 일정하다.

(나) 두 함수  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 의 그래프는 점 (1, 3)에서 만난다.

(다) 함수  $|f(x) - g(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(3) + g(3)$ 의 값을 구하시오.

**출제 경향**

극한의 성질과 미분계수의 정의를 이용하여 미분계수를 계산하는 문제, 미분가능과 연속의 관계를 이용하여 함수를 추론하는 문제, 미분법을 이용하여 함수의 도함수를 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

두 다항함수  $f(x), g(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+g(x)}{x} = 3, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{xg(x)} = 2$$

를 만족시킨다. 함수  $h(x) = f(x)g(x)$ 에 대하여  $h'(0)$ 의 값은? [4점]

- ① 27                      ② 30                      ③ 33                      ④ 36                      ⑤ 39

2021학년도 대수능

**출제 의도** 극한의 성질과 미분계수의 정의 및 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+g(x)}{x} = 3$ 에서  $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉,  $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+g(x)\} = 0$ 이고 두 다항함수  $f(x), g(x)$ 는 연속함수이므로

$$f(0)+g(0)=0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+g(x)-f(0)-g(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)-f(0)}{x} + \frac{g(x)-g(0)}{x} \right\} \\ &= f'(0)+g'(0)=3 \quad \dots\dots \textcircled{B} \end{aligned}$$

또  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{xg(x)} = 2$ 에서  $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉,  $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+3\} = 0$ 이고 다항함수  $f(x)$ 는 연속함수이므로

$$f(0)+3=0 \text{에서 } f(0) = -3 \text{이므로 } \textcircled{A} \text{에서 } g(0)=3$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{xg(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)-f(0)}{x} \times \frac{1}{g(x)} \right\} \\ &= \frac{f'(0)}{g(0)} = \frac{f'(0)}{3} = 2 \end{aligned}$$

에서  $f'(0) = 6$

$\textcircled{B}$ 에서  $g'(0) = -3$

$$\text{따라서 } h'(0) = f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = 6 \times 3 + (-3) \times (-3) = 27$$

**답** ①

# 04 도함수의 활용 (1)

## 1. 접선의 방정식

### (1) 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

함수  $f(x)$ 가  $x=a$ 에서 미분가능할 때, 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기는 함수  $f(x)$ 의  $x=a$ 에서의 미분계수  $f'(a)$ 와 같다.

따라서 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

**예** 곡선  $y=x^3$  위의 점  $(2, 8)$ 에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

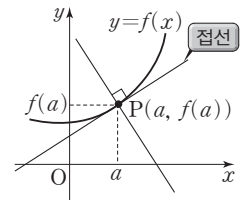
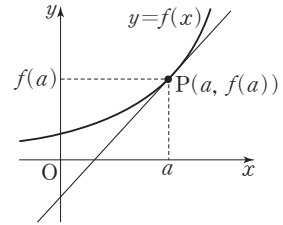
$f(x)=x^3$ 이라고 하면  $f'(x)=3x^2$ 이므로 곡선  $y=x^3$  위의 점  $(2, 8)$ 에서의 접선의 기울기는  $f'(2)=12$ 이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - 8 = 12(x - 2), \text{ 즉 } y = 12x - 16$$

**참고** 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $P(a, f(a))$ 를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) \quad (\text{단, } f'(a) \neq 0)$$



### (2) 기울기가 주어진 접선의 방정식

함수  $f(x)$ 가 미분가능할 때, 기울기가  $m$ 이고 곡선  $y=f(x)$ 에 접하는 직선의 방정식은 다음과 같이 구한다.

① 점점의 좌표를  $(a, f(a))$ 로 놓고 방정식  $f'(a)=m$ 을 만족시키는 실수  $a$ 의 값을 구한다.

② 위의 ①에서 구한  $a$ 의 값을  $y - f(a) = m(x - a)$ 에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

### (3) 곡선 위에 있지 않은 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식

함수  $f(x)$ 가 미분가능할 때, 곡선 위에 있지 않은 점  $(p, q)$ 에서 곡선  $y=f(x)$ 에 그은 접선의 방정식은 다음과 같이 구한다.

① 점점의 좌표를  $(a, f(a))$ 로 놓는다.

② 점  $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식  $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ 를 구한다.

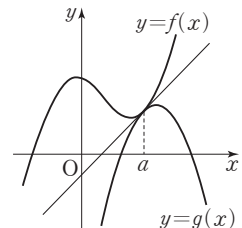
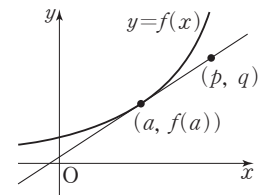
③ 점  $(p, q)$ 는 접선 위의 점이므로 위의 ②에서 구한 접선의 방정식에 대입하여 실수  $a$ 의 값을 구한다.

④ 위의 ③에서 구한  $a$ 의 값을  $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ 에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

**참고** 두 함수  $f(x), g(x)$ 가 미분가능할 때,  $x$ 좌표가  $a$ 인 점에서 두 곡선  $y=f(x), y=g(x)$ 에 동시에 접하는 직선의 방정식은 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $(a, f(a))$ 에서의 접선과 곡선  $y=g(x)$  위의 점  $(a, g(a))$ 에서의 접선이 서로 일치하므로 다음과 같은 조건을 이용하여 구한다.

①  $x=a$ 에서의 함수값이 같다. 즉,  $f(a)=g(a)$

②  $x=a$ 에서의 접선의 기울기가 같다. 즉,  $f'(a)=g'(a)$



## 예제 1 접선의 방정식

www.ebsi.co.kr

함수  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ 에 대하여 곡선  $y=f(x)$ 에 접하고 기울기가 3인 두 직선 사이의 거리는?

- ①  $\frac{2\sqrt{10}}{3}$       ②  $\frac{4\sqrt{10}}{5}$       ③  $\frac{14\sqrt{10}}{15}$       ④  $\frac{16\sqrt{10}}{15}$       ⑤  $\frac{6\sqrt{10}}{5}$

풀이  
전략

함수  $f(x)$ 가 미분가능할 때, 기울기가  $m$ 이고 곡선  $y=f(x)$ 에 접하는 직선의 방정식은

- ① 접점의 좌표를  $(a, f(a))$ 로 놓고 방정식  $f'(a) = m$ 을 만족시키는 실수  $a$ 의 값을 구한다.  
② 위의 ①에서 구한  $a$ 의 값을  $y - f(a) = m(x - a)$ 에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

풀이

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 2x$$

기울기가 3인 접선의 접점의  $x$ 좌표를  $t$ 라 하면

$$f'(t) = t^2 - 2t = 3$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t+1)(t-3) = 0$$

$$t = -1 \text{ 또는 } t = 3$$

(i)  $t = -1$ 일 때,

$$f(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 1 = -\frac{1}{3} \text{이므로 접점의 좌표는 } \left(-1, -\frac{1}{3}\right) \text{이고, 접선의 방정식은}$$

$$y = 3(x+1) - \frac{1}{3}, \text{ 즉 } y = 3x + \frac{8}{3}$$

(ii)  $t = 3$ 일 때,

$$f(3) = 9 - 9 + 1 = 1 \text{이므로 접점의 좌표는 } (3, 1) \text{이고, 접선의 방정식은}$$

$$y = 3(x-3) + 1, \text{ 즉 } y = 3x - 8$$

두 직선  $y = 3x + \frac{8}{3}$ ,  $y = 3x - 8$  사이의 거리는 직선  $y = 3x + \frac{8}{3}$  위의 점  $\left(0, \frac{8}{3}\right)$ 과 직선  $3x - y - 8 = 0$  사이의 거리와 같으므로

$$\frac{\left|0 - \frac{8}{3} - 8\right|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{16\sqrt{10}}{15}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 27쪽

1

함수  $f(x) = x^4 + ax + 3$ 에 대하여 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $(2, 3)$ 에서의 접선의  $y$ 절편은?

(단,  $a$ 는 상수이다.)

[22009-0075]

- ① -49      ② -48      ③ -47      ④ -46      ⑤ -45

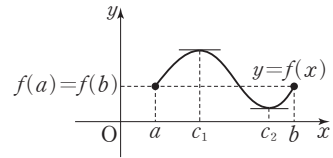
## 2. 평균값 정리

### (1) 롤의 정리

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간  $(a, b)$ 에서 미분가능할 때,  $f(a)=f(b)$ 이면

$$f'(c)=0$$

인  $c$ 가 열린구간  $(a, b)$ 에 적어도 하나 존재한다.

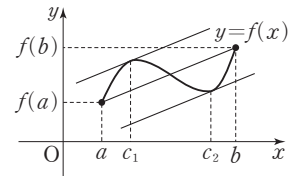


### (2) 평균값 정리

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간  $(a, b)$ 에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인  $c$ 가 열린구간  $(a, b)$ 에 적어도 하나 존재한다.



**설명** 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간  $(a, b)$ 에서 미분가능하다고 하자.

함수  $y=f(x)$ 의 그래프 위의 두 점  $P(a, f(a))$ ,  $Q(b, f(b))$ 를 지나는 직선 PQ의 방정식은

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

이다. 이때

$$g(x)=f(x)-\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right\}$$

라 하면 함수  $g(x)$ 는 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간  $(a, b)$ 에서 미분가능하며  $g(a)=g(b)=0$ 이다.

따라서 롤의 정리에 의하여

$$g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0, \text{ 즉 } \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인  $c$ 가 열린구간  $(a, b)$ 에 적어도 하나 존재한다.

**참고** ① 평균값 정리는 열린구간  $(a, b)$ 에서 곡선  $y=f(x)$ 에 접하고 두 점  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$ 를 지나는 직선에 평행한 직선이 적어도 하나 존재함을 의미한다.

② 평균값 정리에서  $f(a)=f(b)$ 인 경우가 롤의 정리이다.

③ 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간  $(a, b)$ 에서 미분가능할 때, 열린구간  $(a, b)$ 에 속하는 모든  $x$ 에서  $f'(x)=0$ 이면 평균값 정리에 의하여 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 함수  $f(x)$ 는 상수함수임을 알 수 있다.

**예** 함수  $f(x)=3x^2-4$ 는 닫힌구간  $[0, 3]$ 에서 연속이고 열린구간  $(0, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{23-(-4)}{3}=9=f'(c)$$

인  $c$ 가 열린구간  $(0, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=6x$ 이므로  $f'(c)=6c=9$ 에서  $c=\frac{3}{2}$ 이고  $0 < c < 3$ 을 만족시킨다.

## 예제 2 평균값 정리

www.ebsi.co.kr

함수  $f(x) = x^3 - 5x$ 에 대하여  $\frac{f(2) - f(-1)}{3} = f'(c)$ 를 만족시키고 열린구간  $(-1, 2)$ 에 속하는 상수를  $c$ 라 하자. 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(c, f(c))$ 에서의 접선의  $x$ 절편은?

- ① -3                      ② -1                      ③ 1                      ④ 3                      ⑤ 5

풀이 전략

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간  $(a, b)$ 에서 미분가능할 때,

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ 인  $c$ 가 열린구간  $(a, b)$ 에 적어도 하나 존재한다.

풀이

함수  $f(x) = x^3 - 5x$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 5$$

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{(8 - 10) - (-1 + 5)}{3} = 3c^2 - 5$$

$$3c^2 - 5 = -2, \quad c^2 = 1$$

이때  $-1 < c < 2$ 이므로  $c = 1$

즉,  $f'(1) = -2$ 이고  $f(c) = f(1) = -4$ 이므로 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(c, f(c))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = -2(x - 1) - 4, \quad \text{즉 } y = -2x - 2$$

따라서 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(1, -4)$ 에서의 접선의  $x$ 절편은  $-1$ 이다.

답 ②

**참고** 함수  $f(x) = x^3 - 5x$ 는 닫힌구간  $[-1, 2]$ 에서 연속이고 열린구간  $(-1, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = f'(c)$$

인 상수  $c$ 가 열린구간  $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

## 유제

정답과 풀이 27쪽

### 2

[22009-0076]

함수  $f(x) = -x^4 + x^2 + 3$ 에 대하여  $f'(c) = 0$ 을 만족시키고 열린구간  $(0, 1)$ 에 속하는 상수  $c$ 의 값은?

- ①  $\frac{\sqrt{2}}{8}$                       ②  $\frac{1}{4}$                       ③  $\frac{\sqrt{2}}{4}$                       ④  $\frac{1}{2}$                       ⑤  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

### 3

[22009-0077]

다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수  $f(x)$ 에 대하여  $f(4)$ 의 최댓값을 구하시오.

(가)  $f(1) = 5$

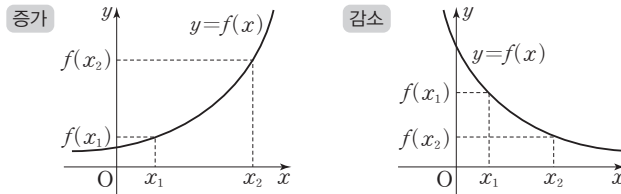
(나)  $1 < x < 4$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(x) \leq 3$ 이다.

### 3. 함수의 증가와 감소

(1) 함수의 증가와 감소

함수  $f(x)$ 가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수  $x_1, x_2$ 에 대하여

- ①  $x_1 < x_2$ 일 때,  $f(x_1) < f(x_2)$ 이면 함수  $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다고 한다.
- ②  $x_1 < x_2$ 일 때,  $f(x_1) > f(x_2)$ 이면 함수  $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다고 한다.



(2) 함수의 증가와 감소의 판정

함수  $f(x)$ 가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간에 속하는 모든  $x$ 에 대하여

- ①  $f'(x) > 0$ 이면 함수  $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.
- ②  $f'(x) < 0$ 이면 함수  $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.

**설명** 함수  $f(x)$ 가 어떤 열린구간에서 미분가능하고 이 구간에 속하는 모든  $x$ 에 대하여  $f'(x) > 0$ 이라고 하자.  
이 열린구간에 속하는 임의의 두 실수  $x_1, x_2$ 에 대하여  $x_1 < x_2$ 일 때, 닫힌구간  $[x_1, x_2]$ 에서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

인  $c$ 가  $x_1$ 과  $x_2$  사이에 적어도 하나 존재한다.

그런데  $f'(c) > 0$ 이고  $x_2 - x_1 > 0$ 이므로  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ 이다.

즉,  $x_1 < x_2$ 일 때  $f(x_1) < f(x_2)$ 이므로 함수  $f(x)$ 는 이 열린구간에서 증가한다.

같은 방법으로 함수  $f(x)$ 가 어떤 열린구간에서 미분가능하고 이 구간에 속하는 모든  $x$ 에 대하여  $f'(x) < 0$ 이라 하면  $\textcircled{1}$ 에서  $f'(c) < 0$ 이고  $x_2 - x_1 > 0$ 이므로  $f(x_2) - f(x_1) < 0$ 이다.

따라서  $x_1 < x_2$ 일 때  $f(x_1) > f(x_2)$ 이므로 함수  $f(x)$ 는 이 열린구간에서 감소한다.

**참고** ① 일반적으로 위의 명제의 역은 성립하지 않는다.

예를 들어 함수  $f(x) = x^3$ 은 구간  $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하지만  $f'(0) = 0$ 이다.

② 함수  $f(x)$ 가 상수함수가 아닌 다항함수일 때

- ①  $f(x)$ 가 어떤 열린구간에서 증가하기 위한 필요충분조건은 이 열린구간에 속하는 모든  $x$ 에 대하여  $f'(x) \geq 0$ 이다.
- ②  $f(x)$ 가 어떤 열린구간에서 감소하기 위한 필요충분조건은 이 열린구간에 속하는 모든  $x$ 에 대하여  $f'(x) \leq 0$ 이다.

**예** 함수  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ 에서  $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$ 이므로  
 $f'(x) > 0$ 을 만족시키는  $x$ 의 값의 범위인  $x < 0$  또는  $x > 4$ 에서 함수  $f(x)$ 는 증가한다.  
또  $f'(x) < 0$ 을 만족시키는  $x$ 의 값의 범위인  $0 < x < 4$ 에서 함수  $f(x)$ 는 감소한다.



### 예제 3 함수의 증가와 감소

두 실수  $a, b$ 에 대하여 함수  $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $f(-2)$ 의 최댓값은?

- (가)  $-3 < x_1 < x_2 < 0$ 인 모든 실수  $x_1, x_2$ 에 대하여  $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.  
 (나)  $0 < x_3 < x_4$ 인 모든 실수  $x_3, x_4$ 에 대하여  $f(x_3) > f(x_4)$ 이다.

- ① -18                      ② -16                      ③ -14                      ④ -12                      ⑤ -10

**풀이 전략**

미분가능한 함수  $f(x)$ 가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수  $x_1, x_2$ 에 대하여

- ①  $x_1 < x_2$ 일 때  $f(x_1) < f(x_2)$ 이면 함수  $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다고 하고, 이 구간에 속하는 모든  $x$ 에 대하여  $f'(x) \geq 0$ 이다.  
 ②  $x_1 < x_2$ 일 때  $f(x_1) > f(x_2)$ 이면 함수  $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다고 하고, 이 구간에 속하는 모든  $x$ 에 대하여  $f'(x) \leq 0$ 이다.

**풀이**

함수  $f(x)$ 는 조건 (가)에 의하여 열린구간  $(-3, 0)$ 에서 증가하고 조건 (나)에 의하여 구간  $(0, \infty)$ 에서 감소한다. 즉, 열린구간  $(-3, 0)$ 에서  $f'(x) \geq 0$ 이고, 구간  $(0, \infty)$ 에서  $f'(x) \leq 0$ 이다. 이때  $f'(x)$ 가 연속함수이므로  $f'(0) = 0$ 이다.

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$$

$$b = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f'(x) \geq 0$ 이고  $f'(x)$ 가 연속함수이므로  $f'(-3) \geq 0$

$$f'(-3) = -27 - 6a + b \geq 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } a \leq -\frac{9}{2}$$

따라서

$$f(-2) = 8 + 4a - 2b \leq 8 - 18 = -10$$

이므로  $f(-2)$ 의 최댓값은  $-10$ 이다.

**답** ⑤

**유제**

정답과 풀이 27쪽

**4**

실수  $a$ 에 대하여 함수  $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 2$ 가 일대일대응일 때,  $f(3)$ 의 최솟값을 구하시오.

[22009-0078]

**5**

함수  $f(x) = (x^2 - a)(x - a)$ 가  $x_1 < x_2$ 인 모든 실수  $x_1, x_2$ 에 대하여  $f(x_1) < f(x_2)$ 를 만족시키도록 하는 모든 정수  $a$ 의 값의 합은?

[22009-0079]

- ① -10                      ② -9                      ③ -8                      ④ -7                      ⑤ -6

### 4. 함수의 극대와 극소

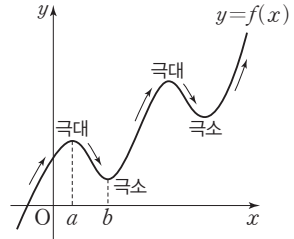
(1) 함수의 극대와 극소

- ① 함수  $f(x)$ 에서  $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든  $x$ 에 대하여  $f(x) \leq f(a)$

이때 함수  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 극대라 하고, 그때의 함수값  $f(a)$ 를 극댓값이라고 한다.

- ② 함수  $f(x)$ 에서  $x=b$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq f(b)$

이때 함수  $f(x)$ 는  $x=b$ 에서 극소라 하고, 그때의 함수값  $f(b)$ 를 극솟값이라고 한다. 이때 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.



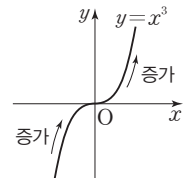
(2) 극값과 미분계수

함수  $f(x)$ 가  $x=a$ 에서 미분가능하고  $x=a$ 에서 극값을 가지면  $f'(a)=0$ 이다.

**참고** 일반적으로 위의 명제의 역은 성립하지 않는다.

즉,  $f'(a)=0$ 이라고 해서 함수  $f(x)$ 가  $x=a$ 에서 극값을 갖는 것은 아니다.

예를 들어 함수  $f(x)=x^3$ 에서  $f'(0)=0$ 이지만 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 극값을 갖지 않는다.



(3) 미분가능한 함수  $f(x)$ 의 극대와 극소의 판정

미분가능한 함수  $f(x)$ 에 대하여  $f'(a)=0$ 일 때,  $x=a$ 의 좌우에서  $f'(x)$ 의 부호가

- ① 양(+)에서 음(-)으로 바뀌면 함수  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 극대이고, 극댓값  $f(a)$ 를 갖는다.
- ② 음(-)에서 양(+)으로 바뀌면 함수  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 극소이고, 극솟값  $f(a)$ 를 갖는다.

**예** 함수  $f(x)=x^3-3x$ 에 대하여  $f'(x)=3x^2-3$ 이다.

(1)  $f'(-1)=0$ 이고,  $x=-1$ 의 좌우에서  $f'(x)$ 의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌므로 함수  $f(x)$ 는  $x=-1$ 에서 극대이고 극댓값  $f(-1)=2$ 를 갖는다.

(2)  $f'(1)=0$ 이고,  $x=1$ 의 좌우에서  $f'(x)$ 의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 극소이고 극솟값  $f(1)=-2$ 를 갖는다.

**참고** 함수  $f(x)$ 가  $x=a$ 에서 미분가능하지 않더라도  $x=a$ 에서 극값을 가질 수 있다. 예를 들어 함수  $f(x)=|x-1|$ 은  $x=1$ 에서 미분가능하지 않지만  $x=1$ 을 포함하는 어떤 열린구간에서  $f(x) \geq f(1)=0$ 이므로 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 극솟값을 갖는다.

### 5. 함수의 그래프

일반적으로 미분가능한 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 순서를 따르면 그 개형을 그릴 수 있다.

- (1) 도함수  $f'(x)$ 를 구한다.
- (2)  $f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값을 구한다.
- (3) 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내고, 극값을 구한다.
- (4) 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와  $x$ 축 또는  $y$ 축의 교점의 좌표를 구한다.
- (5) 함수  $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 그린다.

## 예제 4 함수의 극대와 극소

www.ebsi.co.kr

최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 가  $x=0, x=2$ 에서 각각 극값을 갖는다. 함수  $f(x)$ 의 모든 극값의 합이 8일 때,  $f(1)$ 의 값은?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

풀이  
전략

함수  $f(x)$ 가  $x=a$ 에서 미분가능하고  $x=a$ 에서 극값을 가지면  $f'(a)=0$ 이다.

풀이

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$  ( $a, b, c$ 는 상수)라 하자.

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

함수  $f(x)$ 가  $x=0, x=2$ 에서 각각 극값을 가지므로  $f'(0)=0, f'(2)=0$ 이다.

즉, 이차방정식  $3x^2+2ax+b=0$ 의 두 근이 0, 2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{2a}{3}=2, a=-3$$

$$\frac{b}{3}=0, b=0$$

함수  $f(x)=x^3-3x^2+c$ 의 극값이

$$f(0)=c$$

$$f(2)=8-12+c=-4+c$$

이므로 모든 극값의 합은

$$c+(-4+c)=8$$

$$c=6$$

따라서  $f(x)=x^3-3x^2+6$ 이므로

$$f(1)=1-3+6=4$$

답 ④

유제

정답과 풀이 28쪽

6

함수  $f(x)=x^4+ax+b$ 가  $x=-1$ 에서 극솟값 5를 가질 때,  $a+b$ 의 값을 구하시오.

[22009-0080]

(단,  $a, b$ 는 상수이다.)

7

함수  $f(x)=x^3-3x^2-9x+k$ 에 대하여 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가  $x$ 축과 접하도록 하는 모든 실수  $k$ 의 값의 합은?

[22009-0081]

- ① 20                      ② 22                      ③ 24                      ④ 26                      ⑤ 28

[22009-0082]

1 곡선  $y=2x^3-x^2$  위의 점  $(1, 1)$ 에서의 접선과  $x$ 축 및  $y$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ①  $\frac{9}{8}$                       ②  $\frac{5}{4}$                       ③  $\frac{11}{8}$                       ④  $\frac{3}{2}$                       ⑤  $\frac{13}{8}$

[22009-0083]

2 함수  $f(x)=4x^2-x+1$ 에 대하여  $f(1)-f(0)=f'(c)$ 를 만족시키고 열린구간  $(0, 1)$ 에 속하는 상수  $c$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{8}$                       ②  $\frac{1}{4}$                       ③  $\frac{3}{8}$                       ④  $\frac{1}{2}$                       ⑤  $\frac{5}{8}$

[22009-0084]

3 함수  $f(x)=x^3-3x+2$ 는  $x=a$ 에서 극대이고,  $x=b$ 에서 극소이다.  $f(a)-f(b)$ 의 값은?

(단,  $a, b$ 는 상수이다.)

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

[22009-0085]

4 함수  $f(x)=-2x^3+5x^2+ax$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하도록 하는 실수  $a$ 의 최댓값은?

- ①  $-\frac{25}{6}$                       ②  $-\frac{13}{3}$                       ③  $-\frac{9}{2}$                       ④  $-\frac{14}{3}$                       ⑤  $-\frac{29}{6}$

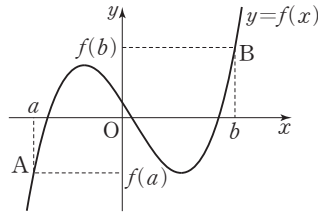
[22009-0086]

5 직선  $y = -\frac{x}{3} + 1$ 과 수직이고 곡선  $y = x^4 - x + 5$ 에 접하는 직선의  $y$ 절편은?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

[22009-0087]

6 삼차함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 두 점  $A(a, f(a))$ ,  $B(b, f(b))$ 가 그림과 같다. 함수  $f(x)$ 에 대하여  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ 를 만족시키고 열린구간  $(a, b)$ 에 속하는 상수  $c$ 의 개수를 구하시오.



[22009-0088]

7 구간  $[k, \infty)$ 에서 정의된 함수  $f(x) = x^4 - 8x^3 + 1$ 의 역함수가 존재하도록 하는 실수  $k$ 의 최솟값은?

- ① 5                      ② 6                      ③ 7                      ④ 8                      ⑤ 9

[22009-0089]

8 함수  $f(x) = x^3 + x + 1$ 에 대하여 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $A(1, f(1))$ 에서의 접선을  $l$ 이라 하자. 곡선  $y = 2x^3 + ax^2 + b$ 가 직선  $l$ 과 점  $A$ 에서 접할 때,  $f(ab)$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

- ① -9                      ② -7                      ③ -5                      ④ -3                      ⑤ -1

[22009-0090]

- 1 함수  $f(x) = x^3 + ax + b$ 가  $x=2$ 에서 극소이다. 함수  $f(x)$ 의 극댓값이 9일 때,  $a+b$ 의 값은?  
(단,  $a, b$ 는 상수이다.)

① -19                      ② -18                      ③ -17                      ④ -16                      ⑤ -15

[22009-0091]

- 2 실수  $t$ 에 대하여 곡선  $y = x^3 - 3tx^2 + tx$ 에 접하는 직선의 기울기가 최소일 때, 이 접선의  $y$ 절편을  $f(t)$ 라 하자.  $f(2) + f'(2)$ 의 값은?

① 12                      ② 14                      ③ 16                      ④ 18                      ⑤ 20

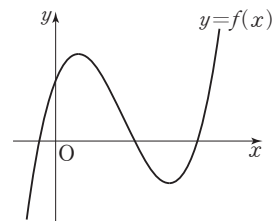
[22009-0092]

- 3 함수  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 에 대하여 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단,  $a, b, c$ 는 상수이다.)

보기

ㄱ.  $b > 0$ ㄴ.  $ac > 0$ ㄷ.  $f(-1) = 0$ 이면  $ac + b^2 > ab + bc$ 이다.

① ㄱ                      ② ㄷ                      ③ ㄱ, ㄴ  
④ ㄱ, ㄷ                      ⑤ ㄴ, ㄷ



[22009-0093]

- 4 다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수  $f(x)$ 에 대하여  $f(3)$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 할 때,  $M-m$ 의 값을 구하시오.

(가) 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 원점을 지난다.

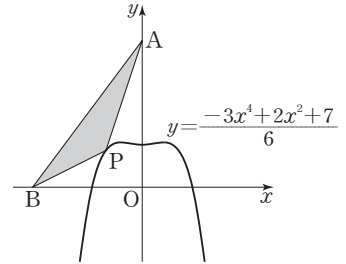
(나) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $|f'(x)| \leq 4$ 이다.

[22009-0094]

5

그림과 같이 좌표평면에 두 점  $A(0, 4)$ ,  $B(-3, 0)$ 과 곡선  $y = \frac{-3x^4 + 2x^2 + 7}{6}$  위를 움직이는 점  $P$ 가 있다. 삼각형  $ABP$ 의 넓이의 최솟값은?

- ①  $\frac{5}{3}$                       ②  $\frac{15}{8}$                       ③  $\frac{25}{12}$   
 ④  $\frac{55}{24}$                       ⑤  $\frac{5}{2}$



[22009-0095]

6

양수  $a$ 에 대하여 함수  $f(x) = x^3 + ax^2 - 1$ 이 열린구간  $(k, k+2)$ 에서 감소한다.  $f(1)$ 의 값이 최소가 되도록 하는  $a$ 에 대하여  $f(k)$ 의 값은? (단,  $k$ 는 실수이다.)

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

[22009-0096]

7

다항함수  $f(x)$ 가

$$f(n)f(n+2) < 0 \quad (n=2, 4, 6, 8)$$

을 만족시킨다. 방정식  $f'(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수의 최솟값은?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

[22009-0097]

8

최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $f(2)$ 의 최솟값은?

- (가) 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $(0, f(0))$ 에서의 접선이 점  $(-1, 0)$ 을 지난다.  
 (나)  $x_1 \neq x_2$ 인 모든 실수  $x_1, x_2$ 에 대하여  $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

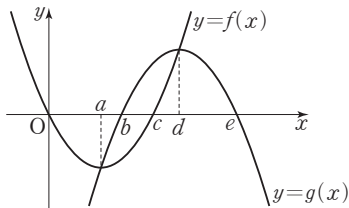
[22009-0098]

- 1 다항함수  $f(x)$ 에 대하여 곡선  $y = (-2x+5)f(x)$  위의 점  $P(2, 1)$ 에서의 접선을  $l$ 이라 하자.  $x$ 축 위의 점  $A$ 를 중심으로 하고 직선  $l$ 과 점  $P$ 에서 접하는 원을  $C_1$ ,  $y$ 축 위의 점  $B$ 를 중심으로 하고 직선  $l$ 과 점  $P$ 에서 접하는 원을  $C_2$ 라 하자.  $f'(2)=3$ 일 때, 두 원  $C_1, C_2$ 의 외부와 삼각형  $OAB$ 의 내부의 공통부분의 넓이는?  
(단,  $O$ 는 원점이다.)

- ①  $\frac{27-8\pi}{6}$       ②  $\frac{18-5\pi}{4}$       ③  $\frac{27-7\pi}{6}$       ④  $\frac{54-13\pi}{12}$       ⑤  $\frac{9-2\pi}{2}$

[22009-0099]

- 2 두 이차함수  $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



- $f'(a)=0, g'(d)=0$ 일 때, 함수  $h(x)=f(x)g(x)$ 에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?  
(단,  $f(a)=g(a), f(d)=g(d), f(0)=f(c)=g(b)=g(e)=0$ )

| 보기 |

- ㄱ. 곡선  $y=h(x)$  위의 점  $(0, h(0))$ 에서의 접선의 기울기는 양수이다.  
 ㄴ. 함수  $h(x)$ 가 극소인 실수  $x$ 는 열린구간  $(a, c)$ 에 존재한다.  
 ㄷ. 함수  $h(x)$ 가 극값을 갖는 실수  $x$ 는 모두 열린구간  $(0, e)$ 에 존재한다.

- ① ㄱ      ② ㄷ      ③ ㄱ, ㄴ      ④ ㄴ, ㄷ      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



[22009-0100]

3 두 실수  $a, b$ 와 양수  $c$ 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax + b & (x \leq 0) \\ x^3 + cx - 2|x - c| & (x > 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때,  $f(-1)$ 의 최댓값은?(가) 함수  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.(나)  $x_1 < x_2$ 인 모든 실수  $x_1, x_2$ 에 대하여  $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.

①  $-\frac{17}{6}$

②  $-\frac{8}{3}$

③  $-\frac{5}{2}$

④  $-\frac{7}{3}$

⑤  $-\frac{13}{6}$

[22009-0101]

4 두 유리수  $p, q$  ( $p < q$ )에 대하여 삼차함수  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$ 가  $x=p$ 에서 극대이고  $x=q$ 에서 극소이다. 두 점  $A(p, f(p)), B(q, f(q))$ 에 대하여 선분  $AB$ 를 대각선으로 하는 사각형이 다음 조건을 만족시킨다.(가) 네 변은 각각  $x$ 축 또는  $y$ 축과 평행하다.

(나) 넓이가 4인 정사각형이다.

점  $B$ 를 지나고 직선  $AB$ 에 수직인 직선이 원점을 지날 때,  $f(3)$ 의 값을 구하시오. (단,  $a, b, c$ 는 상수이다.)

[22009-0102]

5 다항함수  $f(x)$ 에 대하여  $f(-1)=5, f(1)=0, f(2)=1$ 이고, 방정식  $f'(x)=0$ 의 실근은  $a$ 뿐이다. 함수  $f(x)$ 와 함수  $g(x)=(x^2+1)f(x)$ 에 대하여 보기에 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ.  $-1 < a < 2$ ㄴ.  $|g'(c)|=5$ 를 만족시키는 실수  $c$ 가 열린구간  $(-1, 2)$ 에 적어도 2개 존재한다.ㄷ.  $a > 1$ 이면 함수  $g(x)$ 가 극소가 되는  $x$ 가 열린구간  $(0, 2)$ 에 존재한다.

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**출제 경향**

함수의 극댓값과 극솟값을 구하거나 극대와 극소를 이용하여 함수의 그래프의 성질을 묻는 문제 등이 출제되고 있다.

함수  $f(x) = -x^4 + 8a^2x^2 - 1$ 이  $x=b$ 와  $x=2-2b$ 에서 극대일 때,  $a+b$ 의 값은?

(단,  $a, b$ 는  $a > 0, b > 1$ 인 상수이다.) [3점]

- ① 3                      ② 5                      ③ 7                      ④ 9                      ⑤ 11

2020학년도 대수능

**출제 의도** 함수의 증가와 감소를 알고, 극대를 이용하여 상수의 값의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이**  $f(x) = -x^4 + 8a^2x^2 - 1$ 에서  
 $f'(x) = -4x^3 + 16a^2x$   
 $= -4x(x+2a)(x-2a)$

$f'(x) = 0$ 에서  $x = -2a$  또는  $x = 0$  또는  $x = 2a$

$a > 0$ 이므로 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	$-2a$	...	0	...	$2a$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

함수  $f(x)$ 는  $x = -2a, x = 2a$ 에서 극댓값을 갖는다.

이때 함수  $f(x)$ 가  $x = b, x = 2 - 2b$ 에서 극대이고,  $b > 2 - 2b$ 이므로

$$-2a = 2 - 2b, 2a = b$$

따라서  $a = 1, b = 2$ 이므로

$$a + b = 1 + 2 = 3$$

답 ①

**출제 경향**

곡선 위의 점 또는 접선의 기울기가 주어졌을 때 접선의 방정식을 구하는 문제 또는 곡선 위에 있지 않은 한 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

최고차항의 계수가  $a$ 인 이차함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$|f'(x)| \leq 4x^2 + 5$$

를 만족시킨다. 함수  $y=f(x)$ 의 그래프의 대칭축이 직선  $x=1$ 일 때, 실수  $a$ 의 최댓값은? [4점]

- ①  $\frac{3}{2}$                       ② 2                      ③  $\frac{5}{2}$                       ④ 3                      ⑤  $\frac{7}{2}$

2021학년도 대수능 9월 모의평가

**출제 의도**

접선의 방정식을 이용하여 주어진 부등식을 만족시키는 함수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이**

$f(x)=a(x-1)^2+b$  ( $b$ 는 상수)라 하면

$$f'(x)=2a(x-1)$$

$$|f'(x)| \leq 4x^2 + 5 \text{에서}$$

$$|2a(x-1)| \leq 4x^2 + 5 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

㉠이 모든 실수  $x$ 에 대하여 성립해야 하므로 그림과 같이  $x < 1$ 에서 직선  $y = -|2a|(x-1)$ 이 점  $(1, 0)$ 에서 곡선  $y = 4x^2 + 5$ 에 그은 접선일 때 실수  $a$ 가 최대이다.

이때 접점의 좌표를  $(k, 4k^2 + 5)$  ( $k < 0$ )이라 하면

$$y = 4x^2 + 5 \text{에서}$$

$$y' = 8x$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - (4k^2 + 5) = 8k(x - k)$$

이 접선이 점  $(1, 0)$ 을 지나므로

$$4k^2 - 8k - 5 = 0, (2k + 1)(2k - 5) = 0$$

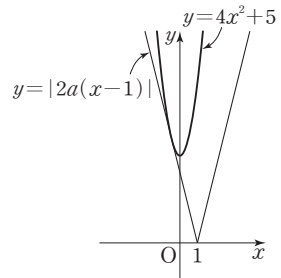
$$k = -\frac{1}{2}$$

즉, 접선의 기울기는  $8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$ 이므로

$$-|2a| = -4, |a| = 2$$

$$a = -2 \text{ 또는 } a = 2$$

따라서 실수  $a$ 의 최댓값은 2이다.



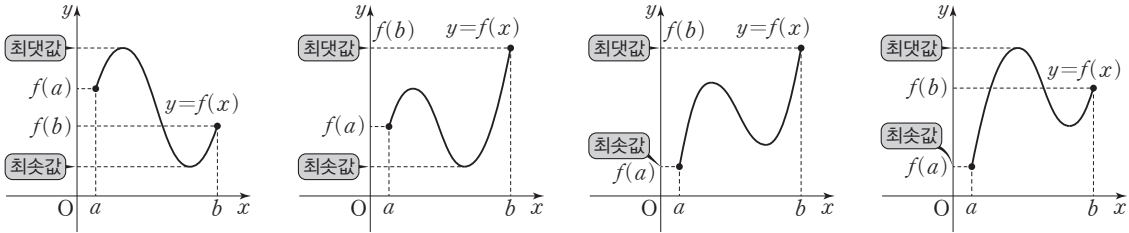
**답** ②

# 05 도함수의 활용 (2)

## 1. 함수의 최대와 최소

(1) 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이면 최대·최소 정리에 의하여 함수  $f(x)$ 는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

이때 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값,  $f(a), f(b)$  중에서 가장 큰 값이 함수  $f(x)$ 의 최댓값이고, 가장 작은 값이 함수  $f(x)$ 의 최솟값이다.



(2) 함수의 최대와 최소의 활용

도형의 길이, 넓이, 부피 등의 최댓값 또는 최솟값은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

- ① 주어진 조건에 적합한 변수를 정하여 미지수  $x$ 로 놓고  $x$ 의 값의 범위를 조사한다.
- ② 도형의 길이, 넓이, 부피 등을 함수  $f(x)$ 로 나타낸다.
- ③ 함수  $y=f(x)$ 의 그래프를 이용하여 ①에서 구한  $x$ 의 값의 범위에서 함수  $f(x)$ 의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

## 2. 방정식에의 활용

(1) 방정식  $f(x)=0$ 의 실근은 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와  $x$ 축이 만나는 점의  $x$ 좌표와 같다. 따라서 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

- ① 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수  
함수  $y=f(x)$ 의 그래프와  $x$ 축이 만나는 서로 다른 점의 개수를 구한다.
- ② 방정식  $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수  
함수  $y=f(x)-g(x)$ 의 그래프와  $x$ 축이 만나는 서로 다른 점의 개수를 구한다.
- ③ 방정식  $f(x)=k$  ( $k$ 는 상수)의 서로 다른 실근의 개수  
함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=k$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수를 구한다.

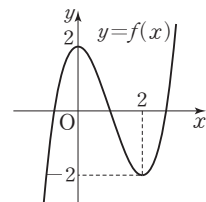
**예** 방정식  $x^3-3x^2+2=0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 구해 보자.

$f(x)=x^3-3x^2+2$ 라 하면  $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$ 이므로  $f'(x)=0$ 에서  $x=0$  또는  $x=2$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 그림과 같이 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는  $x$ 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식  $x^3-3x^2+2=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



**예제 1**

**함수의 최대와 최소**

닫힌구간  $[-1, 2]$ 에서 함수  $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 할 때,  $M+m$ 의 값은?

- ①  $\frac{11}{3}$                       ② 4                      ③  $\frac{13}{3}$                       ④  $\frac{14}{3}$                       ⑤ 5

**풀이 전략**

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때, 이 구간에서 함수  $f(x)$ 의 극댓값, 극솟값,  $f(a)$ ,  $f(b)$  중에서 가장 큰 값이 함수  $f(x)$ 의 최댓값이고, 가장 작은 값이 함수  $f(x)$ 의 최솟값이다.

**풀이**

$$f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3} \text{에서 } f'(x) = 4x^3 - 4x^2 = 4x^2(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

닫힌구간  $[-1, 2]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	-1	...	0	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	-	0	+	
$f(x)$	2	↘	$-\frac{1}{3}$	↘	$-\frac{2}{3}$	↗	5

닫힌구간  $[-1, 2]$ 에서 함수  $f(x)$ 는  $x=2$ 에서 최댓값 5를 갖고,  $x=1$ 에서 최솟값  $-\frac{2}{3}$ 를 갖는다.

$$\text{따라서 } M=5, m=-\frac{2}{3} \text{이므로 } M+m=5+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{13}{3}$$

**답** ③

**유제**

정답과 풀이 35쪽

**1**

[22009-0103]

닫힌구간  $[-2, 2]$ 에서 함수  $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + a$ 의 최댓값이  $M$ 이고, 최솟값이  $-8$ 일 때,  $M$ 의 값은? (단,  $a$ 는 상수이다.)

- ①  $\frac{11}{2}$                       ② 6                      ③  $\frac{13}{2}$                       ④ 7                      ⑤  $\frac{15}{2}$

**2**

[22009-0104]

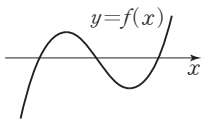
닫힌구간  $[a, a+1]$ 에서 함수  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 의 최솟값이  $-1$ 이 되도록 하는 모든 정수  $a$ 의 값의 합은?

- ① -5                      ② -4                      ③ -3                      ④ -2                      ⑤ -1

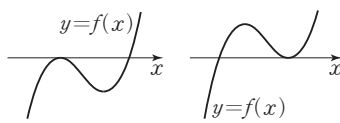
(2) 삼차방정식의 서로 다른 실근의 개수

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수  $f(x)$ 에 대하여 이차방정식  $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 즉 함수  $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 삼차방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 다음과 같다.

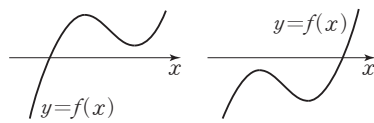
- ① (극댓값)  $\times$  (극솟값)  $< 0$ 인 경우: 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 1]과 같이  $x$ 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
- ② (극댓값)  $\times$  (극솟값)  $= 0$ 인 경우: 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 2]와 같이  $x$ 축과 접하고 다른 한 점을 지나므로 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
- ③ (극댓값)  $\times$  (극솟값)  $> 0$ 인 경우: 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 3]과 같이  $x$ 축과 오직 한 점에서 만나므로 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

**참고** 삼차함수  $f(x)$ 가 극값을 갖지 않는 경우, 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는  $x$ 축과 오직 한 점에서 만나므로 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

### 3. 부등식에의 활용

함수의 그래프를 이용하여 어떤 구간에서 부등식  $f(x) \geq 0$ 이 성립함을 증명할 수 있다.

방정식에서와 마찬가지로 극대, 극소를 이용하여 최댓값 또는 최솟값을 찾으면 된다.

(1) 모든 실수  $x$ 에 대하여 성립하는 부등식

- ① 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq 0$ 의 증명: ( $f(x)$ 의 최솟값)  $\geq 0$ 임을 보인다.
- ② 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq g(x)$ 의 증명: ( $f(x) - g(x)$ 의 최솟값)  $\geq 0$ 임을 보인다.
- ③ 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq k$  ( $k$ 는 상수)의 증명: ( $f(x)$ 의 최솟값)  $\geq k$ 임을 보이거나 ( $f(x) - k$ 의 최솟값)  $\geq 0$ 임을 보인다.

(2)  $x \geq a$ 에서 성립하는 부등식

- ①  $x \geq a$ 에서  $f(x) > 0$ 의 증명:  $x \geq a$ 에서 ( $f(x)$ 의 최솟값)  $> 0$ 임을 보인다.
- ②  $x \geq a$ 에서  $f(x) < 0$ 의 증명:  $x \geq a$ 에서 ( $f(x)$ 의 최댓값)  $< 0$ 임을 보인다.

(3) 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 성립하는 부등식

닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간  $(a, b)$ 에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서  $f(x) \geq 0$ 의 증명

- ① 열린구간  $(a, b)$ 에서  $f'(x) \geq 0$ 이면  $f(a) \geq 0$ 임을 보인다.
- ② 열린구간  $(a, b)$ 에서  $f'(x) \leq 0$ 이면  $f(b) \geq 0$ 임을 보인다.
- ③ 열린구간  $(a, b)$ 에서 함수  $f(x)$ 의 극값이 존재하면 극값을 고려하여 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 최솟값을 구하고 ( $f(x)$ 의 최솟값)  $\geq 0$ 임을 보인다.

## 예제 2 방정식과 부등식에의 활용

www.ebsi.co.kr

$x$ 에 대한 방정식  $2x^3 - 6x + 5 = a$ 가 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖도록 하는 모든 정수  $a$ 의 값의 합은?

- ① 6                      ② 7                      ③ 8                      ④ 9                      ⑤ 10

풀이 전략

$x$ 에 대한 방정식  $f(x) = a$  ( $a$ 는 상수)가 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 가지려면 함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 직선  $y = a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나고, 만나는 세 점의  $x$ 좌표가 음수, 양수, 양수이어야 한다.

풀이

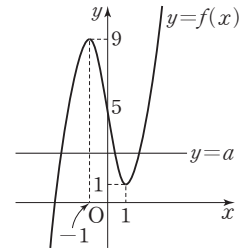
$f(x) = 2x^3 - 6x + 5$ 라 하면

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서  $x = -1$  또는  $x = 1$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	9	↘	1	↗



함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로  $x$ 에 대한 방정식  $2x^3 - 6x + 5 = a$ 가 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 가지려면 함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 직선  $y = a$ 가  $x$ 좌표가 음수인 한 점과  $x$ 좌표가 양수인 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

따라서  $1 < a < 5$ 이므로 모든 정수  $a$ 의 값은 2, 3, 4이고, 그 합은  $2 + 3 + 4 = 9$ 이다.

답 ④

## 유제

정답과 풀이 36쪽

3

[22009-0105]

$x$ 에 대한 방정식  $x^3 - 6x^2 - 8(1-a) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수를  $f(a)$ 라 할 때,  $f(0) + f(1) + f(a) = 6$ 을 만족시키는 정수  $a$ 의 최댓값은?

- ① 3                      ② 4                      ③ 5                      ④ 6                      ⑤ 7

4

[22009-0106]

모든 실수  $x$ 에 대하여 부등식  $3x^4 + 4x^3 + 5 \geq a$ 가 성립하도록 하는 실수  $a$ 의 최댓값은?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

### 4. 속도와 가속도

(1) 수직선 위를 움직이는 점의 속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 위치가  $x=f(t)$ 일 때, 점 P의 시각  $t$ 에서의 속도  $v$ 는

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

**설명** 점 P가 수직선 위를 움직일 때, 시각  $t$ 에서의 점 P의 위치를  $x$ 라 하면  $x$ 는  $t$ 에 대한 함수이다. 이 함수를  $x=f(t)$ 라 하면 시각  $t$ 에서  $t+\Delta t$ 까지의 점 P의 위치의 변화량  $\Delta x$ 는

$$\Delta x = f(t+\Delta t) - f(t)$$

이다. 시각  $t$ 에서  $t+\Delta t$ 까지의 점 P의 평균 속도는

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

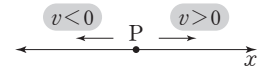
이고, 이것은 함수  $f(t)$ 의 평균변화율이다.

이때 점 P의 위치  $x=f(t)$ 의 시각  $t$ 에서의 순간변화율을 시각  $t$ 에서의 점 P의 순간속도 또는 속도라고 하며 보통  $v$ 로 나타낸다.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t)$$

**참고** 속도  $v$ 의 부호는 점 P의 운동 방향을 나타낸다.

$v > 0$ 이면 점 P는 양의 방향으로 움직이고,  $v < 0$ 이면 점 P는 음의 방향으로 움직인다.



(2) 수직선 위를 움직이는 점의 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 속도가  $v$ 일 때, 점 P의 시각  $t$ 에서의 가속도  $a$ 는

$$a = \frac{dv}{dt}$$

**설명** 점 P의 속도  $v$ 도 시각  $t$ 에 대한 함수이므로 이 함수의 순간변화율을 생각할 수 있다. 점 P의 시각  $t$ 에서의 속도의 순간변화율을 시각  $t$ 에서의 점 P의 가속도라고 하며 보통  $a$ 로 나타낸다.

$$a = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

**예** 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 위치  $x$ 가  $x=t^3-2t$ 일 때,

점 P의 시각  $t$ 에서의 속도  $v$ 는  $v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 2$

점 P의 시각  $t$ 에서의 가속도  $a$ 는  $a = \frac{dv}{dt} = 6t$

따라서 점 P의 시각  $t=1$ 에서의 속도와 가속도는

$$v = 3 \times 1^2 - 2 = 1, \quad a = 6 \times 1 = 6$$



### 예제 3 속도 와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 위치  $x$ 가

$$x = t^3 + at^2 + bt$$

이다. 점 P의 시각  $t=1$ 에서의 속도가 2이고, 시각  $t=3$ 에서의 가속도가 6일 때,  $a+b$ 의 값은?

(단,  $a$ 와  $b$ 는 상수이다.)

- ① 4                      ② 5                      ③ 6                      ④ 7                      ⑤ 8

#### 풀이 전략

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 위치가  $x$ 일 때, 점 P의 시각  $t$ 에서의 속도  $v$ 는  $v = \frac{dx}{dt}$ 이다. 또한, 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 속도가  $v$ 일 때, 점 P의 시각  $t$ 에서의 가속도  $a$ 는  $a = \frac{dv}{dt}$ 이다.

#### 풀이

점 P의 시각  $t$ 에서의 속도  $v$ 는  $v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 2at + b$

점 P의 시각  $t=1$ 에서의 속도가 2이므로

$$3 + 2a + b = 2, \quad b = -2a - 1 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

점 P의 시각  $t$ 에서의 가속도  $a$ 는  $a = \frac{dv}{dt} = 6t + 2a$

점 P의 시각  $t=3$ 에서의 가속도가 6이므로

$$18 + 2a = 6 \text{에서 } a = -6$$

$$a = -6 \text{을 ㉠에 대입하면 } b = 11$$

$$\text{따라서 } a + b = -6 + 11 = 5$$

답 ②

### 유제

#### 5

[22009-0107]

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 위치  $x$ 가

$$x = t^3 - 2t^2 - 2t$$

이다. 점 P의 속도가 2가 되는 시각에서의 점 P의 가속도는?

- ① 4                      ② 6                      ③ 8                      ④ 10                      ⑤ 12

#### 6

[22009-0108]

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 위치  $x_1, x_2$ 가

$$x_1 = t^3 - 4t^2 + 5t, \quad x_2 = 2t^2 - 7t$$

이다. 두 점 P, Q 사이의 거리가 8이 되는 시각에서의 점 P의 속도는?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

[22009-0109]

1 닫힌구간  $[0, 5]$ 에서 함수  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 15x + 10$ 의 최솟값은?

- ① -10                      ② -9                      ③ -8                      ④ -7                      ⑤ -6

[22009-0110]

2 닫힌구간  $[-1, 3]$ 에서 함수  $f(x) = x^3 - 2x^2 + a$ 의 최솟값이 2일 때, 상수  $a$ 의 값은?

- ① 1                          ② 2                          ③ 3                          ④ 4                          ⑤ 5

[22009-0111]

3 함수  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - 2$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 를  $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 0) \\ 4x - 5 - f'(x) & (x \geq 0) \end{cases}$ 이라 하자. 닫힌구간  $[-4, 3]$ 에서 함수  $g(x)$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 할 때,  $M + m$ 의 값은?

- ① -4                          ② -2                          ③ 0                          ④ 2                          ⑤ 4

[22009-0112]

4  $x$ 에 대한 방정식  $x^3 - 3x^2 - 9x - 1 = 4a$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 정수  $a$ 의 개수는?

- ① 6                          ② 7                          ③ 8                          ④ 9                          ⑤ 10

[22009-0113]

- 5 곡선  $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 10x + \frac{1}{3}$  과 직선  $y = 2x + a$  가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수  $a$  의 값의 합을 구하시오.

[22009-0114]

- 6  $x > 0$  인 모든 실수  $x$  에 대하여 부등식  $3x^3 - 9x^2 + a \geq 0$  이 성립하도록 하는 실수  $a$  의 최솟값은?  
 ① 11                      ② 12                      ③ 13                      ④ 14                      ⑤ 15

[22009-0115]

- 7 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 위치  $x$  가  
 $x = -2t^2 + 8t + 1$   
 이다. 점 P의 속도가 0이 되는 시각에서의 점 P의 위치는?  
 ① 5                      ② 6                      ③ 7                      ④ 8                      ⑤ 9

[22009-0116]

- 8 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 위치  $x$  가  
 $x = t^3 - 2t^2 - 2t$   
 이다. 점 P의 위치가 3이 되는 시각에서의 점 P의 가속도는?  
 ① 11                      ② 12                      ③ 13                      ④ 14                      ⑤ 15

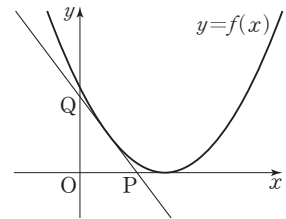
[22009-0117]

- 1 닫힌구간  $[0, 4]$ 에서 함수  $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 20일 때,  $a + f(1)$ 의 값은?  
(단,  $a$ 는 상수이다.)

① 3                      ② 4                      ③ 5                      ④ 6                      ⑤ 7

[22009-0118]

- 2 함수  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ 의 그래프 위의 점  $(a, f(a))$  ( $0 < a < 1$ )에서의 접선이  $x$ 축 및  $y$ 축과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이의 최댓값은?  
(단, O는 원점이다.)



①  $\frac{8}{27}$                       ②  $\frac{1}{3}$                       ③  $\frac{10}{27}$   
④  $\frac{11}{27}$                       ⑤  $\frac{4}{9}$

[22009-0119]

- 3 함수  $f(x) = x^3 - kx^2 - k^2x$ 가 닫힌구간  $[0, 2]$ 에서 최솟값  $-2k^2 - 2k + 3$ 을 갖도록 하는 모든 양수  $k$ 의 값의 합은?

①  $\frac{5}{2}$                       ② 3                      ③  $\frac{7}{2}$                       ④ 4                      ⑤  $\frac{9}{2}$

[22009-0120]

- 4 함수  $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + a$ 의 최솟값이  $-119$ 일 때, 곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=k$ 가 만나는 점의 개수가 3이 되도록 하는 모든 상수  $k$ 의 값의 합은  $p$ 이다.  $a+p$ 의 값은? (단,  $a$ 는 상수이다.)

① 23                      ② 24                      ③ 25                      ④ 26                      ⑤ 27

[22009-0121]

- 5 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 방정식  $f(x)=n$ 이 서로 다른 3개의 실근을 갖도록 하는 모든 정수  $n$ 의 개수를 구하시오.

(가) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(-x)=-f(x)$ 이다.

(나) 곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=f(2)$ 는 서로 다른 두 점에서 만나고,  $f(2)<0$ 이다.

[22009-0122]

- 6 실수  $t$ 와 함수  $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ 에 대하여  $x$ 에 대한 방정식  $|f(x)|=t$ 의 서로 다른 실근의 개수를  $g(t)$ 라 하자. 함수  $h(t)=g(t)-g(t-2)$ 가  $t=a$ 에서 불연속인 모든 상수  $a$ 의 값의 합은?

- ① 24                      ② 27                      ③ 30                      ④ 33                      ⑤ 36

[22009-0123]

- 7 함수  $f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3+k$ 일 때, 모든 실수  $x$ 에 대하여 부등식

$$f(2\sin x) \geq 16\sin^2 x$$

가 성립하도록 하는 실수  $k$ 의 최솟값은?

- ① 21                      ② 22                      ③ 23                      ④ 24                      ⑤ 25

[22009-0124]

- 8 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 위치는 각각

$$f(t)=\frac{1}{3}t^3-16t, g(t)=2t^2-4t$$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q의 가속도는 각각  $p, q$ 이다.  $p-q$ 의 값은?

- ① -8                      ② -4                      ③ 0                      ④ 4                      ⑤ 8

[22009-0125]

- 1 자연수  $n$ 에 대하여 곡선  $y = \frac{1}{4}x^4 + nx^3 - 5n^2x^2 + \frac{15}{4}n^4$ 이 직선  $y = k$ 와 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이 되도록 하는 실수  $k$ 의 값 중에서 양수인 것을  $f(n)$ , 음수인 것을  $g(n)$ 이라 하자.  $\sum_{n=1}^4 \frac{f(n) - g(n)}{n}$ 의 값은?
- ① 720                      ② 760                      ③ 800                      ④ 840                      ⑤ 880

[22009-0126]

- 2 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 위치  $x_1, x_2$ 가
- $$x_1 = t^3 + at^2 - 25, \quad x_2 = 3t^2 + bt + 7$$
- 이다. 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 시각  $t=8$ 일 때 두 점 P, Q가 만난다.  
 (나)  $0 < t < 8$ 에서 두 점 P, Q 사이의 거리는 시각  $t=a$  ( $0 < a < 8$ )일 때 최대이고, 이 시각에 점 Q가 운동 방향을 바꾼다.

시각  $t=a$ 일 때 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하시오. (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

[22009-0127]

- 3 함수  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가)  $\alpha\beta = -4$ 인  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ )는 방정식  $f'(x) = 0$ 의 실근이다.  
 (나) 함수  $f(x)$ 의 극댓값은 0이다.

실수  $t$ 에 대하여 구간  $(-\infty, t]$ 에서  $f(x)$ 의 최솟값을  $g(t)$ 라 하고, 구간  $[t, \infty)$ 에서  $f(x)$ 의 최솟값을  $h(t)$ 라 하자. 두 함수  $g(t), h(t)$ 가 모두 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때,  $f(\alpha) + f(\beta)$ 의 값은?

(단,  $a, b, c$ 는 상수이다.)

- ① -38                      ② -36                      ③ -34                      ④ -32                      ⑤ -30

**출제 경향**

함수의 그래프를 이해하여 함수의 최댓값, 최솟값을 구하거나 함수를 추론하는 문제, 방정식의 서로 다른 실근의 개수와 함수의 그래프의 교점의 개수의 관계를 이용하는 문제, 도함수를 활용하는 수직선 위의 움직이는 점의 위치, 속도와 가속도에 관련된 문제 등이 출제되고 있다.

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식  $f(x) - x = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
- (나) 방정식  $f(x) + x = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0) = 0, f'(1) = 1$ 일 때,  $f(3)$ 의 값을 구하시오. [4점]

2020학년도 대수능

**출제 의도** 방정식의 실근의 개수와 함수의 그래프의 관계로부터 함수를 추론하여 함숫값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이**  $f(0) = 0$ 이므로  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$  ( $a > 0, a, b, c$ 는 상수)로 놓을 수 있다.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{이고, } f'(1) = 1 \text{에서 } 3a + 2b + c = 1 \quad \text{..... ㉠}$$

두 조건 (가), (나)에 의하여 곡선  $y = f(x)$ 는 그림과 같이 직선  $y = x$ 와 원점에서 접하고, 직선  $y = -x$ 와 점  $(\alpha, f(\alpha))$  ( $0 < \alpha < 1$ )에서 접한다.

$$f'(0) = 1 \text{이므로 } c = 1 \text{이고, ㉠에서 } 3a + 2b = 0, \text{ 즉 } b = -\frac{3}{2}a \text{이므로}$$

$$f(x) = ax^3 - \frac{3}{2}ax^2 + x, f'(x) = 3ax^2 - 3ax + 1$$

$$f(\alpha) = a\alpha^3 - \frac{3}{2}a\alpha^2 + \alpha = -\alpha \text{에서 } a(2a\alpha^2 - 3a\alpha + 4) = 0$$

$$a \neq 0 \text{이므로 } 2a\alpha^2 - 3a\alpha + 4 = 0 \quad \text{..... ㉡}$$

$$f'(\alpha) = 3a\alpha^2 - 3a\alpha + 1 = -1 \text{에서 } 3a\alpha^2 - 3a\alpha + 2 = 0 \quad \text{..... ㉢}$$

$$\text{㉡, ㉢에서 } a\alpha^2 - 2 = 0, a\alpha^2 = 2 \quad \text{..... ㉣}$$

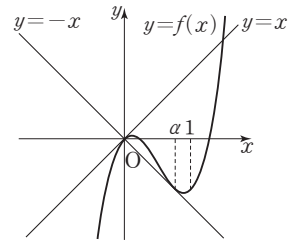
$$\text{㉣을 ㉡에 대입하면 } 4 - 3a\alpha + 4 = 0, a\alpha = \frac{8}{3} \quad \text{..... ㉤}$$

$$\text{㉣을 ㉢에 대입하면 } \frac{8}{3}\alpha = 2, \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\text{㉤에서 } \frac{3}{4}a = \frac{8}{3}, a = \frac{32}{9}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{32}{9}x^3 - \frac{16}{3}x^2 + x \text{이므로}$$

$$f(3) = 96 - 48 + 3 = 51$$



답 51

# 06 부정적분과 정적분

## 1. 부정적분의 정의

- (1) 함수  $F(x)$ 의 도함수가  $f(x)$ , 즉  $F'(x)=f(x)$ 일 때  $F(x)$ 를  $f(x)$ 의 부정적분이라 하고, 함수  $f(x)$ 의 부정적분을 구하는 것을  $f(x)$ 를 적분한다고 한다.
- (2) 함수  $f(x)$ 의 한 부정적분을  $F(x)$ 라고 하면 함수  $f(x)$ 의 모든 부정적분은

$$F(x)+C \quad (C \text{는 상수})$$

로 나타낼 수 있고, 이것을 기호로  $\int f(x)dx$ 와 같이 나타낸다.

즉,  $\int f(x)dx=F(x)+C$ 이다. 이때 상수  $C$ 를 적분상수라고 한다.

**설명** 두 함수  $F(x), G(x)$ 가 모두 함수  $f(x)$ 의 부정적분이면  $F'(x)=f(x), G'(x)=f(x)$ 이므로

$$\{G(x)-F(x)\}'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

이다. 그런데 도함수가 0인 함수는 상수함수이므로 그 상수를  $C$ 라고 하면

$$G(x)-F(x)=C \quad (C \text{는 상수}), \text{ 즉 } G(x)=F(x)+C$$

이다. 따라서  $f(x)$ 의 한 부정적분을  $F(x)$ 라고 하면  $f(x)$ 의 부정적분은 모두  $F(x)+C$  ( $C$ 는 상수)로 나타낼 수 있다.

**참고** 미분가능한 함수  $f(x)$ 에 대하여

$$\textcircled{1} \frac{d}{dx} \left\{ \int f(x)dx \right\} = f(x)$$

$$\textcircled{2} \int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx = f(x) + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

## 2. 함수 $y=x^n$ ( $n$ 은 양의 정수)와 함수 $y=1$ 의 부정적분

(1)  $n$ 이 양의 정수일 때,  $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$  ( $C$ 는 적분상수)

(2)  $\int 1 dx = x + C$  ( $C$ 는 적분상수)

## 3. 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분

두 함수  $f(x), g(x)$ 가 부정적분을 가질 때

(1)  $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$  (단,  $k$ 는 0이 아닌 상수)

(2)  $\int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$       (3)  $\int \{f(x)-g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

**설명** (2) 두 함수  $f(x), g(x)$ 의 부정적분 중의 하나를 각각  $F(x), G(x)$ 라고 하면

$$\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x) \text{이므로}$$

$$\int \{f(x)+g(x)\}dx = F(x)+G(x)+C \quad (C \text{는 적분상수}) \quad \textcircled{7}$$

한편,

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = \{F(x)+C_1\} + \{G(x)+C_2\} \quad (C_1, C_2 \text{는 적분상수})$$

$$= F(x)+G(x)+C_1+C_2 \quad \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$ 의 우변에서  $C_1+C_2$ 는 임의의 상수이므로  $C_1+C_2=C$ 로 놓으면  $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서

$$\int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$



**예제 1** 부정적분의 정의와 성질

다항함수  $f(x)$ 의 한 부정적분을  $F(x)$ 라 하면 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$F(x) = xf(x) + x^3 - 2x^2$$

이 성립하고,  $F(1) = 2$ 이다.  $f(3)$ 의 값은?

- ① -2                      ② -1                      ③ 0                      ④ 1                      ⑤ 2

**풀이 전략**

함수  $F(x)$ 가 다항함수  $f(x)$ 의 한 부정적분일 때,  $F'(x) = f(x)$ 이다.

**풀이**

$F(x) = xf(x) + x^3 - 2x^2$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) + 3x^2 - 4x$$

$$xf'(x) = -3x^2 + 4x$$

$f(x)$ 가 다항함수이므로  $f'(x) = -3x + 4$

$$f(x) = \int (-3x + 4)dx = -\frac{3}{2}x^2 + 4x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

한편,  $F(1) = f(1) + 1 - 2 = 2$ 에서

$f(1) = 3$ 이므로

$$f(1) = -\frac{3}{2} + 4 + C = 3, \quad C = \frac{1}{2}$$

따라서  $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x + \frac{1}{2}$  이므로

$$f(3) = -\frac{27}{2} + 12 + \frac{1}{2} = -1$$

답 ②

**유제**

정답과 풀이 44쪽

**1**

다항함수  $f(x)$ 에 대하여  $f'(x) = x(3x + 4)$ 이고  $f(0) = -1$ 일 때,  $f(2)$ 의 값은?

[22009-0128]

- ① 9                      ② 11                      ③ 13                      ④ 15                      ⑤ 17

**2**

이차함수  $f(x)$ 와 다항함수  $g(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

[22009-0129]

$$f'(x) = x^2 + g(x), \quad \frac{d}{dx} \int \{f(x) + g(x)\} dx = -2x$$

를 만족시킬 때,  $f(1) - g(1)$ 의 값은?

- ① 3                      ② 4                      ③ 5                      ④ 6                      ⑤ 7

## 4. 정적분의 정의

함수  $f(x)$ 가 두 실수  $a, b$ 를 포함하는 구간에서 연속일 때,  $f(x)$ 의 한 부정적분을  $F(x)$ 라고 하면  $x$ 의 값이  $a$ 에서  $b$ 까지 변할 때의  $F(x)$ 의 변화량  $F(b) - F(a)$ 를 함수  $f(x)$ 의  $a$ 에서  $b$ 까지의 정적분이라 하고, 이것을 기호로

$$\int_a^b f(x) dx$$

와 같이 나타낸다. 또  $F(b) - F(a)$ 를 기호

$$\left[ F(x) \right]_a^b$$

로도 나타낸다. 즉,

$$\int_a^b f(x) dx = \left[ F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

이다.

**참고** (1) 두 함수  $F(x), G(x)$ 가 모두 함수  $f(x)$ 의 부정적분일 때,  $F(x) = G(x) + C$  ( $C$ 는 상수)이므로

$$F(b) - F(a) = \{G(b) + C\} - \{G(a) + C\} = G(b) - G(a)$$

(2) 함수  $F(x)$ 가 함수  $f(x)$ 의 부정적분일 때,

$$\int_a^a f(x) dx = \left[ F(x) \right]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = \left[ F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a) = -\{F(a) - F(b)\} = -\left[ F(x) \right]_b^a = -\int_b^a f(x) dx$$

(3) 정적분의 정의에서 변수를  $x$  대신 다른 문자를 사용해도 정적분의 값은 변하지 않는다. 즉,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$$

(4) 정적분  $\int_a^b f(x) dx$ 의 값을 구하는 것을 함수  $f(x)$ 를  $a$ 에서  $b$ 까지 적분한다고 한다.

## 5. 정적분과 미분의 관계

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (\text{단, } a < x < b)$$

**설명** 함수  $f(t)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때,  $f(t)$ 의 한 부정적분을  $F(t)$ 라고 하면  $f(t)$ 의  $a$ 에서  $x$  ( $a < x < b$ )까지

의 정적분은  $\int_a^x f(t) dt = \left[ F(t) \right]_a^x = F(x) - F(a)$ 이므로

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = \frac{d}{dx} \{F(x) - F(a)\} = F'(x) - 0 = f(x)$$

**참고** 다항함수  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 상수  $a$ 에 대하여  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$

**예**  $\frac{d}{dx} \int_2^x (t^2 + 2t - 1) dt = x^2 + 2x - 1$

## 예제 2 정적분과 미분의 관계

www.ebsi.co.kr

다항함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$\int_{-1}^x f(t)dt = 4x^3 + ax^2 + bx$$

를 만족시키고  $f(1)=5$ 일 때,  $a+b$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

- ① -8                      ② -7                      ③ -6                      ④ -5                      ⑤ -4

풀이  
전략

다항함수  $f(x)$ 와 상수  $a$ 에 대하여  $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ ,  $\int_a^a f(t)dt=0$ 이다.

풀이

$$\int_{-1}^x f(t)dt = 4x^3 + ax^2 + bx \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

㉠의 양변에  $x=-1$ 을 대입하면

$$-4 + a - b = 0, \text{ 즉 } a - b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 12x^2 + 2ax + b$$

$f(1)=5$ 이므로

$$12 + 2a + b = 5, \text{ 즉 } 2a + b = -7 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a = -1, b = -5$$

따라서  $a+b = -1 + (-5) = -6$

답 ③

## 유제

정답과 풀이 44쪽

### 3

다항함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

[22009-0130]

$$\int_1^x f(t)dt = 2x^3 - x^2 + ax$$

를 만족시킬 때,  $f(a)$ 의 값은? (단,  $a$ 는 상수이다.)

- ① 7                      ② 8                      ③ 9                      ④ 10                      ⑤ 11

### 4

다항함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

[22009-0131]

$$xf(x) = \int_2^x f(t)dt + 3x^4 - 4x^2$$

을 만족시킬 때,  $f(3)$ 의 값을 구하시오.

## 6. 정적분의 성질 (1)

두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때

$$(1) \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad (\text{단, } k \text{는 상수})$$

$$(2) \int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$(3) \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

**설명** 두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 의 한 부정적분을 각각  $F(x)$ ,  $G(x)$ 라고 하자.

① 상수  $k$ 에 대하여  $\{kF(x)\}' = kF'(x) = kf(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_a^b kf(x)dx &= \left[ kF(x) \right]_a^b = kF(b) - kF(a) \\ &= k\{F(b) - F(a)\} \\ &= k \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

②  $\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx &= \left[ F(x) + G(x) \right]_a^b \\ &= \{F(b) + G(b)\} - \{F(a) + G(a)\} \\ &= \{F(b) - F(a)\} + \{G(b) - G(a)\} \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

**예**  $\int_1^3 (x^2 - 3x)dx + \int_1^3 (2x^2 + x)dx = \int_1^3 \{(x^2 - 3x) + (2x^2 + x)\}dx = \int_1^3 (3x^2 - 2x)dx$

$$= \left[ x^3 - x^2 \right]_1^3 = (3^3 - 3^2) - (1^3 - 1^2) = 18$$

## 7. 정적분의 성질 (2)

함수  $f(x)$ 가 임의의 세 실수  $a, b, c$ 를 포함하는 구간에서 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

**설명** 함수  $f(x)$ 의 한 부정적분을  $F(x)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx &= \left[ F(x) \right]_a^c + \left[ F(x) \right]_c^b \\ &= \{F(c) - F(a)\} + \{F(b) - F(c)\} \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

**예**  $\int_0^1 x^3 dx + \int_1^4 x^3 dx = \int_0^4 x^3 dx = \left[ \frac{1}{4}x^4 \right]_0^4 = 64 - 0 = 64$

### 예제 3 정적분의 성질

함수  $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & (x < 1) \\ x^2 & (x \geq 1) \end{cases}$ 에 대하여  $\int_{-2}^0 xf(x)dx + \int_0^2 xf(x)dx$ 의 값은?

- ①  $\frac{55}{4}$                       ②  $\frac{57}{4}$                       ③  $\frac{59}{4}$                       ④  $\frac{61}{4}$                       ⑤  $\frac{63}{4}$

**풀이 전략**

함수  $f(x)$ 가 임의의 세 실수  $a, b, c$ 를 포함하는 구간에서 연속일 때

$$(1) \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$(2) \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

**풀이**

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^0 xf(x)dx + \int_0^2 xf(x)dx \\ &= \int_{-2}^2 xf(x)dx \\ &= \int_{-2}^1 xf(x)dx + \int_1^2 xf(x)dx \\ &= \int_{-2}^1 x(3x-2)dx + \int_1^2 (x \times x^2)dx \\ &= \int_{-2}^1 (3x^2 - 2x)dx + \int_1^2 x^3 dx \\ &= \left[ x^3 - x^2 \right]_{-2}^1 + \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_1^2 \\ &= \{0 - (-12)\} + \left(4 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{63}{4} \end{aligned}$$

답 ⑤

### 유제

정답과 풀이 44쪽

#### 5

[22009-0132]

$9 \int_1^3 \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) dx - 2 \int_3^1 \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x\right) dx$ 의 값은?

- ① 6                      ② 8                      ③ 10                      ④ 12                      ⑤ 14

#### 6

[22009-0133]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수  $f(x) = \begin{cases} ax & (x < -1) \\ 6x^2 - 2ax & (x \geq -1) \end{cases}$ 에 대하여  $\int_{-3}^2 f(x)dx$ 의 값은?

(단,  $a$ 는 상수이다.)

- ① 20                      ② 24                      ③ 28                      ④ 32                      ⑤ 36

### 8. 다항함수의 성질을 이용한 정적분

(1) 다항함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(-x)=f(x)$ 를 만족시킬 때,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

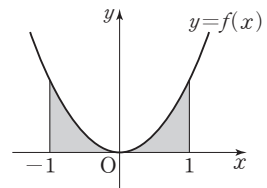
**참고** 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(-x)=f(x)$ 를 만족시키는 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는  $y$ 축에 대하여 대칭이다.

예를 들어, 함수  $f(x)=x^2$ 은

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

이고, 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같이  $y$ 축에 대하여 대칭이다. 이때

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



(2) 다항함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(-x)=-f(x)$ 를 만족시킬 때,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

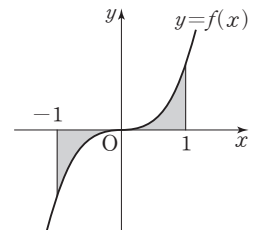
**참고** 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(-x)=-f(x)$ 를 만족시키는 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

예를 들어, 함수  $f(x)=x^3$ 은

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

이고, 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 원점에 대하여 대칭이다. 이때

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$



### 9. 정적분으로 표시된 함수의 극한

함수  $f(x)$ 가 실수  $a$ 를 포함하는 구간에서 연속일 때

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t)dt = f(a)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt = f(a)$$

**설명** 함수  $f(x)$ 의 한 부정적분을  $F(x)$ 라고 하면

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t)dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = F'(a) = f(a)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x-a} = F'(a) = f(a)$$

**예** (1)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} (t^2 + 6t)dt = 1^2 + 6 \times 1 = 7$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x (3t+4)dt = 3 \times 2 + 4 = 10$

### 예제 4 다항함수의 성질을 이용한 정적분

최고차항의 계수가 1인 사차함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(-x)=f(x)$ 를 만족시킨다.  $f'(2)=8$ 이고

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{2}{5} \text{ 일 때, } f(1) \text{의 값은?}$$

- ① -5                      ② -4                      ③ -3                      ④ -2                      ⑤ -1

**풀이 전략**

다항함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(-x)=f(x)$ 이면  $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ 이다.

**풀이**

최고차항의 계수가 1인 사차함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(-x)=f(x)$ 를 만족시키므로  $f(x)=x^4+ax^2+b$  ( $a, b$ 는 상수)로 놓을 수 있다.

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax$$

$$f'(2) = 32 + 4a = 8 \text{ 에서 } a = -6$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_{-1}^1 (x^4 - 6x^2 + b)dx \\ &= 2\int_0^1 (x^4 - 6x^2 + b)dx \\ &= 2\left[\frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + bx\right]_0^1 \\ &= -\frac{18}{5} + 2b \end{aligned}$$

이므로

$$-\frac{18}{5} + 2b = \frac{2}{5} \text{ 에서 } b = 2$$

따라서  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2$ 이므로

$$f(1) = 1^4 - 6 \times 1^2 + 2 = -3$$

답 ③

**유제**

**7**

실수  $a$ 와 함수  $f(x) = x^2 - ax$ 에 대하여

[22009-0134]

$$\int_{-2}^2 \{f(x)\}^2 dx = 8a^2$$

일 때,  $10a^2$ 의 값을 구하시오.

**8**

삼차함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시킨다.

[22009-0135]

$$\int_{-1}^1 \{f(x) + f'(x)\} dx = 12$$

이고,  $f'(1) = 14$ 일 때,  $f(2)$ 의 값은?

- ① 12                      ② 18                      ③ 24                      ④ 30                      ⑤ 36

[22009-0136]

- 1 다항함수  $f(x)$ 에 대하여  $f'(x) = -4x + 8$ 이고  $f(x)$ 의 최댓값이 9일 때,  $f(1)$ 의 값은?  
 ① 6                      ② 7                      ③ 8                      ④ 9                      ⑤ 10

[22009-0137]

- 2 함수  $f(x) = \int (3x^2 + ax)dx$ 에 대하여 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기가  $-1$ 일 때,  $f(a)$ 의 값은? (단,  $a$ 는 상수이다.)  
 ①  $-93$                   ②  $-88$                   ③  $-83$                   ④  $-78$                   ⑤  $-73$

[22009-0138]

- 3 다항함수  $f(x)$ 의 한 부정적분  $F(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여  

$$F(x) = f(x) + 2x^3 - 7x^2$$
 을 만족시킬 때, 방정식  $f(x) = 5x^2$ 의 모든 실근의 합은?  
 ① 2                      ② 4                      ③ 6                      ④ 8                      ⑤ 10

[22009-0139]

- 4 다항함수  $f(x)$ 에 대하여  

$$f(x) = \int (4x^3 + a)dx$$
 이고  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$ 일 때,  $f(a)$ 의 값은? (단,  $a$ 는 상수이다.)  
 ① 15                      ② 18                      ③ 21                      ④ 24                      ⑤ 27

[22009-0140]

- 5  $\int_{-3}^1 (2x^2 + 5x)dx - \int_3^1 (2x^2 + 5x)dx$ 의 값은?  
 ① 20                      ② 24                      ③ 28                      ④ 32                      ⑤ 36



[22009-0141]

6  $\int_0^a |2x-6|dx=4a+2$ 를 만족시키는 실수  $a$ 의 값은?

- ① 2                      ② 4                      ③ 6                      ④ 8                      ⑤ 10

[22009-0142]

7 함수  $f(x)=4x^3+ax^2+1$ 에 대하여

$$\int_{-1}^3 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + 8$$

일 때, 상수  $a$ 의 값은?

- ① 6                      ② 7                      ③ 8                      ④ 9                      ⑤ 10

[22009-0143]

8 함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$f(x) = 6x^2 + 2x \int_0^1 f'(x)dx$$

를 만족시킬 때,  $\int_0^2 f(x)dx$ 의 값은?

- ① -14                      ② -12                      ③ -10                      ④ -8                      ⑤ -6

[22009-0144]

9 다항함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$\int_a^x f(t)dt = x^3 + 5x^2 - 6x$$

를 만족시킬 때,  $f(a)$ 의 값은? (단,  $a$ 는 양수이다.)

- ① 6                      ② 7                      ③ 8                      ④ 9                      ⑤ 10

[22009-0145]

10 함수  $f(x)=x^3+7x^2-4$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x^2-4} \int_2^x f(t)dt$ 의 값은?

- ① 8                      ② 9                      ③ 10                      ④ 11                      ⑤ 12

[22009-0146]

- 1 두 다항함수  $f(x), g(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$f'(x) = g'(x) - 3x^3 + 4x, g(x) = \int xf(x)dx$$

를 만족시키고,  $g(0) = -1$ 이다.  $f(2) + g(2)$ 의 값은?

- ① 27                      ② 29                      ③ 31                      ④ 33                      ⑤ 35

[22009-0147]

- 2 다항함수  $f(x)$ 에 대하여  $f'(x) = x^2 - 2x$ 이고, 함수  $f(x)$ 의 극댓값이 3일 때, 함수  $f(x)$ 의 극솟값은?

- ①  $\frac{1}{3}$                       ②  $\frac{2}{3}$                       ③ 1                      ④  $\frac{4}{3}$                       ⑤  $\frac{5}{3}$

[22009-0148]

- 3 다항함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $a + f(0)$ 의 값은? (단,  $a$ 는 상수이다.)

$$(가) f'(x) = 6x^2 + ax$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 3}{x - 1} = 2$$

- ① -7                      ② -6                      ③ -5                      ④ -4                      ⑤ -3

[22009-0149]

- 4 두 다항함수  $f(x), g(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$g(x) = \int \{x^2 + f(x)\} dx$$

를 만족시킨다.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = -1$ 이고,  $f(0) = g(0) = 0$ 일 때,  $\int_0^1 f(x)g(x)dx$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{10}$                       ②  $\frac{1}{5}$                       ③  $\frac{3}{10}$                       ④  $\frac{2}{5}$                       ⑤  $\frac{1}{2}$

[22009-0150]

5 상수  $a$ 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & (x \leq 1) \\ -2x + 8 & (x > 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때,  $\int_0^3 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx$ 의 값은?

- ①  $\frac{22}{3}$                       ②  $\frac{25}{3}$                       ③  $\frac{28}{3}$                       ④  $\frac{31}{3}$                       ⑤  $\frac{34}{3}$

[22009-0151]

6 실수 전체의 집합에서 연속인 함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.(가) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x+2) = f(x) + 2$ 이다.(나)  $\int_0^2 f(x)dx = -\frac{4}{3}$  $\int_{-2}^6 f(x)dx = \frac{q}{p}$ 일 때,  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.)

[22009-0152]

7 최고차항의 계수가 1인 이차함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $a$ 에 대하여

$$\int_{-a}^a xf(x)dx = 0$$

을 만족시키고,  $\int_{-1}^1 x^2 f(x)dx = \frac{12}{5}$ 이다.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t)dt$ 의 값은?

- ① 3                              ② 4                              ③ 5                              ④ 6                              ⑤ 7

[22009-0153]

8 두 다항함수  $f(x), g(x)$ 에 대하여

$$f(x) = 3x^2 + x \int_0^2 g(t)dt, \quad g(x) = -5x + \int_0^2 f(t)dt$$

일 때, 방정식  $f(x) = g(x)$ 의 모든 실근의 합은?

- ① -1                              ②  $-\frac{4}{3}$                               ③  $-\frac{5}{3}$                               ④ -2                              ⑤  $-\frac{7}{3}$

[22009-0154]

- 1 최고차항의 계수가 1인 다항함수  $f(x)$ 의 한 부정적분  $F(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$x\left\{4x + \frac{d}{dx}F(x)\right\} = -x^3 + \frac{1}{9}\{f'(x)\}^2 + xf(0)$$

을 만족시키고,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 3$ 이다.  $\int_0^2 f(x)dx$ 의 값은?

- ① 10                      ② 12                      ③ 14                      ④ 16                      ⑤ 18

[22009-0155]

- 2 실수 전체의 집합에서 연속인 함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $\int_{-2}^4 \{6x + f(x)\}dx$ 의 값은?

(가) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) + f(-x) = 0$ 이다.

(나)  $\int_{-1}^2 f(x)dx = 4$

(다)  $\int_{-4}^{-1} f(x)dx = -10$

- ① 34                      ② 36                      ③ 38                      ④ 40                      ⑤ 42

[22009-0156]

- 3 함수  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \leq 1) \\ 2x & (x > 1) \end{cases}$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_{-1}^x tf(t)dt$$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ.  $g(1) = 0$

ㄴ. 함수  $g(x)$ 는 극댓값을 갖는다.

ㄷ. 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $x$ 에 대한 방정식  $g(x) = n$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ                      ④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[22009-0157]

- 4 최고차항의 계수가 2인 삼차함수  $f(x)$ 는  $x=1$ ,  $x=\frac{5}{2}$ 에서 극값을 갖고, 함수  $g(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$g(x) = (1-x)f(x) + \int_1^x f(t)dt$$

를 만족시킨다. 곡선  $y=|g(x)|$ 와 직선  $y=mx$ 가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수  $m$ 의 값의 범위는  $\alpha < m < \beta$ 이다.  $\alpha + \beta = p + q\sqrt{2}$ 일 때,  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단,  $\alpha, \beta$ 는 실수이고,  $p, q$ 는 유리수이다.)

[22009-0158]

- 5 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 가 있다. 실수  $t$ 에 대하여 함수  $|f(x)-t|$ 가 미분가능하지 않은 점의 개수를  $g(t)$ 라 할 때, 두 함수  $f(x)$ 와  $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $f'(-1)=0$

(나) 모든 실수  $a$ 에 대하여  $\int_1^{-a} f'(x)dx + \int_1^{a+2} f'(x)dx = 0$ 이다.

(다) 함수  $g(t)$ 는  $t=0$ 과  $t=p$ 에서만 불연속이다. (단,  $p$ 는 양수이다.)

$\int_{-1}^1 f(x)dx$ 의 값은?

- ① 40                      ② 44                      ③ 48                      ④ 52                      ⑤ 56

**출제 경향**

정적분을 이용하여 함수를 구하는 문제, 정적분의 성질을 이용하여 정적분을 계산하는 문제 등이 출제되고 있다.

닫힌구간  $[0, 1]$ 에서 연속인 함수  $f(x)$ 가

$$f(0)=0, f(1)=1, \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $\int_{-3}^2 g(x)dx$ 의 값은?

[4점]

$$(가) g(x) = \begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1 < x < 0) \\ f(x) & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

(나) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $g(x+2)=g(x)$ 이다.

①  $\frac{5}{2}$

②  $\frac{17}{6}$

③  $\frac{19}{6}$

④  $\frac{7}{2}$

⑤  $\frac{23}{6}$

2022학년도 대수능 6월 모의평가

**출제 의도** 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이** 함수  $y = -f(x+1) + 1$ 의 그래프는 함수  $y = f(x)$ 의 그래프를  $x$ 축에 대하여 대칭이동시킨 후,  $x$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $1$ 만큼 평행이동시킨 것이다.

$$f(0)=0, f(1)=1, \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{6} \text{이므로}$$

조건 (가)에서

$$\int_{-1}^0 g(x)dx = \int_{-1}^0 \{-f(x+1)+1\}dx = -\frac{1}{6} + 1 = \frac{5}{6}$$

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{6}$$

$$\int_{-1}^1 g(x)dx = \int_{-1}^0 g(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

조건 (나)에서

$$g(x+2) = g(x) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{-3}^2 g(x)dx &= \int_{-3}^{-1} g(x)dx + \int_{-1}^1 g(x)dx + \int_1^2 g(x)dx = 2 \int_{-1}^1 g(x)dx + \int_{-1}^0 g(x)dx \\ &= 2 \times 1 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6} \end{aligned}$$

답 ②

**출제 경향**

정적분과 미분의 관계를 이용하여 함수를 구하는 문제, 정적분을 이용하여 극한값을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

다항함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\} \text{이다.}$$

(나)  $\int_0^2 f(x)dx = 5 \int_{-1}^1 xf(x)dx$

$f(0)=1$ 일 때,  $f(4)$ 의 값을 구하시오. [4점]

2020학년도 대수능

**출제 의도** 정적분과 미분의 관계를 이용하여 함수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이** 조건 (가)에 주어진 등식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(1) + \frac{x-1}{2}f'(x)$$

즉,  $f(x) = f(1) + (x-1)f'(x)$  ..... ㉠

㉠의 좌변인  $f(x)$ 의 최고차항을  $ax^n$  ( $a$ 는 0이 아닌 상수,  $n$ 은 자연수)라 하면 ㉠의 우변의 최고차항은  $x \times anx^{n-1} = anx^n$ 이므로

$ax^n = anx^n$ 에서  $n=1$

이때  $f(0)=1$ 이므로  $f(x) = ax+1$ 로 놓을 수 있다.

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (ax+1)dx = \left[ \frac{a}{2}x^2 + x \right]_0^2 = 2a+2 \text{이고,}$$

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx = \int_{-1}^1 (ax^2+x)dx = 2 \int_0^1 ax^2dx = 2 \left[ \frac{a}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{2a}{3} \text{이므로}$$

조건 (나)에서

$$2a+2 = 5 \times \frac{2a}{3}, a = \frac{3}{2}$$

따라서  $f(x) = \frac{3}{2}x+1$ 이므로  $f(4) = \frac{3}{2} \times 4 + 1 = 7$

답 7

# 07 정적분의 활용

## 1. 곡선과 $x$ 축 사이의 넓이

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선  $y=f(x)$ 와  $x$ 축 및 두 직선  $x=a$ ,  $x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이  $S$ 는

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

**설명** 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선  $y=f(x)$ 와  $x$ 축 및 두 직선  $x=a$ ,  $x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이  $S$ 를 구해 보자.

(1) 닫힌구간  $[a, b]$ 에서  $f(x) \geq 0$ 일 때,

곡선  $y=f(x)$ 와  $x$ 축 및 두 직선  $x=a$ ,  $x=t$  ( $a \leq t \leq b$ )로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S(t)$ 라 하자.  $x$ 의 값이  $t$ 에서  $t+\Delta t$ 까지 변할 때  $S(t)$ 의 증분을  $\Delta S$ 라고 하면  $\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$ 이다.

(i)  $\Delta t > 0$ 일 때, 함수  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[t, t+\Delta t]$ 에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이때 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라고 하면

$$m\Delta t \leq \Delta S \leq M\Delta t, \text{ 즉 } m \leq \frac{\Delta S}{\Delta t} \leq M$$

이다.

(ii)  $\Delta t < 0$ 일 때, (i)과 같은 방법으로

$$m \leq \frac{\Delta S}{\Delta t} \leq M$$

이다.

함수  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이므로  $\Delta t \rightarrow 0$ 이면  $m \rightarrow f(t)$ ,  $M \rightarrow f(t)$ 이므로

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = f(t)$ , 즉  $S'(t) = f(t)$ 이다. 따라서  $S(t)$ 는  $f(t)$ 의 한 부정적분이다. 이때  $S(a) = 0$ 이므로

$$\int_a^t f(x) dx = [S(x)]_a^t = S(t) - S(a) = S(t)$$

이다. 또  $t=b$ 일 때  $S(b) = \int_a^b f(x) dx$ 이다.

그런데  $S(b)$ 는 곡선  $y=f(x)$ 와  $x$ 축 및 두 직선  $x=a$ ,  $x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이이므로  $S$ 는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

(2) 닫힌구간  $[a, b]$ 에서  $f(x) \leq 0$ 일 때,

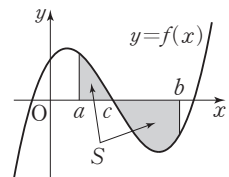
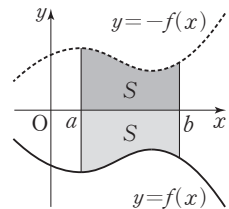
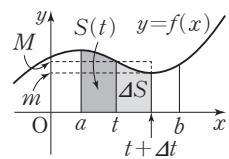
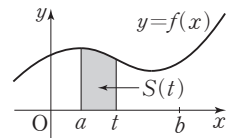
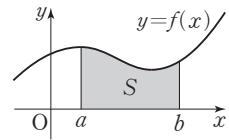
곡선  $y=f(x)$ 를  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 곡선  $y=-f(x)$ 에 대하여  $-f(x) \geq 0$ 이므로  $S$ 는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b \{-f(x)\} dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

(3) 닫힌구간  $[a, c]$ 에서  $f(x) \geq 0$ 이고 닫힌구간  $[c, b]$ 에서  $f(x) \leq 0$ 일 때,  $S$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b \{-f(x)\} dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b |f(x)| dx \\ &= \int_a^b |f(x)| dx \end{aligned}$$

(1), (2), (3)에 의하여  $S = \int_a^b |f(x)| dx$





**예제 1** 곡선과  $x$ 축 사이의 넓이

다항함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 곡선  $y=f(x)$ 와  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

(가)  $f'(x) = 3x^2 - 6x$

(나)  $f(0) = 0$

①  $\frac{21}{4}$

②  $\frac{23}{4}$

③  $\frac{25}{4}$

④  $\frac{27}{4}$

⑤  $\frac{29}{4}$

**풀이 전략**

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선  $y=f(x)$ 와  $x$ 축 및 두 직선  $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이  $S$ 는

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

**풀이**

조건 (가)에서

$$f(x) = \int (3x^2 - 6x) dx = x^3 - 3x^2 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

조건 (나)에서

$$f(0) = C = 0$$

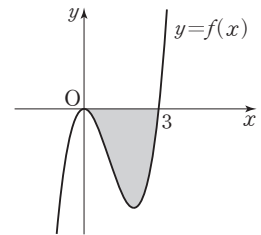
$$f(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3) \text{ 이므로}$$

$f(x) = 0$ 에서

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 곡선  $y=f(x)$ 와  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^3 |x^2(x-3)| dx = \int_0^3 (-x^3 + 3x^2) dx = \left[ -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \right]_0^3 = -\frac{81}{4} + 27 = \frac{27}{4}$$



답 ④

**유제**

정답과 풀이 53쪽

**1**

곡선  $y = x^3 - 2x^2 - 3x$ 와  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[22009-0159]

①  $\frac{47}{6}$

②  $\frac{53}{6}$

③  $\frac{59}{6}$

④  $\frac{65}{6}$

⑤  $\frac{71}{6}$

**2**

다항함수  $f(x)$ 에 대하여  $f'(x) = 2x - 2$ 이고  $f(x)$ 의 극솟값이 1일 때, 곡선  $y=f(x)$ 와  $x$ 축 및 두 직선  $x = -1, x = 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[22009-0160]

① 4

②  $\frac{14}{3}$

③  $\frac{16}{3}$

④ 6

⑤  $\frac{20}{3}$

## 2. 두 곡선 사이의 넓이

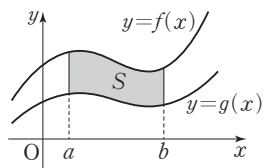
두 함수  $f(x), g(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선  $y=f(x), y=g(x)$  및 두 직선  $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이  $S$ 는

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

**설명** 두 함수  $f(x), g(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선  $y=f(x), y=g(x)$  및 두 직선  $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이  $S$ 를 구해 보자.

(i) 닫힌구간  $[a, b]$ 에서  $f(x) \geq g(x) \geq 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \\ &= \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \end{aligned}$$



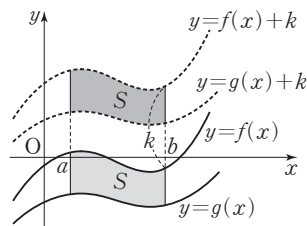
(ii) 닫힌구간  $[a, b]$ 에서  $f(x) \geq g(x)$ 이고  $f(x)$  또는  $g(x)$ 가 음의 값을 가질 때,

두 곡선  $y=f(x), y=g(x)$ 를  $y$ 축의 방향으로  $k$ 만큼 평행이동하여

$$f(x) + k \geq g(x) + k \geq 0$$

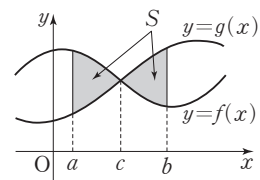
이 되게 한다. 이때 넓이  $S$ 는 두 곡선  $y=f(x)+k, y=g(x)+k$  및 두 직선  $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b [\{f(x)+k\} - \{g(x)+k\}] dx \\ &= \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \end{aligned}$$



(iii) 닫힌구간  $[a, c]$ 에서  $f(x) \geq g(x)$ 이고 닫힌구간  $[c, b]$ 에서  $f(x) \leq g(x)$ 일 때,

$$\begin{aligned} S &= \int_a^c \{f(x) - g(x)\} dx + \int_c^b \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_a^c |f(x) - g(x)| dx + \int_c^b |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \end{aligned}$$



(i), (ii), (iii)에서  $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

**예** 곡선  $y=x^2$ 과 직선  $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이  $S$ 를 구해 보자.

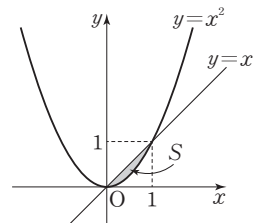
곡선  $y=x^2$ 과 직선  $y=x$ 가 만나는 점의  $x$ 좌표는

$$x^2 = x \text{에서}$$

$$x(x-1) = 0, \text{ 즉 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

닫힌구간  $[0, 1]$ 에서  $x^2 \leq x$ 이므로

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 |x^2 - x| dx = \int_0^1 (x - x^2) dx \\ &= \left[ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$



## 예제 2 두 곡선 사이의 넓이

www.ebsi.co.kr

두 함수  $f(x)=x(x-2)(x-3)$ ,  $g(x)=x(x-a)$ 에 대하여  $f(a)=0$ ,  $f'(a)g'(a)<0$ 일 때, 두 곡선  $y=f(x)$ 와  $y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단,  $a$ 는 상수이다.)

- ① 4                      ② 6                      ③ 8                      ④ 10                      ⑤ 12

풀이 전략

두 함수  $f(x), g(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선  $y=f(x), y=g(x)$  및 두 직선  $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이  $S$ 는  $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$ 이다.

풀이

$f(a)=0$ 이므로  $a=0$  또는  $a=2$  또는  $a=3$

(i)  $a=0$ 일 때,  $f'(0)>0, g'(0)=0$ 이므로  $f'(0)g'(0)=0$

(ii)  $a=2$ 일 때,  $f'(2)<0, g'(2)>0$ 이므로  $f'(2)g'(2)<0$

(iii)  $a=3$ 일 때,  $f'(3)>0, g'(3)>0$ 이므로  $f'(3)g'(3)>0$

(i), (ii), (iii)에서  $f'(a)g'(a)<0$ 을 만족시키는  $a$ 의 값은 2이다.

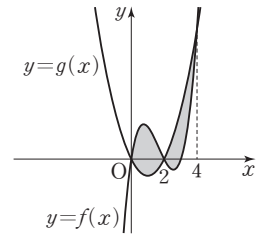
이때  $f(x)=g(x)$ 에서

$$x(x-2)(x-3)=x(x-2), x(x-2)(x-4)=0, x=0 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=4$$

두 함수  $y=f(x)$ 와  $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^4 |f(x)-g(x)|dx &= \int_0^2 \{f(x)-g(x)\}dx + \int_2^4 \{g(x)-f(x)\}dx \\ &= \int_0^2 (x^3-6x^2+8x)dx + \int_2^4 (-x^3+6x^2-8x)dx \\ &= \left[ \frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2 \right]_0^2 + \left[ -\frac{1}{4}x^4+2x^3-4x^2 \right]_2^4 \\ &= 4+4=8 \end{aligned}$$



답 ③

유제

정답과 풀이 54쪽

3

두 곡선  $y=2x^2-4x$ 와  $y=-x^2-x+6$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를  $S$ 라 할 때,  $4S$ 의 값을 구하시오.

[22009-0161]

4

함수  $f(x)=(x+2)(x-1)^2$ 의 그래프와 직선  $y=k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=k$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단,  $k$ 는 양수이다.)

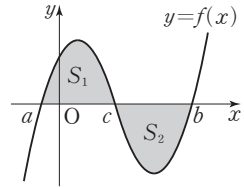
[22009-0162]

- ①  $\frac{27}{4}$                       ②  $\frac{29}{4}$                       ③  $\frac{31}{4}$                       ④  $\frac{33}{4}$                       ⑤  $\frac{35}{4}$

### 3. 두 곡선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우

(1) 곡선과  $x$ 축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고, 그림과 같이 닫힌구간  $[a, c]$ 와 닫힌구간  $[c, b]$ 에서 곡선  $y=f(x)$ 와  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 각각  $S_1, S_2$ 라고 할 때,



$$S_1=S_2 \text{이면 } \int_a^b f(x)dx=0$$

**설명** 닫힌구간  $[a, c]$ 에서  $f(x) \geq 0$ 이고 닫힌구간  $[c, b]$ 에서  $f(x) \leq 0$ 일 때,

$$S_1 = \int_a^c f(x)dx, S_2 = \int_c^b \{-f(x)\}dx = -\int_c^b f(x)dx$$

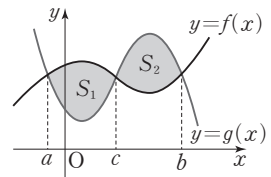
이때  $S_1=S_2$ 이면  $\int_a^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx$ 이므로

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = 0$$

$$\text{따라서 } \int_a^b f(x)dx = 0$$

(2) 두 곡선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우

두 함수  $f(x), g(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고, 그림과 같이 닫힌구간  $[a, c]$ 와 닫힌구간  $[c, b]$ 에서 두 곡선  $y=f(x), y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 각각  $S_1, S_2$ 라고 할 때,



$$S_1=S_2 \text{ 이면 } \int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=0$$

**설명** 닫힌구간  $[a, c]$ 에서  $f(x) \geq g(x)$ 이고 닫힌구간  $[c, b]$ 에서  $f(x) \leq g(x)$ 일 때,

$$S_1 = \int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx, S_2 = \int_c^b \{g(x)-f(x)\}dx = -\int_c^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

이때  $S_1=S_2$ 이면  $\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx = -\int_c^b \{f(x)-g(x)\}dx$ 이므로

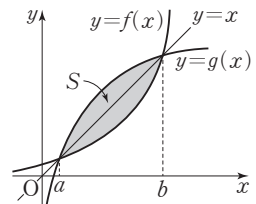
$$\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx + \int_c^b \{f(x)-g(x)\}dx = 0$$

$$\text{따라서 } \int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = 0$$

### 4. 역함수와 넓이의 관계

역함수가 존재하는 연속인 함수  $f(x)$ 의 역함수를  $g(x)$ 라고 하자. 그림과 같이 두 곡선  $y=f(x), y=g(x)$ 가 두 점  $(a, a), (b, b)$ 에서만 만날 때, 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 두 곡선  $y=f(x)$ 와  $y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이  $S$ 는

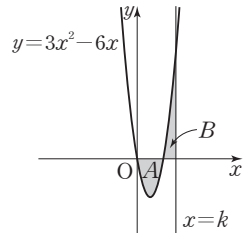
$$S = 2 \int_a^b |x-f(x)|dx$$



### 예제 3 두 곡선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우

www.ebsi.co.kr

그림과 같이 곡선  $y=3x^2-6x$ 와  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를  $A$ , 곡선  $y=3x^2-6x$  ( $x \geq 2$ )와  $x$ 축 및 직선  $x=k$  ( $k > 2$ )로 둘러싸인 부분의 넓이를  $B$ 라 하자.  $A=B$ 일 때, 상수  $k$ 의 값을 구하시오.



풀이 전략

두 함수  $f(x), g(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고,  $a \leq c \leq b$ 일 때,

$$\int_a^c \{f(x) - g(x)\} dx = \int_c^b \{g(x) - f(x)\} dx \text{ 이면 } \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx = 0 \text{ 이다.}$$

풀이

곡선  $y=3x^2-6x$ 와  $x$ 축이 만나는 점의  $x$ 좌표는

$$3x^2-6x=0, \text{ 즉 } 3x(x-2)=0 \text{ 에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

$A=B$ 에서

$$\int_0^2 (-3x^2+6x) dx = \int_2^k (3x^2-6x) dx \text{ 이므로}$$

$$\int_0^k (-3x^2+6x) dx = 0 \text{ 이다.}$$

$$\text{즉, } \left[ -x^3 + 3x^2 \right]_0^k = 0$$

$$-k^3 + 3k^2 = 0, \quad -k^2(k-3) = 0$$

$$k > 2 \text{ 이므로 } k=3$$

답 3

유제

정답과 풀이 54쪽

5

[22009-0163]

두 곡선  $y=2x^2-4x$ 와  $y=-x^2+ax$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가  $x$ 축에 의하여 이등분될 때, 상수  $a$ 에 대하여  $(a+4)^3$ 의 값은? (단,  $a > 2$ )

- ① 224                      ② 240                      ③ 256                      ④ 272                      ⑤ 288

6

[22009-0164]

정의역이  $\left\{x \mid x \geq -\frac{3}{2}\right\}$ 인 함수  $f(x)=x^2+3x+1$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 하자. 곡선  $y=f(x)$ 와  $y$ 축이 만나는 점을 A, 곡선  $y=g(x)$ 와  $x$ 축이 만나는 점을 B라 하자. 두 곡선  $y=f(x)$ 와  $y=g(x)$  및 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ①  $\frac{2}{3}$                       ②  $\frac{5}{6}$                       ③ 1                      ④  $\frac{7}{6}$                       ⑤  $\frac{4}{3}$

### 5. 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 속도를  $v(t)$ 라고 하자.

(1) 시각  $t$ 에서의 점 P의 위치를  $x=x(t)$ 라고 하면

$$x(t) = x(a) + \int_a^t v(t) dt$$

(2) 시각  $t=a$ 에서  $t=b$  ( $a \leq b$ )까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_a^b v(t) dt$$

(3) 시각  $t=a$ 에서  $t=b$  ( $a \leq b$ )까지 점 P가 움직인 거리  $s$ 는

$$s = \int_a^b |v(t)| dt$$

**설명** (1)  $\frac{d}{dt}x(t) = v(t)$ 에서  $x(t)$ 는  $v(t)$ 의 부정적분이므로

$$\int_a^t v(t) dt = [x(t)]_a^t = x(t) - x(a)$$

따라서  $x(t) = x(a) + \int_a^t v(t) dt$

(2) 시각  $t=a$ ,  $t=b$ 에서의 점 P의 위치가 각각  $x(a)$ ,  $x(b)$ 이므로 시각  $t=a$ 에서  $t=b$  ( $a \leq b$ )까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned} x(b) - x(a) &= \left\{ x(a) + \int_a^b v(t) dt \right\} - x(a) \\ &= \int_a^b v(t) dt \end{aligned}$$

(3) 시각  $t=a$ 에서  $t=b$  ( $a \leq b$ )까지 점 P가 움직인 거리  $s$ 는

(i) 닫힌구간  $[a, b]$ 에서  $v(t) \geq 0$ 일 때,

점 P는 양의 방향으로 움직이므로  $s = x(b) - x(a)$ 이다. 즉,

$$s = x(b) - x(a) = \int_a^b v(t) dt = \int_a^b |v(t)| dt$$

(ii) 닫힌구간  $[a, b]$ 에서  $v(t) \leq 0$ 일 때,

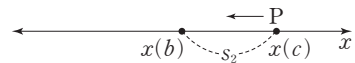
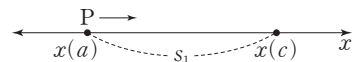
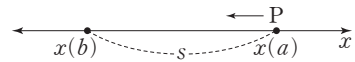
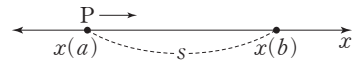
점 P는 음의 방향으로 움직이므로  $s = x(a) - x(b)$ 이다. 즉,

$$\begin{aligned} s &= x(a) - x(b) = - \int_a^b v(t) dt = \int_a^b \{-v(t)\} dt \\ &= \int_a^b |v(t)| dt \end{aligned}$$

(iii) 닫힌구간  $[a, c]$ 에서  $v(t) \geq 0$ 이고, 닫힌구간  $[c, b]$ 에서  $v(t) \leq 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 = \{x(c) - x(a)\} + \{x(c) - x(b)\} \\ &= \int_a^c v(t) dt + \int_c^b \{-v(t)\} dt \\ &= \int_a^c |v(t)| dt + \int_c^b |v(t)| dt = \int_a^b |v(t)| dt \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여  $s = \int_a^b |v(t)| dt$



## 예제 4 속도 와 거리

www.ebsi.co.kr

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 속도  $v(t)$ 가

$$v(t) = -3t^2 + 9t$$

이다. 점 P가 시각  $t=0$ 일 때부터 움직이는 방향이 바뀔 때까지 움직인 거리는?

- ①  $\frac{25}{2}$                       ② 13                      ③  $\frac{27}{2}$                       ④ 14                      ⑤  $\frac{29}{2}$

**풀이 전략**

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 속도를  $v(t)$ 라 하면 시각  $t=a$ 에서  $t=b$  ( $a \leq b$ )까지 점 P가 움직인 거리  $s$ 는

$$s = \int_a^b |v(t)| dt \text{이다.}$$

**풀이**

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간  $v(t)=0$ 이므로

$$-3t^2 + 9t = 0, \quad -3t(t-3) = 0$$

$t > 0$ 이므로

$$t = 3$$

따라서 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^3 |v(t)| dt &= \int_0^3 |-3t^2 + 9t| dt \\ &= \int_0^3 (-3t^2 + 9t) dt = \left[ -t^3 + \frac{9}{2}t^2 \right]_0^3 \\ &= \frac{27}{2} \end{aligned}$$

답 ③

## 유제

정답과 풀이 55쪽

**7**

[22009-0165]

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 속도  $v(t)$ 가

$$v(t) = t^3 - 3t^2 - 4t$$

이다. 점 P가 시각  $t=0$ 에서  $t=6$ 까지 움직인 거리는?

- ① 92                      ② 96                      ③ 100                      ④ 104                      ⑤ 108

**8**

[22009-0166]

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 속도  $v(t)$ 가

$$v(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t$$

이다. 점 P가 시각  $t=1$ 에서  $t=k$  ( $k > 1$ )까지 움직인 거리가  $\frac{187}{6}$ 일 때, 상수  $k$ 의 값을 구하시오.

[22009-0167]

1 곡선  $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ 과  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ①  $\frac{4}{5}$                       ②  $\frac{14}{15}$                       ③  $\frac{16}{15}$                       ④  $\frac{6}{5}$                       ⑤  $\frac{4}{3}$

[22009-0168]

2 곡선  $y = 2x^2 - 6x + 3$ 과 직선  $y = 3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ① 6                              ② 7                              ③ 8                              ④ 9                              ⑤ 10

[22009-0169]

3 함수  $f(x) = x^3 - 2x^2$ 에 대하여 두 곡선  $y = f(x)$ 와  $y = f'(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ①  $\frac{47}{6}$                       ②  $\frac{53}{6}$                       ③  $\frac{59}{6}$                       ④  $\frac{65}{6}$                       ⑤  $\frac{71}{6}$

[22009-0170]

4 함수  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ 의 그래프 위의 점  $(1, 2)$ 에서의 접선을  $l$ 이라 할 때, 곡선  $y = f(x)$ 와 직선  $l$  및  $y$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ① 1                              ② 2                              ③ 3                              ④ 4                              ⑤ 5



[22009-0171]

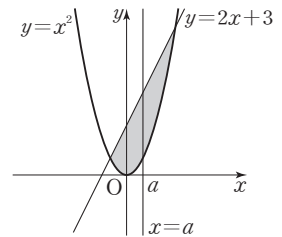
5 곡선  $y=x^4-(2+k)x^3+2kx^2$ 과  $x$ 축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같을 때, 상수  $k$ 의 값은?  
(단,  $k>2$ )

- ① 3                      ②  $\frac{10}{3}$                       ③  $\frac{11}{3}$                       ④ 4                      ⑤  $\frac{13}{3}$

[22009-0172]

6 그림과 같이 곡선  $y=x^2$ 과 직선  $y=2x+3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 직선  $x=a$ 에 의하여 이등분될 때, 상수  $a$ 의 값은?

- ① 1                      ②  $\frac{4}{3}$                       ③  $\frac{5}{3}$   
④ 2                      ⑤  $\frac{7}{3}$



[22009-0173]

7 시각  $t=0$ 일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 속도  $v(t)$ 가  
 $v(t)=3t^2-4t$   
이다. 점 P의 가속도가 14일 때, 점 P의 위치는?

- ① 8                      ② 9                      ③ 10                      ④ 11                      ⑤ 12

[22009-0174]

8 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 속도  $v(t)$ 가

$$v(t) = -\frac{1}{2}t^2 + pt$$

이다. 점 P가 시각  $t=p$ 에서  $t=4p$ 까지 움직인 거리가 22일 때,  $p^3$ 의 값을 구하시오. (단,  $p$ 는 양수이다.)

[22009-0175]

- 1 사차함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 곡선  $y=f(x)$ 와  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

(가)  $f'(x) = 4x^3 - 8x$

(나) 곡선  $y=f(x)$ 는  $x$ 축과 서로 다른 세 점에서 만난다.

- ①  $\frac{122}{15}$       ②  $\frac{124}{15}$       ③  $\frac{42}{5}$       ④  $\frac{128}{15}$       ⑤  $\frac{26}{3}$

[22009-0176]

- 2 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 와 양수  $a$ 에 대하여

$$f(-2) = f(0) = f(a), \quad f'(a) = 24$$

이다. 함수  $g(x)$ 를

$$g(x) = f(x) - f(0)$$

이라 할 때, 곡선  $y=g(x)$ 와  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는  $\frac{q}{p}$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하시오.(단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.)

[22009-0177]

- 3 함수  $f(x) = x^2 - 3x$ 에 대하여 함수  $y=f(x)$ 의 그래프를  $x$ 축에 대하여 대칭이동시킨 후  $x$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $4$ 만큼 평행이동시키면 함수  $y=g(x)$ 의 그래프와 일치한다. 두 곡선  $y=f(x)$ 와  $y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ①  $\frac{61}{3}$       ②  $\frac{64}{3}$       ③  $\frac{67}{3}$       ④  $\frac{70}{3}$       ⑤  $\frac{73}{3}$

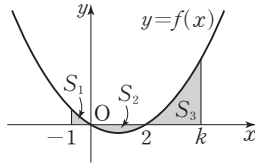
[22009-0178]

- 4 다항함수  $f(x)$ 에 대하여  $f'(x) = 6x^2 - 6$ 이다. 함수  $f(x)$ 의 극댓값이  $k$ 일 때, 곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=k$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단,  $k$ 는 상수이다.)

- ①  $\frac{19}{2}$       ②  $\frac{21}{2}$       ③  $\frac{23}{2}$       ④  $\frac{25}{2}$       ⑤  $\frac{27}{2}$

[22009-0179]

- 5 함수  $f(x) = 3x^2 - 6x$ 에 대하여 그림과 같이 곡선  $y=f(x)$  ( $x \leq 0$ )과 직선  $x = -1$  및  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S_1$ , 곡선  $y=f(x)$ 와  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S_2$ , 곡선  $y=f(x)$  ( $x \geq 2$ )와 직선  $x=k$  ( $k > 2$ ) 및  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S_3$ 이라 하자.  $\frac{S_1}{2}$ ,  $S_2$ ,  $\frac{S_3}{9}$ 이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 상수  $k$ 의 값은?



- ① 4                      ②  $\frac{9}{2}$                       ③ 5                      ④  $\frac{11}{2}$                       ⑤ 6

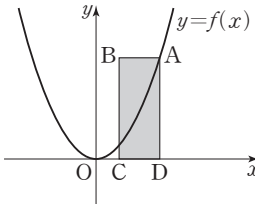
[22009-0180]

- 6 삼차함수  $f(x) = x^3 + ax^2 + ax$ 가 역함수를 갖도록 하는 실수  $a$ 의 최댓값을  $p$ 라 하자. 함수  $g(x) = x^3 + px^2 + px$ 의 그래프와  $g(x)$ 의 역함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

[22009-0181]

- 7 이차함수  $f(x) = x^2$ 의 그래프 위의 점  $A(a, a^2)$ 을  $x$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼 평행이동한 점을  $B$ , 두 점  $B, A$ 에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을 각각  $C, D$ 라 하자. 사각형  $ABCD$ 의 넓이가 곡선  $y=f(x)$ 에 의하여 이등분될 때,  $12 \times (a-1)^2$ 의 값을 구하시오. (단,  $a > 1$ )



[22009-0182]

- 8 시각  $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점  $P, Q$ 의 시각  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 속도가 각각  $v_1(t) = 3t^2 - 12t$ ,  $v_2(t) = 2t$ 이고, 출발한 후 두 점  $P, Q$ 가 시각  $t=a$ 에서 만난다. 두 점  $P, Q$ 가 시각  $t=0$ 에서  $t=a$ 까지 움직인 거리를 각각  $s_1, s_2$ 라 할 때,  $|s_1 - s_2|$ 의 값을 구하시오. (단,  $a$ 는 양수이다.)

[22009-0183]

1

두 다항함수  $f(x)$ 와  $g(x)$ 에 대하여

$$f'(x) = 3x^2 - 6, \quad g'(x) = 2x - 5$$

이다. 두 함수  $y=f(x)$ 와  $y=g(x)$ 의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만나고,  $f(0) > g(0)$ 일 때, 두 곡선  $y=f(x)$ 와  $y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ① 1                      ②  $\frac{4}{3}$                       ③  $\frac{5}{3}$                       ④ 2                      ⑤  $\frac{7}{3}$

[22009-0184]

2

두 사차함수  $f(x), g(x)$ 의 최고차항의 계수는 모두 1이고,  $f(x)$ 와  $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 함수  $y=f(x)$ 와  $y=g(x)$ 의 그래프는 세 점에서 만나고, 만나는 세 점의  $x$ 좌표는 각각  $-2, 0, 2$ 이다.

(나) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $g(-x) = g(x)$ 이다.

$$(다) \int_0^1 f(x) dx = \frac{37}{30}, \quad \int_0^{-1} g(x) dx = \frac{34}{15}$$

두 곡선  $y=f(x)$ 와  $y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ① 8                      ② 12                      ③ 16                      ④ 20                      ⑤ 24

[22009-0185]

3

시각  $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = t^2 - 4t, \quad v_2(t) = -t^2 + 6t$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q가 만날 때까지 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은?

- ①  $\frac{113}{3}$                       ②  $\frac{116}{3}$                       ③  $\frac{119}{3}$                       ④  $\frac{122}{3}$                       ⑤  $\frac{125}{3}$

[22009-0186]

4 다항함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$\int_0^x \{f(t) - 12\} dt = x^3 - \frac{3}{13}x^2 \int_{-1}^1 f(t) dt$$

를 만족시키고, 함수  $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} f(-x) & (x < 0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 곡선  $y=g(x)$ 와 직선  $y=k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나고, 곡선  $y=g(x)$ 와 직선  $y=k$ 로 둘러싸인 세 부분의 넓이가 모두 같을 때,  $k \times f(k)$ 의 값을 구하시오. (단,  $k$ 는 상수이다.)

[22009-0187]

5 다항함수  $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 2, \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 1}{(x-3)^2} = 6$$

을 만족시킨다. 모든 자연수  $n$ 에 대하여 정의역이  $\{x \mid x \geq 0\}$ 인 함수  $g(x)$ 가

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x \leq 4) \\ f(x-4n) + 8n & (4n \leq x \leq 4n+4) \end{cases}$$

일 때, 곡선  $y=g(x)$ 와 직선  $x=16$  및  $x$ 축,  $y$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ① 272                      ② 284                      ③ 296                      ④ 308                      ⑤ 320

**출제 경향**

정적분을 이용하여 곡선과  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이, 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

두 함수

$$f(x) = \frac{1}{3}x(4-x), g(x) = |x-1| - 1$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S$ 라 할 때,  $4S$ 의 값을 구하시오. [4점]

2020학년도 대수능

**출제 의도** 정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이**  $g(x) = |x-1| - 1 = \begin{cases} -x & (x < 1) \\ x-2 & (x \geq 1) \end{cases}$ 이므로 두 함수  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의  $x$ 좌표를

구하면

(i)  $x < 1$ 일 때,  $f(x) = g(x)$ 에서

$$\frac{1}{3}x(4-x) = -x, x^2 - 7x = 0, x(x-7) = 0$$

$x < 1$ 이므로  $x = 0$

(ii)  $x \geq 1$ 일 때,  $f(x) = g(x)$ 에서

$$\frac{1}{3}x(4-x) = x-2, x^2 - x - 6 = 0, (x+2)(x-3) = 0$$

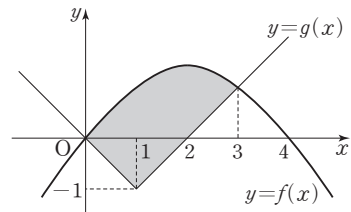
$x \geq 1$ 이므로  $x = 3$

달힌구간  $[0, 3]$ 에서  $f(x) \geq g(x)$ 이므로 두 함수  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이  $S$ 는

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{3}x(4-x) - (-x) \right\} dx + \int_1^3 \left\{ \frac{1}{3}x(4-x) - (x-2) \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left( -\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x \right) dx + \int_1^3 \left( -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \right) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{9}x^3 + \frac{7}{6}x^2 \right]_0^1 + \left[ -\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + 2x \right]_1^3 \\ &= \left( -\frac{1}{9} + \frac{7}{6} \right) + \left\{ \left( -3 + \frac{3}{2} + 6 \right) - \left( -\frac{1}{9} + \frac{1}{6} + 2 \right) \right\} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

따라서  $4S = 4 \times \frac{7}{2} = 14$



**출제 경향**

수직선 위를 움직이는 점의 속도가 시간  $t$ 에 대한 함수로 주어질 때, 점이 움직인 거리를 구하는 문제, 점의 위치를 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

수직선 위를 움직이는 점 P의 시간  $t$  ( $t > 0$ )에서의 속도  $v(t)$ 가

$$v(t) = -4t^3 + 12t^2$$

이다. 시간  $t=k$ 에서 점 P의 가속도가 12일 때, 시간  $t=3k$ 에서  $t=4k$ 까지 점 P가 움직인 거리는?

(단,  $k$ 는 상수이다.) [4점]

- ① 23                      ② 25                      ③ 27                      ④ 29                      ⑤ 31

2022학년도 대수능 9월 모의평가

**출제 의도**

수직선 위를 움직이는 점의 속도가 주어졌을 때, 정적분을 이용하여 점이 움직인 거리를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이**

점 P의 시간  $t$  ( $t > 0$ )에서의 가속도를  $a(t)$ 라 하면

$$v(t) = -4t^3 + 12t^2 \text{이므로}$$

$$a(t) = v'(t) = -12t^2 + 24t$$

시간  $t=k$ 에서 점 P의 가속도가 12이므로

$$-12k^2 + 24k = 12$$

$$(k-1)^2 = 0$$

$$k = 1$$

한편,  $v(t) = -4t^3 + 12t^2 = -4t^2(t-3)$ 이므로  $3 \leq t \leq 4$ 일 때  $v(t) \leq 0$ 이다.

따라서 시간  $t=3$ 에서  $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_3^4 |v(t)| dt &= \int_3^4 |-4t^3 + 12t^2| dt \\ &= \int_3^4 (4t^3 - 12t^2) dt \\ &= \left[ t^4 - 4t^3 \right]_3^4 \\ &= 0 - (-27) \\ &= 27 \end{aligned}$$

답 ③

# 고2~N수 수능 집중 로드맵

과목	수능 입문	기출 / 연습	연계+연계 보완	고난도	모의고사
국어	수능 감(感)잡기		수능연계교재의 국어 어휘	수능연계완성 3/4주 특강 고난도 · 신유형	FINAL 실전모의고사
영어		수능 기출의 미래	수능연계교재의 VOCA 1800 수능연계 기출 Vaccine VOCA		만점마무리 봉투모의고사
수학	수능특강 Light	강의노트 수능개념	연계 수능특강	수능의 7대 함정	만점마무리 봉투모의고사 RED EDITION
한국사 사회		수능특강Q 미니모의고사	수능완성	박봄의 사회 · 문화 표 분석의 패턴	고난도 시크릿X 봉투모의고사
과학					

구분	시리즈명	특징	수준	영역
수능 입문	수능 감(感) 잡기	동일 소재 · 유형의 내신과 수능 문항 비교로 수능 입문	●	국/수/영
	수능특강 Light	수능 연계교재 학습 전 연계교재 입문서	●	국/영
	수능개념	EBSi 대표 강사들과 함께하는 수능 개념 다지기	●	전영역
기출/연습	수능 기출의 미래	올해 수능에 딱 필요한 문제만 선별한 기출문제집	●	전영역
	수능특강Q 미니모의고사	매일 15분으로 연습하는 고퀄리티 미니모의고사	●	전영역
연계 + 연계 보완	수능특강	최신 수능 경향과 기출 유형을 분석한 종합 개념서	●	전영역
	수능특강 사용설명서	수능 연계교재 수능특강의 지문 · 자료 · 문항 분석	●	전영역
	수능특강 연계 기출	수능특강 수록 작품 · 지문과 연결된 기출문제 학습	●	국/영
	수능완성	유형 분석과 실전모의고사로 단련하는 문항 연습	●	전영역
	수능완성 사용설명서	수능 연계교재 수능완성의 국어 · 영어 지문 분석	●	국/영
	수능연계교재의 국어 어휘	수능 지문과 문항 이해에 필요한 어휘 학습서	●	국어
	수능연계교재의 VOCA 1800	수능특강과 수능완성의 필수 중요 어휘 1800개 수록	●	영어
고난도	수능연계완성 3/4주 특강	단기간에 끝내는 수능 킬러 문항 대비서	●	국/수/영/과
	수능의 7대 함정	아깝게 틀리기 쉬운 영역별 수능 함정 문제 유형 분석	●	국/수/영/사/과
	박봄의 사회 · 문화 표 분석의 패턴	박봄 선생님과 사회 · 문화 표 분석 문항의 패턴 연습	●	사회탐구
모의고사	FINAL 실전모의고사	수능 동일 난도의 최다 분량, 최다 과목 모의고사	●	전영역
	만점마무리 봉투모의고사	실제 시험지 형태와 OMR 카드로 실제 훈련 모의고사	●	전영역
	만점마무리 봉투모의고사 RED EDITION	신규 문항 2회분으로 국어 · 수학 · 영어 논스톱 모의고사	●	국/수/영
	고난도 시크릿X 봉투모의고사	제대로 어려운 고퀄리티 최고난도 모의고사	●	국/수/영