

14. 1보다 큰 자연수 n 에 대하여 직선 $x = n$ 이 두 함수 $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프와 만나는 점의 y 좌표를 각각 a_n, b_n 이라 하자.

$b_n \leq m \leq a_n$ 을 만족시키는 정수 m 의 개수를 c_n 이라 할 때,

$\sum_{n=2}^{16} c_n$ 의 값은? [4점]

① 89 ② 91 ③ 93
 ④ 95 ⑤ 97

지수로그함수 칼럼에서 제가 얘기했던 것은, 두 개의 지수,로그함수가 등장하면, **서로의 관계를 잘 따져보아야 한다.** 했었습니다.

정말 중요한 것 중 하나입니다.

기억안나시면 칼럼참고 ! 현강생들은 자료 복습 !

여기서의 두식은 서로 x 축 대칭이죠. 그것만 염두해두면 쉽게 풀리는 문제였습니다. (x축 대칭인걸 굳이 찾으려 하지않아도 바로 보이니 매우 쉬운 난이도라 할 수 있겠습니다.)

17. 이차정사각행렬 A 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(나) $A \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

행렬 A 의 모든 성분의 합은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

개념하나 짚고 가자면,

우리가 “행렬 A의 모든 성분의 합”을 구하려면 어떻게 해야할까요?

두가지입니다. 기억하세요.

1. 행렬 A의 성분을 모두 안다.

2. $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 를 구한다.

2번을 구한뒤에, 두 값을 더하면 행렬 A의 모든 성분의 합이 나오겠죠?

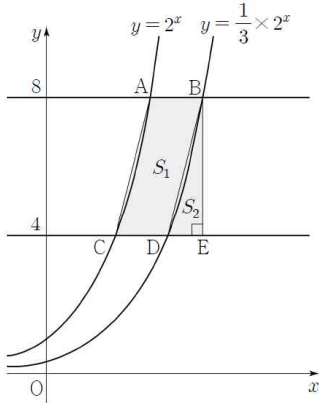
물론 여기선 2번 풀이입니다.

그래서 여러분은 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 를 구하는데에 초점을 맞추셔야 합니다.

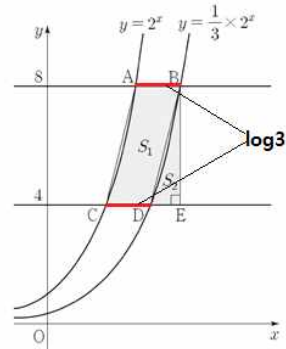
그렇기에 이 문항은, 그냥 A곱해보고 더해보고 이렇게 난도질 하면서 푸는게 아니라, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 을 어떻게 하면 구할까 !! 하는식으로 머리속에서 포커스가 맞춰진 채로 문제를 풀어야 한다 이겁니다.

쉽죠? ㅎㅎ 다음문제 보겠습니다.

18. 그림과 같이 두 곡선 $y=2^x$, $y=\frac{1}{3}\times 2^x$ 이 직선 $y=8$ 과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=4$ 와 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자. 점 B에서 직선 $y=4$ 에 내린 수선의 발을 E라 할 때, 사각형 ACDB의 넓이를 S_1 , 삼각형 BDE의 넓이를 S_2 라 하자. $\frac{S_1}{S_2}$ 의 값은? [4점]



- ① $\log_2 3$ ② $\frac{3}{2}\log_2 3$ ③ $2\log_2 3$
- ④ $\frac{5}{2}\log_2 3$ ⑤ $3\log_2 3$



이게 바로 보이시나요?

왜 저렇죠? \log_3 만큼 평행이동했으니까.

그래서 B의 x좌표는 ,
A의 x좌표인 3에다가 \log_3 를 더한 $3+\log_3$ 이 됩니다.

D의 x좌표는, C의 x좌표인 2에 \log_3 을 더한 $2+\log_3$ 이 되겠죠.

이걸 이용해서 문제를 바로 풀면 됩니다.

참 쉽죠?

왜 평행이동을 따져야 하는가는, 칼럼을 다시 복습하시기 바랍니다.

(현강생 분들은... 안들렸겠죠? ㅎㅎ 설마 그렇게 강조했는데.)

다음문제 보겠습니다.

다음문제는 다음페이지에서 보죠.

> 어이구. 처음에 언급했던 것을 또 언급해야겠네요.

두개의 지수,로그 그래프가 보이면 월한대구요??

네.

서로의 관계를 잘 따져보아야 한다.

저 둘의 관계는 어떻게 되죠?

두가지입니다.

- 1. 2^x 를 $\frac{1}{3}$ 배 한것
- 2. $\frac{1}{3}2^x = 2^{x-\log_3 3}$

하나는 **확대, 축소** 의 개념으로, 다른 하나는 **평행이동** 의 개념으로 본 것입니다.

여기선 무엇이 중요할까요?

네. 2번입니다.

즉, 두 함수는 서로 평행이동 관계이기에, 다음그림과 같이 **바로** 보여야 합니다.

19. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고,

$$2^{2n}a_{n+1} = 2^{2n-1}a_n + (n+1)2^n \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여

$$2^n a_{n+1} = 2^{n-1} a_n + (n+1)$$

이다. $b_n = 2^n a_n$ 이라 하면

$$b_{n+1} = b_n + \boxed{\text{(가)}} \quad (n \geq 1)$$

이고, $b_1 = 2$ 이므로

$$b_n = \boxed{\text{(나)}} \quad (n \geq 1)$$

이다. 그러므로

$$a_n = \frac{1}{2^n} \times \boxed{\text{(나)}} \quad (n \geq 1)$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $f(4) + g(6)$ 의 값은? [4점]

- ① 48
- ② 50
- ③ 52
- ④ 54
- ⑤ 56

빈칸은 쉽게 출제된 것 같습니다.

빈칸문제에서의 풀이는 두가지 뿐이었는데,

그 중 하나로 쉽게 풀리는 문항이죠?

바로 앞뒤비교.

$$2^n a_{n+1} = 2^{n-1} a_n + (n+1)$$

이다. $b_n = 2^n a_n$ 이라 하면

$$b_{n+1} = b_n + \boxed{\text{(가)}} \quad (n \geq 1)$$

우리가 따져봐야 할것은, 위에 밑줄그은 식이 **어떻게**

아래식으로 왔는가. 입니다.

오직 그것에만 포커스를 맞춰야 한다 이겁니다.

보면, 아래 왼쪽식에는, b_{n+1} 이 주어져 있는데,

이 값은 $2^{n+1} a_{n+1}$ 입니다.

그러면 우리는, 첫 식에 왼쪽 식에서 무얼해야 b_{n+1} , 즉 $2^{n+1} a_{n+1}$ 로 바뀌는 지만 알면 됩니다.

네. 2를 곱하면 되죠.

그래서 (가) 는, $2(n+1)$ 이 됩니다. 쉽네요.

$$b_{n+1} = b_n + \boxed{\text{(가)}} \quad (n \geq 1)$$

이고, $b_1 = 2$ 이므로

$$b_n = \boxed{\text{(나)}} \quad (n \geq 1)$$

그 다음은 뭐죠? 네모박스. 아. 계차수열. 끝입니다.

(칼럼참고)

다음문제 보겠습니다.

20. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$A + 2B = E, AB + BA = 2E$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

< 보기 >

ㄱ. $AB = BA$
 ㄴ. $B - E$ 의 역행렬이 존재한다.
 ㄷ. $(A + B)^2 = 4B^4$

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ을 해결하는 법에 대해선 칼럼에서 자세히 다뤘습니다.

ㄴ. 주어진 식에서, ㄱ에 의해 두번째 식은 $AB = E$. 가 되겠죠.

하나 내가 궁금한건 B와 E에 관한 식이므로,

첫 식을 변형해서 $(A = E - 2B) AB = E$ 에 대입하여 줍니다.

그러면, $(E - 2B)B = E$, 즉 $2BB - B + E = 0$ 이 나옵니다.

~의 역행렬이 존재한다. 라는 선지 판별법을 수업했었죠?

여기선 $B - E$ 의 어떤것을 곱했을때 kE 꼴이 나오면 되고,

어떤 것을 곱할지는 주어진 식에서 찾는다 했습니다.

내가 알고 있는 식은 $2BB - B + E = 0$ 이므로,

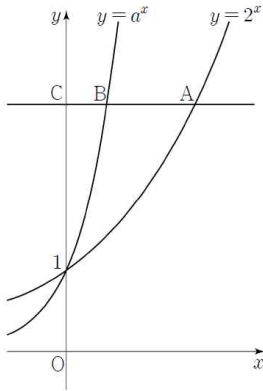
$(B - E)(2B + E) = -2E$ 입니다. ㄴ은 맞네요!

ㄷ 양변은, $A + B = 2B^2$ 입니다.

그러던 A 는 $E - 2B$ 였으므로,

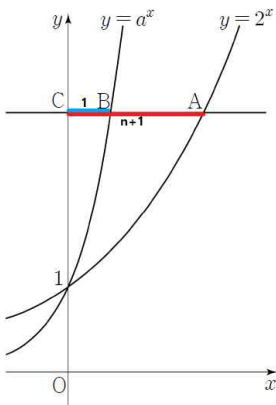
준식은 $E - B = 2B^2$ 이네요. 아까 구했던 식입니다. 답 5번

21. 그림과 같이 두 곡선 $y=2^x$ 과 $y=a^x(a > 2)$ 에 대하여 y 축 위의 점 C를 지나고 x 축과 평행한 직선이 두 곡선과 만나는 점을 각각 A, B라 하자.
 자연수 n 에 대하여 $\overline{CB} : \overline{BA} = 1 : n$ 을 만족시키는 a 의 값을 $f(n)$ 이라 할 때, $f(1) \times f(2) \times f(3) \times \dots \times f(10) = 2^m$ 이다. m 의 값은? (단, 점 C의 y 좌표는 1보다 크다.) [4점]



- ① 65
- ② 67
- ③ 69
- ④ 71
- ⑤ 73

이거 어려웠네요? 반응을 모르겠네..
 마찬가지로입니다. 뭐 이번시험은 똑같은걸 왜자꾸 내는지 모르겠네요.
 역시 마찬가지로 두개의 지수로그함수가 주어져 있으니,
 전 그 사이의 관계를 따져주면 됩니다.
 친절하게도, 문제에서 $CB : BA$ 가 1 : n 이라 하고 있지요?



즉, 이런 모양입니다.
 아하. 그럼 a^x 그래프는, 2^x 그래프를 y 축으로 $\frac{1}{n+1}$ 배 한 그래프이군요.

즉, $a^x = 2^{(n+1)x}$ 입니다.

그럼, $a = 2^{n+1}$ 이네요.

정말 쉽네요 ㅎㅎ! 현강생분들도 이렇게 속삭 했는지 궁금합니다.

계속 말하는데, 어려운 문제. 쉬운 문제 따로 있는게 아니라

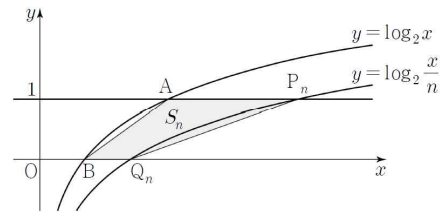
결국은 한 단원에 속한 유형 중 하나 일뿐입니다.

문제를 개별문제로 보려하지마시고, 전체의 눈으로 보는 연습을

하셔야합니다.

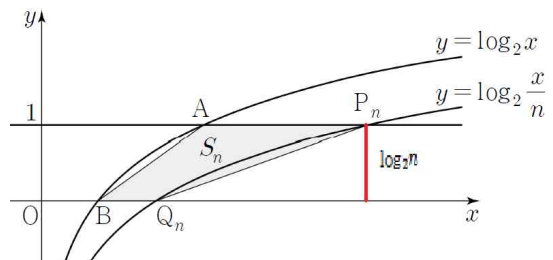
계속 가보죠.

28. 그림과 같이 1보다 큰 자연수 n 에 대하여 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2 \frac{x}{n}$ 가 직선 $y=1$ 과 만나는 두 점을 각각 A, P_n 이라 하고, x 축과 만나는 두 점을 각각 B, Q_n 이라 하자. 사각형 ABQ_nP_n 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $2 \sum_{n=2}^{10} S_n$ 의 값을 구하시오. [4점]



뭐 이것도 마찬가지로...

$\log_2 \frac{x}{n} = \log_2 x - \log_2 n$ 이므로, 위에 그래프를 아래로 $\log_2 n$ 만큼 평행이동한 그래프네요.



이제 사다리꼴 넓이 구하는 공식을 쓰면 됩니다.

(밑변+윗변) * 높이 $(\log_2 n) * 1/2$. 정말 쉽네요.

29, 30 은 해설하지 않습니다.

더욱이 30번은 틀려도 아무 상관없는 문제입니다.

고2 문제의 한계라 느껴지는 문항이네요.

전체적으로 쉬운 문항들이었습니다만, 애초에 지수로그 함수를

잘 다루지 못하는 학생이있으면 힘든 시험이 될것입니다.

현강생 여러분들은, 틀리셨으면 꼭 자료 재복습하여 피드백해주시길 .

B형

10. 좌표평면에서 곡선 $y = \log_2 x$ 를 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, x 축 방향으로 2만큼 평행이동시킨 곡선을 $y = f(x)$ 라 하자. 점 A(1, 0)과 곡선 $y = \log_2 x$ 위의 점 B에 대하여 선분 AB의 중점 M이 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이 되도록 하는 점 B의 x 좌표는? [3점]

① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{15}{4}$
 ④ 4 ⑤ $\frac{17}{4}$

사소한 행동이긴 한데, 제가 현강에서 정말. 정말 강조했던 것중 하나가 뭐였냐면,

“ 모르는 값은 바로 T 로 뒤라 ”

였죠. 기억 하시나요?

B의 x 좌표, 아냐요? 모릅니다. 바로 (t, log₂t) 로 두고 푸시는 겁니다.

패쓰

12. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고,
 $2^{2n}a_{n+1} = 2^{2n-1}a_n + (n+1)2^n \quad (n \geq 1)$
 을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여
 $2^n a_{n+1} = 2^{n-1} a_n + (n+1)$
 이다. $b_n = 2^n a_n$ 이라 하면
 $b_{n+1} = b_n + \boxed{\text{(가)}} \quad (n \geq 1)$
 이고, $b_1 = 2$ 이므로
 $b_n = \boxed{\text{(나)}} \quad (n \geq 1)$
 이다. 그러므로
 $a_n = \frac{1}{2^n} \times \boxed{\text{(나)}} \quad (n \geq 1)$
 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 할 때, $f(4) + g(6)$ 의 값은? [3점]

① 48 ② 50 ③ 52
 ④ 54 ⑤ 56

위에 A형과 해설이 같습니다. 쉬운 문항이었죠.

16. 수열 $\{a_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 네 항 a_1, a_2, a_3, a_4 는 이 순서대로 공비가 -2인 등비수열을 이룬다.
 (나) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+4} = a_n + 2$ 이다.

$\sum_{n=1}^{20} a_n = 130$ 일 때, a_1 의 값은? [4점]

① -6 ② -5 ③ -4
 ④ -3 ⑤ -2

처음보는 식은 어떻게 해결한다?

“ 몇번 직접 써보면서 이해한다. ”

첫항을 a로 두면, 수열은 다음과 같이 진행이 됩니다.

a, a-2, a-4, a-6

a+2, a-2+2, a-4+2, a-6+2

a+2+2, a-2+2+2, a-4+2+2, a-6+2+2

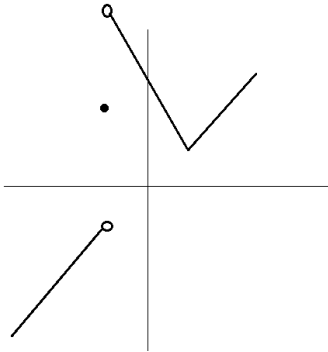
즉, 처음 4개의 합에다가, 8을 더한게 그 다음 4개합. 또 그것에 8을 더한게 그다음 4개의 합. 이런 구조입니다. 쉽네요.

다음문제.

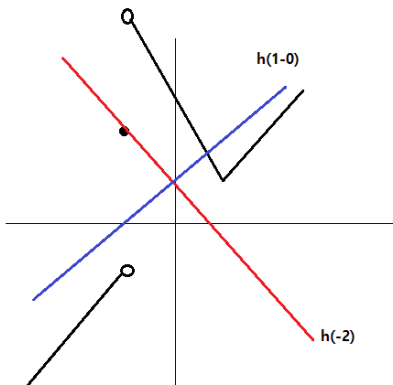
18. 실수 m 에 대하여 함수 $f(x)=mx+1$ 의 그래프와
 함수 $g(x)=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}-3x+4}{x^{2n}+1}$ 의 그래프가 만나는 점의 개수를
 $h(m)$ 이라 하자. $h(-2)+\lim_{m \rightarrow 1} h(m)$ 의 값은? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

현장에서 그렇게 좌표평면 등장하면 그래프 바로 그리었는데,
 그렸는지 모르겠습니다.



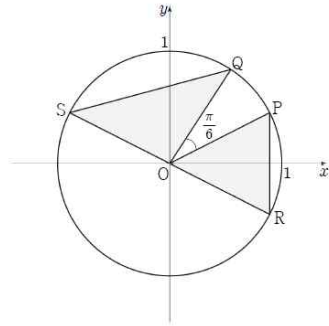
모양이 대충 저렇게 되는데, 이제 $h(m)$ 을 각각 그려넣어봅시다.



$h(-2)$ 야 뭐.. 한 점에서 만나게 보이지만,
 $h(1-0)$ 은 당장은 한점에서 만나지만, $y=x$ 와 후에 한점에서
 또 만납니다.
 왜요?

기울기가 1이 아닌 1-0, 혹은 1+0이기 때문에,
 $y=x$ 와 절대 평행하지 않습니다.
 평행하지 않으면 어느 한점에서 꼭 만나야죠. 답은 3번

19. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 두 점 P, Q는 제1사분면
 위의 점이고 $\angle POQ = \frac{\pi}{6}$ 를 만족한다. 점 P를 x축에 대하여
 대칭이동한 점을 R, y축에 대하여 대칭이동한 점을 S라 할 때,
 두 삼각형 ORP, OQS의 넓이의 합의 최댓값은? (단, O는 원점이고,
 점 Q의 y좌표는 점 P의 y좌표보다 크다.) [4점]



- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ④ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

이걸 어려워했다면, 다음 개념을 꼭 짚고 가야합니다.

삼각형의 넓이. 에 대해 우리가 알고 있는건 오직 두가지 뿐입니다.

- 1. 밑변 * 높이 * 1/2
- 2. $1/2 * a * b * \sin\theta$.

그쵸?

그럼 이걸 상식적으로 1번일까요 2번일까요

아 2번이겠지.

근데 왜 저렇게 안푸시고 이걸 어떻게 풀까??
 하면서 골똘히 생각에 잠겨있냐구요.

수학에 있어서 고수와 하수의 차이는 여기서 발생합니다.

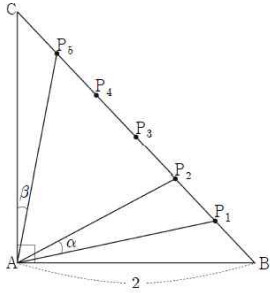
사잇각이 있어야 삼각형 넓이공식을 쓸 수 있다. 를 바로 인지해서
 각 POR 을 2θ 로 두고 풀이를 바로 시작하는 고수와,

아 이게 뭐지 π 하면서 이런거 배운적없는데 $\pi\pi$ 하면서 펜 물고 있
 는 하수 학생.

하수라면 하루빨리 탈출하시기 바랍니다.

제발 머리속에서, “이문제는 내가 모르는 무언가를 묻는거야” 하는
 바보같은 생각은 버리세요. 다음문제 볼게요.

28. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$ 이고 $\angle A = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC에 대하여 선분 BC를 6등분한 점을 점 B에서 가까운 순서대로 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 라 하고, $\angle P_1AP_2 = \alpha, \angle P_3AC = \beta$ 라 하자. $2\tan\alpha = 3\tan\beta$ 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. θS^2 의 값을 구하시오. [4점]



틀리셔도 아무상관없는 문항입니다. 고2 모의고사의 한계입니다.

하지만 관건은 있겠죠. 관건은, tan 알파, 베타를 어떻게든 써야만 한다는 생각으로 풀이를 전개해갔느냐. 입니다. 다음문제 볼게요.

29. 양수 x에 대하여 $\log x$ 의 지표와 가수를 각각 $f(x), g(x)$ 라 하자. 다음 조건을 만족시키는 두 양수 a, b에 대하여 $ab = 10^{\frac{n}{m}}$ 일 때, $m+n$ 의 값을 구하시오. (단, m, n은 서로소인 자연수이다.) [4점]

- (가) $\log \frac{a}{b} = 1$
- (나) $g(a) = 4g\left(\frac{1}{a}\right)$
- (다) $f(a) + g(b^2) = \frac{18}{5}$

지표가수 문항치곤 정말 쉽게 출제되었습니다.

지표가수 문항은 크게 두가지 풀이가 있었다 했는데,

이 문항은 보편적인 풀이법인 $\log x = n + a$ 풀이네요.

(가) 조건에서, $\log a$ 와 $\log b$ 의 지표는 1 차이가 나는걸 알 수 있습니다. 또한 가수는 같겠죠.

(나) 조건을 적용시키면, $g\left(\frac{1}{a}\right) = -\log a$ 의 가수 이므로,

$-\log a = -f(a) - g(a) = -f(a) - 1 + 1 - g(a)$ 입니다.

$g\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - g(a)$ 가 되겠네요.

왜 $1 - g(a)$ 인줄은 아시죠? $-g(a)$ 가 가수가 될 수 없는이유는,

가수범위를 충족시키지 못해서입니다

여러분이 지표가수 문항을 푸는데 가수범위를 따지지 않고 풀었다.

답도 나왔죠?

제가 수업때도 말했지만, 100% 틀린겁니다. 100%.

애초에 지표가수 문제의 출제의도는

“ 너가 지표와 가수의 정의를 알고 활용할 줄 아느냐 ” 입니다.

가수의 정의가 뭔데요? 상용로그에서, 소수부분, 즉 0과 1사이를 일컫는 것 아닙니까.

그렇기에, 제가 수업에서 그토록 강조했던 것이 있었죠. 무엇인지는, 자료한번 다시 복습하시기 바랍니다.

(나) 조건으로 돌아가서,

$g(a) = 4(1 - g(a))$, 즉, $g(a) = 4/5$ 입니다.

(다) 에서, $g(b^2) = \log b^2$ 의 가수 네요.

$g(b^2) = \log b^2 = 2\log b = 2f(b) + 2g(b)$

그런데 $g(a) = g(b)$ 이므로 (가)조건에서,)

$2g(b) = 8/5$ 입니다. 그런데 이건 가수범위를 충족시키지 못하므로,

$2g(b) - 1 = 3/5$ 가 가수가 됩니다.

자연스레 $f(a) = 3$ 이 되겠네요. 그러면 $f(b)$ 는 2 가 되겠구요.

전체적으로 쉬운 문항이었습니다.

기억할 건 단하나,

(지표가수 문항) + ($\log x = n + a$ 풀이)

출제의도 >> “ 가수범위 따질 줄 아는가 ? ”

30번은 생략하겠습니다. 아직 현장에서 다루지 않은부분이니,

수업 때 따로 다루도록 하겠습니다.

> 자료를 올리면서.

모의고사를 보는 이유가 무엇일까요?

대학가나요 그걸로?

아닙니다.

모의고사 보는이유는, 지금껏 해오고 있는 공부. 해왔던 공부가

내 성적을 키우는데에 적합한지. 내가 삽질 공부안하고

내 성적 키워주는 공부를 하고있는지를 점검하려합니다.

동의하시나요?

모의고사가 끝났습니다.

당신이 해야할건 무엇인가요

오답? 해설강의?

틀린문제.

그 틀린문제가 왜틀렸는지를 따지고. 난 왜 그 풀이를 못했는가를

따지고. 또한 왜 이 풀이가 여기서 이렇게 쓰여야만 하는가를

따지세요.

그러라고 쓴 칼럼입니다.

모의고사 점수로 일희일비하는건 딱 당일 하루 뿐입니다.

그 다음부터는 다시 철저하게 분석하여,

내 공부법을 다시 정도에 맞게 수정한뒤에, 그 다음 모의고사를

향해 앞으로 나아가야 합니다.

공부하세요.

> "Bin의 수능영역" 안내.

여러분도 알다시피.

2014년 내내 제 블로그 질문&상담게시판에서
상담과 질문을 받아왔었습니다.

하지만 네이버 블로그 특성상 일일이 답변이 너무 힘들고 댓글도 자꾸
밀리며, 또한 그 글에 달린 2700개의 댓글 모두 비슷했기에
(가령, 커리큘럼 짜주세요. 지금 ~ 해야하나요?)

아예 그걸 처음부터 끝까지 맞춰주는,
코칭프로그램을 진행하려 합니다.

자세한 사항은 블로그에 오셔서 참고하시기 바랍니다.

이 칼럼 쓴 후부터, 블로그의 질문&상담게시판은 폐지됩니다.

그래서 쓴 글입니다.

열공 !!