2013학년도 6월 모의평가 수리영역 가형 정답 및 해설

1.

출제의도 : 로그의 계산을 할 수 있는가?

해설]

$$\log_2 3+\log_2\frac{4}{3}=\log_2\left(3\times\frac{4}{3}\right)$$
$$=\log_2 4$$
$$=\log_2 2^2$$
$$=2\log_2 2$$
$$=2$$

<답> ②

2.

출제의도 : 다항식의 전개식에서 계수를 구할 수 있는가?

해설]

다항식 $(1+x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r x^r$ $(r=0,1,2,3,4,5)$

이므로 x^2의 계수는

$${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

<답> ④

3.

출제의도 : 일차변환의 성질을 이해하는가?

해설]

$f(aX)=af(X)$ 이므로 $f(aX)=\begin{pmatrix}4\\b\end{pmatrix}$ 에서

$$a\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\b\end{pmatrix},\ a\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\b\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2a\\3a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\b\end{pmatrix}$$

따라서 $2a=4$, $3a=b$ 이므로

$a=2$, $b=6$

$\therefore\ a+b=8$

<답> ④

4.

출제의도 : 그래프의 연결 관계를 행렬로 나타낼 수 있는가?

해설]

주어진 그래프를 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&1\\1&0&1&0&0&1\\0&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0&1\\1&1&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

따라서 행렬의 성분 중 0의 개수는 20이다.

<답> ②

[다른 풀이]

주어진 그래프는 꼭짓점의 개수는 6이고, 변의 개수는 8이다.

따라서 이 그래프의 연결 관계를 행렬로 나타내면 6×6 행렬이고 행렬의 성분 중 1의 개수는

$2\times8=16$

이므로 행렬의 성분 중 0의 개수는

$36-16=20$

5.
출제의도 : 쌍곡선과 타원의 방정식을 이해할 수 있는가?

해설]
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 꼭짓점의 좌표는
$(a,0)$, $(-a,0)\cdots$㉠
이다.
이때, 타원 $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점의 좌표가 ㉠과 일치하므로
$13-b^2=a^2$
$\therefore\ a^2+b^2=13$

<답> ④

6.
출제의도 : 함수가 연속일 조건을 구할 수 있는가?

해설]
두 함수 $f(x)$, $h(x)$를
$f(x)=x^2+ax+b$, $h(x)=f(x)g(x)$
라 하면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 $g(x)$는 $x=0$, $x=2$에서만 불연속이므로 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=0$, $x=2$에서 연속이어야 한다.
(i) $x=0$에서 연속이어야 하므로
$h(0)=f(0)g(0)=b\times(-1)=-b$

$$\lim_{x\to+0}h(x)=\lim_{x\to+0}f(x)g(x)=\lim_{x\to+0}f(x)\lim_{x\to+0}g(x)=b\times1=b$$

$$\lim_{x\to-0}h(x)=\lim_{x\to-0}f(x)g(x)=\lim_{x\to-0}f(x)\lim_{x\to-0}g(x)=b\times(-1)=-b$$

따라서, $b=-b$ 이므로
$b=0$
(ii) $x=2$에서 연속이어야 하므로
$h(2)=f(2)g(2)=(4+2a)\times1=4+2a$

$$\lim_{x\to2+0}h(x)=\lim_{x\to2+0}f(x)g(x)=\lim_{x\to2+0}f(x)\lim_{x\to2+0}g(x)=(4+2a)\times1=4+2a$$

$$\lim_{x\to2-0}h(x)=\lim_{x\to2-0}f(x)g(x)=\lim_{x\to2-0}f(x)\lim_{x\to2-0}g(x)=(4+2a)\times(-1)=-4-2a$$

따라서 $4+2a=-4-2a$ 이므로
$a=-2$
(i), (ii)에 의하여 $f(x)=x^2-2x$ 이므로
$f(5)=5^2-2\times5=15$

<답> ①

7.
출제의도 : 로그의 성질을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가?

해설]

$$\log P_1=8.11-\frac{1750}{15+235}=8.11-\frac{1750}{250}$$

$$\log P_2=8.11-\frac{1750}{45+235}=8.11-\frac{1750}{280}$$

$$\therefore\ \log\frac{P_2}{P_1}=\log P_2-\log P_1=\left(8.11-\frac{1750}{280}\right)-\left(8.11-\frac{1750}{250}\right)=\frac{1750}{250}-\frac{1750}{280}$$

$$= 175\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{28}\right)$$

$$= 175 \times \frac{3}{25 \times 28}$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$\therefore \ \frac{P_2}{P_1} = 10^{\frac{3}{4}}$$

<답> ③

8.

출제의도 : 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

해설]

(i) $x > 0$일 때,

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{e^{2x}-1}{2x}$$

이때,

$$\lim_{x \to +0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

이고 $2x = t$ 라 하면

$$\lim_{x \to +0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = \lim_{t \to +0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

$$\therefore \ \lim_{x \to +0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

(ii) $-1 < x < 0$일 때,

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \ge \frac{f(x)}{x} \ge \frac{e^{2x}-1}{2x}$$

이때,

$$\lim_{x \to -0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

이고 $2x = t$ 라 하면

$$\lim_{x \to -0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = \lim_{t \to -0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

$$\therefore \ \lim_{x \to -0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

(i), (ii)에 의하여 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

따라서 $3x = t$라 하면

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(3x)}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{\frac{t}{3}} = 3\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = 3 \times 1 = 3$$

<답> ③

9.

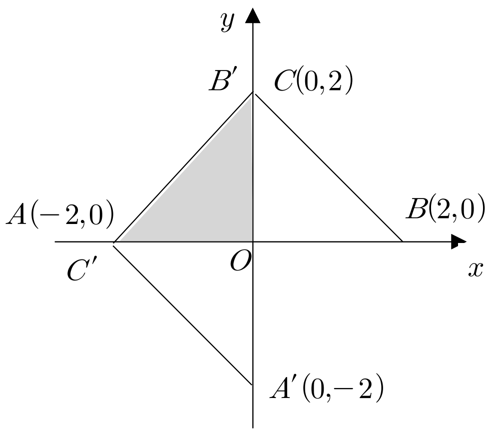
출제의도 : 일차변환을 이용하여 점을 이동시킬 수 있는가?

해설]

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

이므로 주어진 일차변환은 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시킨 회전변환을 나타낸다.

즉, 세 점 $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(0,2)$은 각각 $A'(0,-2)$, $B'(0,2)$, $C'(-2,0)$로 옮겨지므로 삼각형 ABC의 내부와 삼각형 $A'B'C'$의 내부의 공통부분은 그림의 색칠한 부분과 같다.



따라서, 공통부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times2=2$

<답> ③

10.

출제의도 : 정적분으로 표시된 함수를 구할 수 있는가?

해설]

$\int_0^x f(t)dt=e^x+ax+a\cdots㉠$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=e^x+a$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=e^0+a=1+a$

$\therefore\ a=-1$

따라서 $f(x)=e^x-1$ 이므로

$f(\ln2)=e^{\ln2}-1=2-1=1$

<답> ①

11.

출제의도 : 수열의 일반항과 합 사이의 관계를 이용하여 분수꼴의 수열의 합을 구할 수 있는가?

해설]

$a_1=S_1=2,\ a_{k+1}=S_{k+1}-S_k$ 이므로

$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_kS_{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{10}(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}})$

$=(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2})+(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3})+\cdots+(\frac{1}{S_{10}}-\frac{1}{S_{11}})$

$=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{11}}$

$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{S_{11}}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ S_{11}=6$

<답> ①

12.

출제의도 : 무한등비급수의 규칙성을 찾고 그 극한값을 구할 수 있는가?

해설]

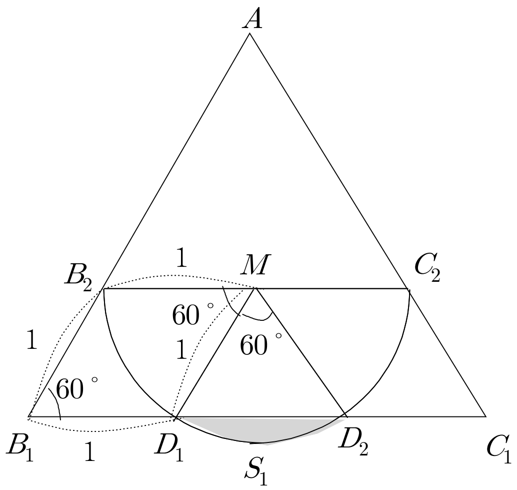
삼각형 AB_nC_n과 삼각형 $AB_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비는 $3:2$ 이므로 넓이의 비는 $9:4$ 이다.

따라서, 각 단계에서 얻은 부분의 넓이는 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비수열을 이룬다.

또한,

$\overline{B_2C_2}=3\times\frac{2}{3}=2$

이므로 그림과 같이 선분 B_2C_2의 중점을 M, 선분 B_1C_1과 호 B_2C_2가 만나는 점을 D_1, D_2라 하면 사각형 $B_1B_2MD_1$은 한 변의 길이가 1인 평행사변형이므로 삼각형 MD_1D_2는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.



$$\therefore\ S_1 = \pi \times \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{36 - 16} = \frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{20}$$

<답> ②

13.

출제의도 : 삼각함수의 덧셈정리와 합성을 이용하여 함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

해설]

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 3\sin x \\ &= 2\left(\cos x \cos\frac{\pi}{6} + \sin x \sin\frac{\pi}{6}\right) + 3\sin x \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) + 3\sin x \\ &= 4\sin x + \sqrt{3}\cos x \\ &= \sqrt{19}\left(\frac{4}{\sqrt{19}}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\cos x\right) \\ &= \sqrt{19}\sin(x + \alpha) \end{aligned}$$

$$\left(\because \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{19}},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\right)$$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{19}$이다.

<답> ④

14.

출제의도 : 행렬의 성질을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판정할 수 있는가?

해설]

ㄱ. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in S$(참)

ㄴ. $A \in S$ 이므로 $A^2 = A$

A^{-1}이 존재하므로

$A^2 = A$의 양변의 오른쪽에 A^{-1}을 곱하면

$A^2A^{-1} = AA^{-1} \qquad \therefore A = E$(참)

ㄷ. $A + E \in S$ 이므로 $(A+E)^2 = A + E$

$A^2 + 2A + E = A + E$

$\therefore A^2 = -A$

$A^4 = (A^2)^2 = (-A)^2 = A^2 = -A$

$(A^4)^2 = (-A)^2 = A^2 = -A$

이므로 $(A^4)^2 = A^4 \qquad \therefore A^4 \in S$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

<답> ⑤

15.

출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있는가?

해설]

$a_n = a_{n-2} + 1$에서

(i) $n=2k-1$일 때,

$a_{2k-1}=a_{2k-3}+1(k\geq 2)$

수열 $\{a_{2k-1}\}$은 첫째항이 $a_1=2$이고 공차가 1인 등차수열이므로

$a_{2k-1}=2+(k-1)\cdot 1=k+1(k\geq 1)$

(ii) $n=2k$일 때,

$a_{2k}=a_{2k-2}+1(k\geq 2)$

수열 $\{a_{2k}\}$는 첫째항이 $a_2=1$이고 공차가 1인 등차수열이므로

$a_{2k}=1+(k-1)\cdot 1=\boxed{k}(k\geq 1)$

이다. $S_n=a_na_{n+1}$이므로

$$S_n=\begin{cases} a_{2k-1}a_{2k}=(k+1)\times\boxed{k} & (n=2k-1) \\ a_{2k}a_{2k+1}=\boxed{k(k+2)} & (n=2k)\end{cases}$$

따라서 $f(k)=k,\ g(k)=k(k+2)$

$\therefore f(6)+g(7)=6+63=69$

<답> ③

16.

출제의도 : $x=1$에서의 미분계수를 구할 수 있는가?

해설]

$a>1$이므로 $f(a)>f(1)$이고

두 점 $(1,\ f(1)),\ (a,\ f(a))$사이의 거리가 a^2-1이므로

$\sqrt{(a-1)^2+\{f(a)-f(1)\}^2}$
$=a^2-1$

$(a-1)^2+\{f(a)-f(1)\}^2$
$=(a^2-1)^2$

$\{f(a)-f(1)\}^2=(a^2-1)^2-(a-1)^2$
$=(a-1)^2\{(a+1)^2-1\}$ ⋯ ㉠

$\therefore f(a)-f(1)$
$=(a-1)\sqrt{a^2+2a}$ ($\because a>1$이고 $f(a)>f(1)$)

$$f'(1)=\lim_{a\to 1}\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\lim_{a\to 1}\frac{(a-1)\sqrt{a^2+2a}}{a-1}=\sqrt{3}$$

<답> ⑤

[다른풀이]

㉠에서 $\left\{\frac{f(a)-f(1)}{a-1}\right\}^2=(a+1)^2-1=a^2+2a$

$$\lim_{a\to 1}\left\{\frac{f(a)-f(1)}{a-1}\right\}^2=\lim_{a\to 1}(a^2+2a)$$

$\{f'(1)\}^2=3$

$\therefore f'(1)=\sqrt{3}$ ($\because f'(1)>0$)

17.

출제의도 : 분수부등식을 만족시키는 정수 해의 개수를 구할 수 있는가?

해설]

방정식 $f(x)=0$의 세 근을 $-5,\alpha,4$라 하자.

$\frac{1}{x}-\frac{1}{f(x)}\geq\frac{1}{xf(x)}$에서

$\frac{1}{x}-\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{xf(x)}\geq 0$

분모를 통분하면 $\frac{f(x)-x-1}{xf(x)}\geq 0$

양변에 $\{xf(x)\}^2$을 곱하면

$xf(x)\{f(x)-(x+1)\}\geq 0$(단, $x\neq 0,\ f(x)\neq 0$)

(i) $x>0$인 경우

$\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)\geq x+1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)<0 \\ f(x)<x+1\end{cases}$

$\therefore 0<x\leq\frac{3}{2}$ 또는 $4<x\leq 5$

(ii) $x<0$인 경우

$\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)<x+1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)<0 \\ f(x)\geq x+1\end{cases}$

$\therefore\alpha<x<0$ 또는 $-5<x\leq -3$ ($\because -1<\alpha<0$)

(i), (ii)에 의하여 부등식의 해는

$0<x\leq\frac{3}{2}$ 또는 $4<x\leq 5$ 또는

$\alpha<x<0$ 또는 $-5<x\leq -3$

이므로 부등식을 만족시키는 정수 x는 1, 5, -4, -3의 4개이다.

<답> ②

18.
출제의도 : 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가?

$(-3)^{n-1}$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수가 a_n이므로 방정식 $x^n=(-3)^{n-1}$에서
(i) $n=2k+1$(k는 자연수)인 경우
$x^n=(-3)^{2k}=3^{2k}>0$
n이 홀수이므로 실근의 개수는 1이다.
$\therefore a_{2k+1}=1$(k는 자연수)
(ii) $n=2k$(k는 자연수)인 경우
$x^n=(-3)^{2k-1}=-3^{2k-1}<0$
n이 짝수이므로 실근의 개수는 0이다.
$\therefore a_{2k}=0$(k는 자연수)
(i), (ii)에 의하여
$a_n=\begin{cases} a_{2k+1}=1\,(n=2k+1) \\ a_{2k}\quad=0\,(n=2k)\end{cases}$ (단, k는 자연수)

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=3}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}&=\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_4}{2^4}+\frac{a_5}{2^5}+\frac{a_6}{2^6}+\cdots\\&=\frac{1}{2^3}+\frac{0}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{0}{2^6}+\cdots\\&=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots\\&=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

<답> ①

19.
출제의도 : 무한급수의 합을 정적분의 정의에 의해서 구할 수 있는가?

해설]
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(m+\frac{k}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(m+\frac{(m+1-m)k}{n}\right)\frac{1}{n}$$
$$=\int_m^{m+1}f(x)dx<0$$

이므로 만족시키는 정수 m은 -3, -2, -1, 2, 3, 4, 5의 7개이다.

<답> ⑤

20.
출제의도 : 포물선과 직선의 위치관계를 이해하고 있는가?

해설]
$\overline{\mathrm{FA}}:\overline{\mathrm{FB}}=1:2$ 이므로
$\overline{\mathrm{FA}}=k$, $\overline{\mathrm{FB}}=2k$ 라 하자.
두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{AA'}}=k$, $\overline{\mathrm{FB}}=\overline{\mathrm{BB'}}=2k$
따라서 두 점 A, B의 좌표는
$\mathrm{A}(k-1,\ 2\sqrt{k-1}),\mathrm{B}(2k-1,\ 2\sqrt{2k-1})$ 이다.
삼각형 PB'B에서
$\overline{\mathrm{PA'}}:\overline{\mathrm{PB'}}=2\sqrt{k-1}:2\sqrt{2k-1}=1:2$ 이므로
$\sqrt{2k-1}=2\sqrt{k-1}$
$2k-1=4(k-1)=4k-4$
$2k=3,\ k=\frac{3}{2}$이므로 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\ \sqrt{2}\right),\mathrm{B}(2,\ 2\sqrt{2})$
따라서 직선 l의 기울기는
$$\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

<답> ⑤

[다른풀이]

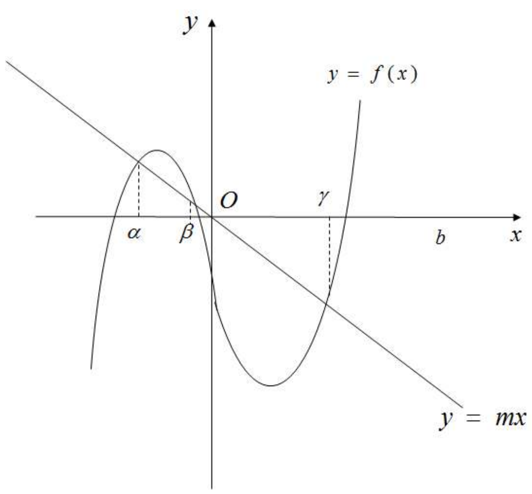
포물선 $C: y^2=4x$와 직선 l을 x축으로 1만큼 평행이동하면
$C':y^2=4(x-1)$, $l':y=mx$ $(m>0)$이므로
포물선 C'의 준선이 $x=0$(y축)이 된다.
$\overline{\mathrm{FA}}=k$, $\overline{\mathrm{FB}}=2k$ $(k\neq0)$라 하면
$\begin{cases} y^2=4(x-1) \\ y=mx\end{cases}$ 에서 y를 소거하면

$m^2x^2 = 4(x-1)$
$m^2x^2 - 4x + 4 = 0$의 두 근이 k, $2k$이므로
$k + 2k = 3k = \frac{4}{m^2}$ $\cdots$ ㉠
$k \cdot 2k = 2k^2 = \frac{4}{m^2}$
m을 소거하면
$2k^2 - 3k = 0$, $k(2k-3) = 0$
$k = \frac{3}{2}$이므로 ㉠에서 $m^2 = \frac{8}{9}$
$\therefore m = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

21.
출제의도 : 함수의 미분가능성을 이해하고 삼차함수의 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

해설]
주어진 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$가 만나는 모든 점에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기는 m이어야 한다.
(i) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$가 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 교점의 x좌표를 α, β, γ $(\alpha < \beta < \gamma)$ 라 하면

$$g(x) = \begin{cases} mx & (x < \alpha) \\ f(x) & (\alpha \le x < \beta) \\ mx & (\beta \le x < \gamma) \\ f(x) & (x \ge \gamma) \end{cases}$$

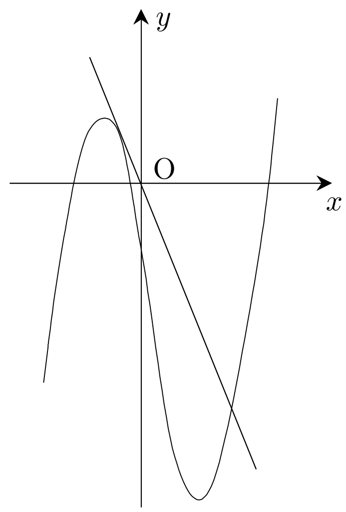


이때, 직선 $y=mx$는 곡선 $y=f(x)$의 접선이 아니므로

$$f'(\alpha) \ne m,\ f'(\beta) \ne m,\ f'(\gamma) \ne m$$

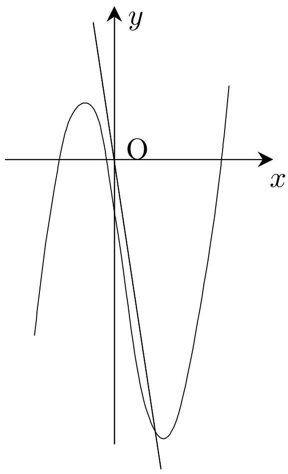
이다. 따라서 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$, β, γ에서 미분가능하지 않다.
(ii) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 교점의 x좌표를 α, β $(\alpha < \beta)$ 라 하면,

$$g(x) = \begin{cases} mx & (x < \beta) \\ f(x) & (x \ge \beta) \end{cases}$$

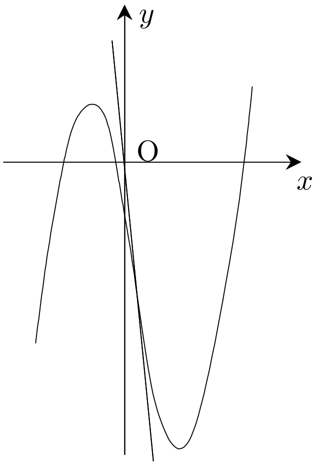


이때, $f'(\alpha) = m$, $f'(\beta) \ne m$이므로 함수 $g(x)$는 $x=\beta$에서 미분가능하지 않다.
(iii) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$가 한 점에서 만날 때, 교점의 x좌표를 α라 하면,

$$g(x) = \begin{cases} mx & (x < \alpha) \\ f(x) & (x \ge \alpha) \end{cases}$$



[그림1]



[그림2]

이때, $f'(\alpha)=m$이면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
그런데, [그림1]과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$의 교점이 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 아니면 $f'(\alpha)=m$이 성립하지 않는다.
따라서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 [그림2]와 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$의 교점은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이고, 이 변곡점에서의 접선의 기울기는 m이어야 한다.

$f'(x)=3x^2-6x-9$이므로

$f''(x)=6x-6=0$에서

$$x=1$$

따라서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $(1,-12)$이고 두 점 $(0,0),(1,-12)$를 지나는 직선의 기울기는

$$m=-12$$

이다. 이때, $f'(1)=-12$이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
따라서 구하는 m의 값은 -12이다.

<답> ②

22.
출제의도 : 무리방정식의 해를 구할 수 있는가?

해설]

$\sqrt{4x+9}-x=1$에서

$\sqrt{4x+9}=x+1$ … ㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$4x+9=x^2+2x+1$

$x^2-2x-8=0$

$(x-4)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=4$

그런데, $x=-2$를 ㉠에 대입하면

$\sqrt{1}=-1$이므로 등식이 성립하지 않는다.

따라서 $x=-2$는 무연근이다.

한편, $x=4$를 ㉠에 대입하면

$\sqrt{25}=5$이므로 등식이 성립한다.

따라서 주어진 무리방정식의 해는 4이다.

<답> 4

23.
출제의도 : 삼각방정식의 해를 구할 수 있는가?

해설]

$\cos 2x=2\cos^2 x-1$이므로

$(\cos 2x-\cos x)\sin x$

$=(2\cos^2 x-\cos x-1)\sin x$

$=(\cos x-1)(2\cos x+1)\sin x=0$

(i) $\sin x=0$에서

$$x=\pi$$

(ii) $\cos x = 1$을 만족시키는 x는 $0 < x < 2\pi$에 존재하지 않는다.

(iii) $\cos x = -\frac{1}{2}$에서

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$

따라서 구하는 모든 해의 합은

$$\pi + \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi = 3\pi$$

따라서 $k = 3$이므로

$$10k = 30$$

[다른 풀이]

위의 (ii), (iii) 경우는

$\cos 2x - \cos x = -2\sin\frac{3}{2}x\sin\frac{x}{2}$ 임을 이용하여 풀 수도 있다.

$0 < \frac{3}{2}x < 3\pi$이고, $0 < \frac{x}{2} < \pi$이므로

$\cos 2x - \cos x = 0$의 해는

$\frac{3}{2}x = \pi$ 또는 $\frac{3}{2}x = 2\pi$이고

$x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$이다.

<답> 30

24.

출제의도 : 정적분을 이용하여 회전체의 부피를 구할 수 있는가?

해설]

$y = \frac{1}{2}x^2$에서 x, y를 서로 바꾸면

$$x = \frac{1}{2}y^2$$

위의 식을 y에 대하여 정리하면

$$y = \pm\sqrt{2x}$$

그런데, 주어진 함수의 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$이므로 역함수의 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$이어야 한다.

따라서 주어진 함수의 역함수는

$$y = \sqrt{2x}$$

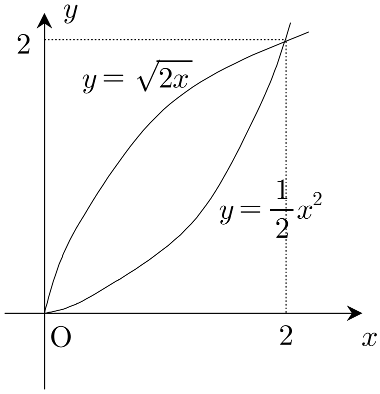
이다.

한편, 주어진 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ $(x > 0)$의 그래프와 직선 $y = x$의 교점과 같다.

따라서 $\frac{1}{2}x^2 = x$에서

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

이므로 주어진 함수와 그 역함수의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구하는 회전체의 부피 V는

$$V = \pi\int_0^2 \left\{(\sqrt{2x})^2 - \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2\right\}dx$$

$$= \pi\int_0^2 \left(2x - \frac{1}{4}x^4\right)dx$$

$$=\pi\left[x^2-\frac{1}{20}x^5\right]_0^2$$

$$=\pi\left(2^2-\frac{2^5}{20}\right)$$

$$=\pi\left(4-\frac{8}{5}\right)$$

$$=\frac{12}{5}\pi$$

따라서 $p=5,\ q=12$이므로

$$p+q=5+12=17$$

<답> 17

25.

출제의도 : 중복조합을 이용하여 부정방정식의 정수해의 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

해설]

구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 4개 중에서 중복을 허락하여 4개를 뽑는 중복조합의 수와 같다.

$$\therefore\ {}_4\mathrm{H}_4={}_{4+4-1}\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3$$

$$=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

답 35

26.

출제의도 : 역함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

해설]

주어진 조건에서

$$f(2)=1,\ f'(2)=1$$

이다.

$f(2x)=h(x)$라 하면 $g(x)=h^{-1}(x)$이다.

이때, $h(1)=f(2)=1$이므로

$$a=g(1)=h^{-1}(1)=1$$

한편, $h(y)=x$ 즉, $h^{-1}(x)=y$라 하면

$$g'(x)=\frac{d}{dx}h^{-1}(x)=\frac{1}{h'(y)}$$

이고, $h'(x)=2f'(2x)$에서

$$h'(1)=2f'(2)=2\times1=2$$

이므로

$$b=g'(1)=\frac{1}{h'(1)}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 10(a+b)=10\left(1+\frac{1}{2}\right)=15$$

<답> 15

[다른 풀이]

주어진 조건에서

$$f(2)=1,\ f'(2)=1$$

이때, 함수 $f(x)$의 역함수를 $p(x)$라 하면

$$p(1)=2,\ p'(1)=\frac{1}{f'(2)}=1$$

이다.

한편, $y=f(2x)$에서 $2x=f^{-1}(y)$ 즉, $x=\frac{1}{2}f^{-1}(y)$이므로 함수 $y=f(2x)$의 역함수는

$$g(x)=\frac{1}{2}f^{-1}(x)=\frac{1}{2}p(x)$$

이고,

$$g'(x)=\frac{1}{2}p'(x)$$

이다.

따라서

$$a = g(1) = \frac{1}{2}p(1) = \frac{1}{2}\times 2 = 1$$

$$b = g'(1) = \frac{1}{2}p'(1) = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

이므로

$$10(a+b) = 10\left(1+\frac{1}{2}\right) = 15$$

<답> 15

27.

출제의도 : 타원의 정의와 성질을 이용하여 장축의 길이를 구할 수 있는가?

해설]

$\overline{\mathrm{OF}} = \overline{\mathrm{OF'}}$이므로 원점 O는 선분 FF′의 중점이다.

따라서 두 삼각형 FPF′, QFF′에서

$$\overline{\mathrm{OH}} // \overline{\mathrm{PF'}},\ \overline{\mathrm{OI}} // \overline{\mathrm{QF}}$$

이므로

$$\overline{\mathrm{PF'}} \perp \overline{\mathrm{PF}},\ \overline{\mathrm{QF}} \perp \overline{\mathrm{QF'}}\ \cdots ㉠$$

이다.

따라서 두 점 P, Q는 주어진 타원과 선분 FF′을 지름으로 하는 원의 교점이다.

이때, 이 원과 타원의 교점들은 서로 x축 또는 y축 또는 원점에 대하여 대칭이므로 두 직각삼각형 FPF′, QFF′은 서로 합동이다.

이때, $\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{QF'}}$이면 $\overline{\mathrm{PF'}} = \overline{\mathrm{QF}}$이므로 $\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{OI}}$가 되어 모순이다.

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{QF}}$$

이제, $\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{QF}} = p$, $\overline{\mathrm{PF'}} = \overline{\mathrm{QF'}} = q$라 하면 타원의 장축의 길이가 l이므로

$$p + q = l\ \cdots ㉠$$

이고, 직각삼각형 FPF′에서

$$p^2 + q^2 = \overline{\mathrm{FF'}}^2 = 10^2\ \cdots ㉡$$

이다. 또, $p = 2\times\overline{\mathrm{OI}}$, $q = 2\times\overline{\mathrm{OH}}$이므로

$$pq = 4\times\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{OI}} = 4\times 10 = 40\ \cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢에서

$$l^2 = p^2 + q^2 + 2pq$$
$$= 100 + 2\times 40 = 180$$

<답> 180

28.

출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 수열의 점화식을 구하여 일반항을 구할 수 있는가?

해설]

$\dfrac{1}{n+2} < \dfrac{a_n}{k} < \dfrac{1}{n}$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$이다.

따라서 주어진 부등식의 각 변의 역수를 취하면

$$n < \frac{k}{a_n} < n+2$$

$$\therefore\ na_n < k < (n+2)a_n$$

이때, na_n, $(n+2)a_n$은 모두 자연수이므로 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 k의 개수는

$$(n+2)a_n - na_n - 1 = 2a_n - 1$$

$$\therefore\ a_{n+1} = 2a_n - 1$$

이때, $a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$이므로 수열 $\{a_n - 1\}$은 첫째항이 $a_1 - 1 = 1$, 공비가 2인 등비수열이다.

$$\therefore\ a_n - 1 = 1\times 2^{n-1}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$\therefore\ a_n = 2^{n-1} + 1$$

$\therefore\ a_{10}=2^9+1=513$

<답> 513

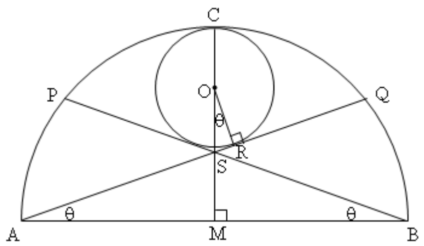
29.

출제의도 : 주어진 도형에서 삼각함수의 극한을 구할 수 있는가?

해설]

다음과 같이 선분 AB의 중점을 M, 두 선분 AQ, BP의 교점을 S라 하자.

또, 내접하는 원의 중심을 O, 이 원과 반원의 교점을 C라 하고, 이 원과 선분 AQ의 접점을 R라 하자.



위의 그림에서 맞꼭지각의 성질에 의해

$\angle\mathrm{ASM}=\angle\mathrm{OSR}$

이고, $\angle\mathrm{AMS}=\angle\mathrm{ORS}=90^\circ$ 이므로

$\angle\mathrm{SOR}=\angle\mathrm{SAM}=\theta$

이다.

이때, $\overline{\mathrm{CO}}+\overline{\mathrm{OS}}+\overline{\mathrm{SM}}=\overline{\mathrm{CM}}=\overline{\mathrm{AM}}=1$이므로

$$r(\theta)+r(\theta)\times\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta=1$$

$$\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)r(\theta)=1-\tan\theta$$

$$\therefore\ r(\theta)=\frac{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\dfrac{1}{\cos\theta}}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)}{1+\cos\theta}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}{1+\cos\theta}$$

한편, $\dfrac{\pi}{4}-\theta=t$라 하면 $\theta\to\dfrac{\pi}{4}-0$일 때 $t\to+0$ 이므로

$$\therefore\ \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{r(\theta)}{\dfrac{\pi}{4}-\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}{(1+\cos\theta)\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\sqrt{2}}{(1+\cos\theta)}\times\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}{\dfrac{\pi}{4}-\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\sqrt{2}}{(1+\cos\theta)}\times\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}\times1=\frac{2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2$$

$\therefore\ p=2,q=-2$

$\therefore\ p^2+q^2=8$

<답> 8

30.

출제의도 : 그래프를 이해하여 로그부등식을 풀고 주어진 조건을 만족하는 값을 구할 수 있는가?

해설]

(가)에서 $a\geq3$ 이고

(나)에서

$$\frac{\log_n a}{a-2} \le \frac{1}{2} \quad \cdots \text{㉠}$$

이어야 한다.

(i) ㉠에 $a=3$을 대입하면

$$\frac{\log_n 3}{3-2} \le \frac{1}{2}, \quad \log_n 3 \le \frac{1}{2}$$

$$\log_n 3 \le \log_n \sqrt{n}$$

따라서 $\sqrt{n} \ge 3$ ($\because$ $n>1$)이므로

$$n \ge 9$$

(ii) ㉠에 $a=4$를 대입하면

$$\frac{\log_n 4}{4-2} \le \frac{1}{2}, \quad \log_n 4 \le 1$$

$$\log_n 4 \le \log_n n$$

$$\therefore \ n \ge 4 \ (\because \ n>1)$$

(iii) ㉠에 $a=5$를 대입하면

$$\frac{\log_n 5}{5-2} \le \frac{1}{2}$$

따라서 $n^3 \ge 25$이므로

$$n \ge 3 \ (\because \ n\text{은 자연수})$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} 4 & (4 \le n \le 8) \\ 3 & (n \ge 9) \end{cases}$$

$$\therefore \ \sum_{n=4}^{30} f(n) = \sum_{n=4}^{8} f(n) + \sum_{n=9}^{30} f(n)$$
$$= \sum_{n=4}^{8} 4 + \sum_{n=9}^{30} 3 = 4\times5 + 3\times22 = 86$$

<답> 86