9월 4일 수능 모의평가

수리 영역 (가형)

2 교시

수리 영역(가형)

분석 및 해설

정 답										
	01 ④	02 ②	03 ②	04 ⑤	05 ④	06 ⑤	07 ⑤	08 ④	09 ②	10 ③
	11 ④	12 ①	13 ③	14 ②	15 ①	16 ③	17 ①	18 ⑤	19 ③	20 ④
	21 ①	22 12	23 6	24 50	25 20	26 128	27 13	28 12	29 8	30 79

출제 문항 분석

문항	난이도	출제 단원	출제 의도
1	하	행렬	행렬의 계산
2	하	삼각함수	배각공식의 이해
3	하	확률	독립시행의 정리
4	하	일차변환	도형의 이동
5	하	경우의 수	최단경로의 수 구하기
6	중	함수의 극한	합성함수의 연속성
7	중	상용로그	실생활 응용
8	중	일차변환	합성 변환
9	중	수열의 극한	도형과 무한급수 **
10	중	방정식과 부등식	실생활 응용
11	중	확률	조건부 확률
12	중	이차곡선	이차곡선의 점근선과 접선
13	중	적분	적분과 그래프의 개형
14	중	공간도형	정사영
15	중	수열의 극한	좌표 위에 정의된 수열의 극한
16	중	행렬	행렬의 참, 거짓
17	중	수열	수열의 증명추론 **
18	중	통계	표본평균의 분포
19	상	삼각함수	삼각함수의 공식 *
20	상	삼각함수의 극한	삼각함수의 극한
21	상	미분	역함수와 미분계수의 정의 *
22	하	미분	미분계수
23	중	방정식과 부등식	소금물의 농도
24	중	적분	회전체의 부피
25	중	통계	연속확률분포의 분산
26	중	이차곡선	포물선의 정의
27	상	공간도형	구의 위치관계
28	중	수열의 극한	합과 일반항 사이의 관계
29	상	벡터	벡터 내적의 연산 *
30	상	지수로그함수	로그함수의 그래프 해석 **

출제 경향

이번 9월 모의 평가는 지난 6월 모의 평가에 비해 가, 나형 모두 어려운 시험이었다. 6월 모의 평가가 각 단원의 기본 개념과 문제의 착안점을 찾는 것에 중점을 두어 복잡한 계산은 하지 않게 출제한 것과 비교하여 상대적으로 계산 능력도 평가하는 시험이었다고 할 수 있다.

가형의 경우 전통적으로 어렵게 출제되고 있는 공간도형(14번, 27번)과 벡터(29번)가 까다롭게 출제되었고, 역함수와 삼차함수의 변곡점을 이용해야 계산이 간단해지는 문제(21번)와 가, 나형 공통 문제에서 정수 조건과 지수-로그함수가 결합된 유형(30번)은 작년 6월과 9월, 2012학년도 대수능 뿐만 아니라 올해 6월과 9월까지 계속 까다롭게 출제되었고, 28번(공통) 처럼 S_n 항과 S_{n-1} 항의 관계를 찾는 수열 문제, 행렬에서 성분 계산 없이 대수적 연산에서의 성질을 묻는 문제(16번) 등도 기본 개념에 대한 정확한 이해를 필요로 하는 문제들이 출제되었다.

* 신유형 문제
** 출제 가능 문제

학습 대책

갑자기 6월 모의 평가와 비교하여 더 어렵게 출제되어 학생들이 당황해 하리라 예상되지만 가형에서 계산이 조금 복잡한 몇 문제를 제외하면 기본 개념들을 정확히 이해하고 있는지 묻거나 그리고 기존의 기출 문제들을 변형해서 출제한 문제들처럼 평가원이 교과 과정에서 강조하는 부분들을 반복적으로 묻는 경향이 있으므로 기출 문제들을 잘 해석하고 각 문제에서 수학적 원리들이 어떻게 이용되어 있는지 잘 고민해 보아야 한다. 정수 조건의 문제들이 각 단원의 내용과 결합되는 방식들, 특별한 함수의 증가-감소, 오목-볼록의 성질이 그래프와 연관해서 어떤 방식으로 나타나는지, 다항함수들의 개형의 특징은 무엇인지, 그것이 기하학적인 의미와 대수적인 의미가 무엇인지 등에 대한 내용들이 기출 문제 분석을 통해서 반드시 짚어가야 하는 점들 일 것이다. 여러 문제들을 관통하는 보편적 원리들은 나름대로 정리해 내고 소화해 내어야 난이도 있는 문제들에 대한 의미 있는 대비책이 될 것이다.

해 설

01 | $2A=\begin{pmatrix}2 & 4\\4 & -2\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은

$2+4+4+(-2)=8$

02 | $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\frac{1}{3}-1=-\frac{1}{3}$

03 | 한 번의 시행에서 홀수의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 독립시행의 정리에서, 구하는 확률은

$${}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}$$

04 | $P(x,\ y)$가 일차변환 f에 의해 옮겨진 점을 $P(x',\ y')$라 하면

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\-3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

이고

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\-3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$x+2y=0$에서

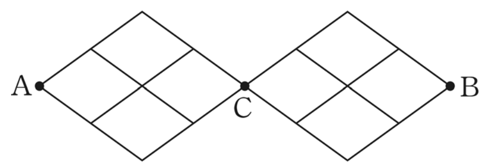
$(x')+2(-3x'-y')=0$

$-5x'-2y'=0,$

$5x'+2y'=0$

따라서, 구하는 직선의 방정식 $5x+2y=0$

05 |



그림과 같이 점 C를 잡으면, 점 C를 반드시 지나야 한다.

A→C의 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\,2!}=6$

C→B의 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\,2!}=6$

따라서, 구하는 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)이다.

06 | $f(x)$는 $x=2$이외의 점에서는 연속이므로 $f(f(x))$가 불연속이려면

(i) $x=2$일 때와

(ii) $f(x)=2\Leftrightarrow x=5$일 때만 불연속일 가능성이 있다.

(i) $f(f(2))=f(1)=-2$이고

$\lim_{x\to2+0}f(f(x))=-4$이므로 '$x=2$'에서 불연속

(ii) $f(f(5))=f(2)=1$

$\lim_{x\to5+0}f(f(5))=-1$이므로 '$x=5$'에서 불연속

따라서, 불연속이 되는 모든 a의 값의 합은 $2+5=7$이다.

07 | $\log T_1=-k\cdot l_0\cdot 3d_0,$

$\log T_2=-k\cdot 2l_0\cdot 4d_0$이므로

$$\log T_2=\frac{8}{3}\cdot\log T_1$$

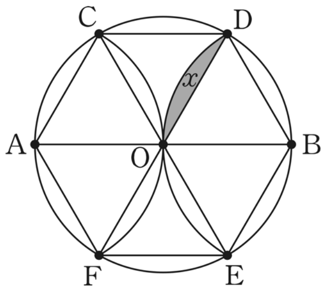
$$\therefore T_2=T_1^{\frac{8}{3}}$$

따라서, 구하는 n의 값은 $\frac{8}{3}$이다.

08 | 일차변환 f는 원점 대칭을 나타내고, 일차변환 g는 60°만큼 회전변환이므로 점 A는 f에 의해 점 D로 옮겨지고 점 D는 g에 의해 점 E로 옮겨진다.

출제 가능 문제

09 |



그림과 같이 C, D, E, F를 잡으면 ACDBEF는 정육각형이다. 어두운 부분의 넓이를 x라 하면

$$x = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore S_1 = \frac{\pi}{3} - 4x = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

$n+1$단계에 그려진 원의 반지름은 n단계에 그려진 원의 반지름의 $\frac{1}{2}$이고, 개수는 2배가 되므로

$n+1$단계에서 새로 추가된 넓이는 n단계에서 추가된 넓이의 $2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$배이다.

$$\therefore S_{n+1} - S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times S_1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\frac{1}{2}} = 2S_1 = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$$

10 | 갑이 움직인 경로는 산책로 AE와 원모양의 산책로와 같으므로 갑이 도착하는데 걸린 시간은 $\frac{6}{4} + \frac{2\pi}{\pi} = \frac{7}{2}$이다.

한편 $\overline{\mathrm{AB}} = x$라 하면 $\overline{\mathrm{DE}} = \sqrt{1^2 + (5-x)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 26}$이므로 을이 도착하는데 걸린 시간은 $\frac{x+2+\sqrt{x^2-10x+26}}{5}$이다.

그런데 갑이 을보다 2시간 늦게 도착하므로

$$\frac{x+2+\sqrt{x^2-10x+26}}{5} = \frac{3}{2}$$

$$2\sqrt{x^2-10x+26} = 11 - 2x,$$

$$4(x^2 - 10x + 26) = 4x^2 - 44x + 121,$$

$$4x = 17$$

따라서, 두 지점 A, B 사이의 거리는 $\frac{17}{4}$이다.

11 | 다음과 같이 세 가지 경우로 나누어보자.

(i) A가 던져서 앞면이 0개 나올 때

$${}_2\mathrm{C}_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 0 = 0$$

(ii) A가 던져서 앞면이 1개 나올 때

$${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(iii) A가 던져서 앞면이 2개 나올 때

$${}_2\mathrm{C}_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \times {}_2\mathrm{C}_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{8}}{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{3}$$

12 | 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$의 한 점근선에 평행이므로 $m = \pm\frac{b}{a}$

또한 직선 l이 타원 $\frac{x^2}{8a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$에 접하므로 직선 l의 방정식은 $y = mx \pm \sqrt{8a^2m^2 + b^2}$

즉 $mx - y \pm \sqrt{8a^2m^2 + b^2} = 0$이다.

원점에서 직선 l까지의 거리가 1이므로

$$\frac{\sqrt{8a^2m^2+b^2}}{\sqrt{m^2+1}} = 1,$$

$$8a^2m^2 + b^2 = m^2 + 1,$$

$m = \pm\frac{b}{a}$이므로 $9b^2 = \frac{b^2}{a^2} + 1,$

양변을 b^2으로 나누면

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 9$$

13 | ㄱ. $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = 3$

$\therefore F(b) = F(a) + 3 \quad \therefore$ 참

ㄴ. $F''(x) = f'(x)$이고, $x = c$ 근방에서

$f'(x) > 0$이므로 $x = c$에서 변곡점이 아니다.

$\therefore$ 거짓

ㄷ. ㄱ에서 $F(b) = F(a) + 3$,

$\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a) = 0$에서

$F(c) = F(a)$

따라서, 사차함수 $y = F(x)$의 그래프는

$x = a$에서 극솟값 $F(a)$

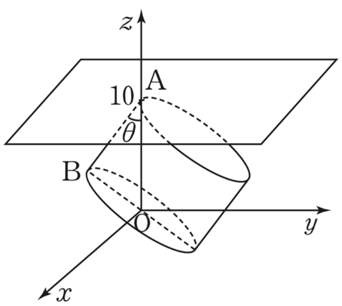
$x = b$에서 극댓값 $F(b) = F(a) + 3$

$x = c$에서 극솟값 $F(c) = F(a)$

를 가지고, $F(a) < 0 < F(a) + 3$이므로 구간 $(-\infty,\ a)$, $(a,\ b)$, $(b,\ c)$, $(c,\ \infty)$에서 각각 하나의 실근을 가진다. $\therefore$ 참

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

14 |



그림과 같이 원기둥과 평면 $z = 10$이 만나는 점을 A라 하고 점 A에서 원기둥의 반대쪽 밑면에 내린 수선의 발을 B라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$는 원기둥의 밑면의 법선벡터이고 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$는 평면 $z = 10$의 법선벡터이다. 따라서 원기둥의 한 밑면과 평면 $z = 10$이 이루는 각의 크기는 두 법선 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 이루는 각의 크기와 같다. 따라서 구하는 각을 θ라 하면 $\overline{\mathrm{OA}} = 10$, $\overline{\mathrm{AB}} = 8$이므로

$\cos\theta = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

원기둥의 한 밑면의 반지름이 6인 원이므로 원의 넓이는 36π 이다.

따라서, 정사영의 넓이는 $36\pi \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{144}{5}\pi$이다.

15 | A_n의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{n},\ \log_3 \dfrac{1}{n}\right)$이다.

$\mathrm{B}_n(x,\ y)$라 하면 $\mathrm{C}_n\left(\dfrac{\frac{2}{n} + x}{3},\ \dfrac{2\log_3\frac{1}{n} + y}{3}\right)$이고,

$2\log_3\dfrac{1}{n} + y = 0$에서 $y = -2\log_3\dfrac{1}{n} = \log_3 n^2$

$\therefore \mathrm{B}_n(n^2,\ \log_3 n^2)$

따라서, $x_n = \dfrac{\frac{2}{n} + n^2}{3} = \dfrac{n^3 + 2}{3n}$이고

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{n^3 + 2}{3n^3} = \dfrac{1}{3}$

16 | ㄱ. $(A + B)(A^{-1} + B^{-1}) = 4E$에서

$\dfrac{1}{4}(A + B)(A^{-1} + B^{-1}) = E$이므로

$A^{-1} + B^{-1}$의 역행렬은 $\dfrac{1}{4}(A + B)$이다.

$\therefore$ 참

ㄴ. $A = E$이면 $(A + B)(A^{-1} + B^{-1}) = 4E$에서

$(B + E)(B^{-1} + E) = 4E$

양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$(B + E)(E + B) = 4B$

$B^2 - 2B + E = O$

$(B - E)^2 = O$

그런데 $(B - E)^2 = O$이 성립한다고 해서 항상 $B - E = O$이 성립하는 것은 아니다.

$\therefore$ 거짓

ㄷ. $AB = \dfrac{1}{2}E$이므로 $A^{-1} = 2B$, $B^{-1} = 2A$

$(A + B)(A^{-1} + B^{-1}) = 4E$에서

$E + AB^{-1} + BA^{-1} + E = 4E$

$2A^2 + 2B^2 = 2E$

$\therefore\ A^2 + B^2 = E \qquad \therefore$ 참

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

출제 가능 문제

17 | 문제에서

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k+1}} = \frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k}}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k}} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\cdots+\frac{n-1}{4^{n-1}}\right) - \left(\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\cdots+\frac{n-1}{4^n}\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}\right)-\frac{n-1}{4^n}\right\}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4^k}-\frac{\boxed{n-1}}{4^n}\right)$$

∴ (가)$= n-1$

이므로 (*)에 의하여

$$\frac{a_n}{2^n} = -\frac{2}{9}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k+1}}$$

$$a_n = \boxed{-\frac{2}{9}\times 2^n}+2^n\times\frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4^k}-\frac{\boxed{n-1}}{4^n}\right)$$

∴ (나)$= -\frac{2}{9}\times 2^n$

∴ $f(10)\times g(5) = 9\times\left(-\frac{2^6}{9}\right) = -2^6 = -64$

18 | 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 2^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(10, \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

ㄱ. 모집단의 분산이 4이고 표본의 크기가 n이므로

$\mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{4}{n}$이다. ∴ 참

ㄴ. $\overline{X}$의 평균이 10이므로

$\mathrm{P}(\overline{X} \le 10-a) = \mathrm{P}(\overline{X} \ge 10+a)$가 성립한다.

∴ 참

ㄷ. $\mathrm{P}(\overline{X} \ge a) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{a-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)$

이고 $\mathrm{P}(\overline{X} \ge a) = \mathrm{P}(Z \le b)$이므로

$-\frac{a-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}} = b$ ∴ $a+\frac{2}{\sqrt{n}}b = 10$ ∴ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

신유형 문제

19 | 호의 길이가 같으므로

$4\theta = 2\cdot\angle\mathrm{BOP}_2 = 4\cdot\angle\mathrm{BOP}_1$

∴ $\mathrm{P}_1(\cos4\theta,\ \sin4\theta)$, $\mathrm{P}_2(2\cos2\theta,\ 2\sin2\theta)$, $\mathrm{P}_3(4\cos4\theta,\ 4\sin4\theta)$

$S_1 = \frac{1}{2}\times 8\times\sin4\theta$

$S_2 = \frac{1}{2}\times 8\times 2\sin2\theta$

$S_3 = \frac{1}{2}\times 8\times 4\sin\theta$

$3S_3 = 2(S_1+S_2)$에서

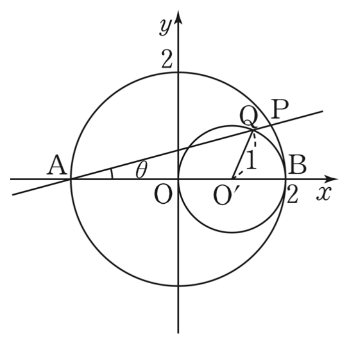
$$\begin{aligned} 3\cdot 4\sin\theta &= 2\cdot(\sin4\theta+2\sin2\theta) \\ &= 2\cdot(2\sin2\theta\cos2\theta+2\sin2\theta) \\ &= 4\sin2\theta(\cos2\theta+1) \\ &= 8\sin\theta\cos\theta(\cos2\theta+1) \\ &= 8\sin\theta\cos\theta\cdot 2\cos^2\theta \end{aligned}$$

$\sin\theta \ne 0$이므로

$12 = 16\cos^3\theta$

∴ $\cos^3\theta = \frac{3}{4}$

20 |



작은 원의 중심을 O′라 하고 두 원의 접점을 B라 하면 $\angle\mathrm{APB} = 90°$이고, $\overline{\mathrm{AB}} = 4$이므로

$\overline{\mathrm{AP}} = 4\cos\theta$

$\overline{\mathrm{AO'}} = 3$, $\overline{\mathrm{O'Q}} = 1$이므로 $\overline{\mathrm{AQ}} = x$라 하면 제2 코사인법칙에 의하여

$1^2 = x^2+3^2-2\cdot x\cdot 3\cos\theta$

$x^2-6\cos\theta\cdot x+8 = 0$

$x = 3\cos\theta+\sqrt{9\cos^2\theta-8}$ (∵ Q는 P에 가까운 점)

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta^2} = \lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{AQ}}}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta\to+0}\frac{\cos\theta-\sqrt{9\cos^2\theta-8}}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \to +0} \frac{8(1-\cos^2\theta)}{\theta^2(\cos\theta + \sqrt{9\cos^2\theta - 8})}$$

$$= 4$$

신유형 문제

21 | $f(x)$는 증가함수이어야 하므로 $f'(x) \geq 0$

$g(x)$도 증가함수이므로 $0 < g'(x) \leq \frac{1}{3}$

$\therefore f'(x) \geq 3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)} = \frac{8}{9}$ 에서

$\lim_{x\to 3}(x-3)g(x) = 0$ 이므로

$\lim_{x\to 3}\{f(x)-g(x)\} = 0$

$\therefore f(3) = g(3)$ 이고, $f(x)$는 증가함수이므로

$f(3) = g(3) = 3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)}$$

$$= \frac{1}{g(3)} \times \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-3-(g(x)-3)}{x-3}$$

$$= \frac{1}{3} \times (f'(3) - g'(3)) = \frac{8}{9}$$

$f(3) = g(3)$ 에서 $g'(3) = \frac{1}{f'(3)}$ 이므로

$$f'(3) - \frac{1}{f'(3)} = \frac{8}{3}$$

$\therefore f'(3) = 3$ 또는 $-\frac{1}{3}$ 이고, $f'(x) \geq 3$ 에서

$f'(3) = 3 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡에서, $(3, 3)$은 $y = f(x)$의 변곡점이므로

$f(x) = (x-3)^3 + a(x-3) + 3$

$f'(x) = 3(x-3)^2 + a$ 이므로 ㉢에서 $a = 3$

$\therefore f(x) = (x-3)^3 + 3(x-3) + 3$

$\therefore f(1) = -8 + 3(-2) + 3 = -11$

22 | $f(x^3) = 2x^3 - x^2 + 32x$ 에서

$f'(x^3) \cdot 3x^2 = 6x^2 - 2x + 32$

$x = 1$을 대입하면

$f'(1) \cdot 3 = 36$

$f'(1) = 12$

23 | A 그릇의 소금 : 3g

A 그릇의 소금물 : 10g → $(10+x)$g

B 그릇의 소금 : 1g → $(1+2x)$g

B 그릇의 소금물 : 50g → $(50-x+2x)$g

$\therefore f(x) = \frac{3}{10+x} \times 100, \; g(x) = \frac{1+2x}{50+x} \times 100$

$\frac{3}{10+x} < \frac{1+2x}{50+x}$ 이고, $x > 0$ 이므로

$150 + 3x < 2x^2 + 21x + 10$

$2x^2 + 18x - 140 > 0$

$x^2 + 9x - 70 = (x-5)(x+14) > 0$

$\therefore x > 5$

따라서, 만족하는 자연수 x 의 최솟값은 6이다.

24 | $\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\ln x}{x}}$ 에서 $\ln x = 1$ 이므로 $x = e$

$$V = \pi \int_1^e \left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{\ln x}{x}}\right)^2 \right) dx$$

$$= \pi \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) dx$$

$$= \pi \left[\ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_1^e$$

$$= \pi \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi$$

$$\therefore \frac{100V}{\pi} = 50$$

25 | (가)에서 $f(x)$는 우함수이고, $x \cdot f(x)$는 기함수, $x^2 f(x)$는 우함수이다.

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-1}^{1} x f(x) dx = 0$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-1}^{1} x f(x) dx$$

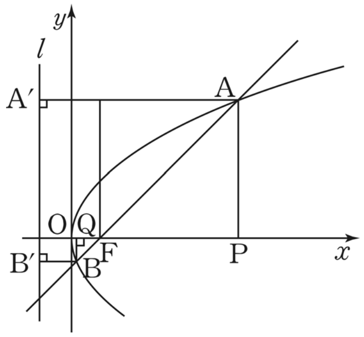
$$= 2\int_0^1 x f(x) dx$$

$$= \frac{1}{5}$$

$$\therefore \mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2 = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \mathrm{V}(10X+3) = 100\mathrm{V}(X) = 20$$

26 |



주어진 포물선의 준선을 l 이라 하고 두 점 A, B 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′라 하고 x 축에 내린 수선의 발은 각각 P, Q 라 하자.

정사각형의 한 변의 길이가 2 이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=2\sqrt{2}$ 이다.

또한 점 A 가 포물선 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{AA}'}=\overline{\mathrm{AF}}=2\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{BF}}=x$ 라 하면 $\overline{\mathrm{QF}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$ 이고 점 B 가 포물선 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{BB}'}=x$ 이다.

$\overline{\mathrm{AA}'}=\overline{\mathrm{B'B}}+\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{FP}}$ 이므로

$2\sqrt{2}=x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}x+2$

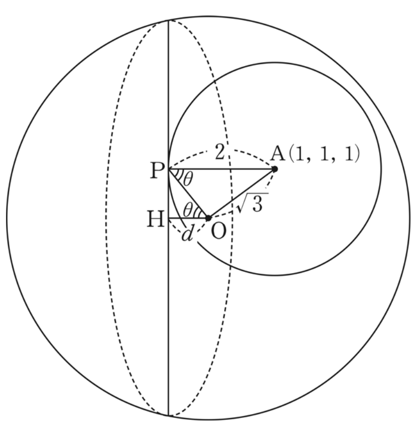
$(\sqrt{2}+1)x=4-2\sqrt{2}$

$x=-8+6\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}=-8+8\sqrt{2}$

$\therefore\ a=-8,\ b=8 \quad \therefore\ a^2+b^2=128$

27 | 점 P 에서의 접평면을 α, 원점에서 α까지의 거리를 d 라 하면 α와 구가 만나서 생기는 도형은 원이고, 넓이는 $(16-d^2)\pi$ 이다.



$\therefore$ d가 최소일 때 원의 넓이는 최대가 된다.

A(1, 1, 1), $\angle \mathrm{APO}=\theta$라 하면

$d=\overline{\mathrm{OP}}\cos\theta=\overline{\mathrm{OP}}\cdot\dfrac{\overline{\mathrm{OP}}^2+4-3}{2\cdot\overline{\mathrm{OP}}\cdot 2}$

$=\dfrac{\overline{\mathrm{OP}}^2+1}{4}$ 이므로,

$d=\dfrac{\overline{\mathrm{OP}}^2+1}{4}\geq\dfrac{(2-\sqrt{3})^2+1}{4}$

$=\dfrac{8-4\sqrt{3}}{4}=2-\sqrt{3}$

따라서, 원의 넓이의 최댓값은

$\{16-(7-4\sqrt{3})\}\pi=(9+4\sqrt{3})\pi$

$\therefore\ a+b=13$

[다른 풀이]

접점을 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$이라 하면

$(x_1-1)^2+(y_1-1)^2+(z_1-1)^2=4$

α 의 방정식은

$(x_1-1)(x-1)+(y_1-1)(y-1)+(z_1-1)(z-1)$
$=4$

정리하면

$(x_1-1)x+(y_1-1)y+(z_1-1)y$
$=x_1+y_1+z_1+1$

$d=\dfrac{|x_1+y_1+z_1+1|}{\sqrt{(x_1-1)^2+(y_1-1)^2+(z_1-1)^2}}$

$=\dfrac{|x_1+y_1+z_1+1|}{2}$

코쉬-슈바르츠 부등식에서

$(1^2+1^2+1^2)\{(x_1-1)^2+(y_1-1)^2+(z_1-1)^2\}$

$\geq(x_1+y_1+z_1-3)^2$에서

$-2\sqrt{3}\leq x_1+y_1+z_1-3\leq 2\sqrt{3}$

$\therefore\ d\geq\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$

28 | $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2=2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)^2=2\left(1-\frac{1}{9^{n-1}}\right)$ 이므로

(단, $n\geq 2$)

$(a_{n+1}-a_n)^2=\dfrac{16}{9^n}$

$\therefore\ a_{n+1} - a_n = \dfrac{4}{3^n}$ (단, $n \geq 2$)

또, 양변에 $n=1$을 대입하면

$(a_2 - a_1)^2 = 2 \times \dfrac{8}{9}$

$\therefore\ a_2 - a_1 = \dfrac{4}{3}$

따라서 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{4}{3^k}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3^k} = 10 + \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 12$$

신유형 문제

29 | $\overrightarrow{A_0A_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A_0A_2} = \vec{b}$, $\overrightarrow{A_0A_3} = \vec{c}$라 하면

(가)에서 $|\vec{b}| = |\vec{c} - \vec{a}| = 2$ $\cdots$ ㉠

(나)에서 $k=3$일 때

$\dfrac{1}{2}\vec{c} \cdot \left(\vec{c} - \dfrac{1}{2}\vec{c}\right) = \dfrac{1}{4}|\vec{c}|^2 = \cos 0 = 1$

$\therefore\ |\vec{c}| = 2$ $\cdots$ ㉡

$k=2$일 때

$\dfrac{1}{2}\vec{c} \cdot \left(\vec{b} - \dfrac{1}{2}\vec{c}\right) = \dfrac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{c} - 1 = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \vec{b} \cdot \vec{c} = 3$ $\cdots$ ㉢

$k=1$일 때

$\dfrac{1}{2}\vec{c}\left(\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{c}\right) = \dfrac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{c} - 1 = \cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \vec{a} \cdot \vec{c} = 1$ $\cdots$ ㉣

㉠, ㉡, ㉢에서

$|\vec{b} - \vec{c}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 2$

$\therefore\ |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{2}$

㉠, ㉣에서

$|\vec{c} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 4$

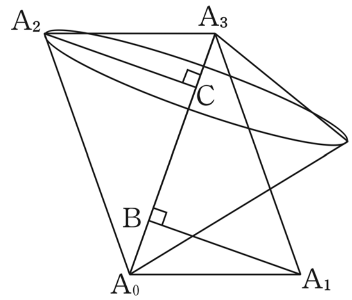
$\therefore\ |\vec{a}| = \sqrt{2}$

이상에서,

$|\vec{a}| = |\vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{c} - \vec{a}| = 2$이고,

$\overline{A_0A_1} = \overline{A_2A_3} = \sqrt{2}$,

$\overline{A_0A_2} = \overline{A_0A_3} = \overline{A_1A_3} = 2$



평면 $A_0A_1A_3$에 대해, 점 A_2의 자취는 그림과 같이 원이 된다.

$\cos\angle A_1A_0A_3 = \dfrac{4+2-4}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$에서

$\overline{A_0B} = \dfrac{1}{2}$

$\overline{A_2C} = \dfrac{1}{2}$, $BC = 1$이고,

$$\begin{aligned}\overline{A_1A_2}^2 &= |\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA_2}|^2 \\ &= |\overrightarrow{A_1B}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA_2}|^2 + 2(\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &\quad + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA_2} + \overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{CA_2}) \\ &= \left(2 - \frac{1}{4}\right) + 1 + \left(2 - \frac{1}{4}\right) + 2\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{CA_2} \\ &= \frac{9}{2} + 2 \cdot \overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{CA_2}\end{aligned}$$

그런데, $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{CA_2}$는 $\overrightarrow{A_1B} // \overrightarrow{CA_2}$일 때 최댓값 $\dfrac{7}{4}$을 가지므로 $|\overrightarrow{A_1A_2}|^2$의 최댓값은 $\dfrac{9}{2} + \dfrac{7}{2} = 8$

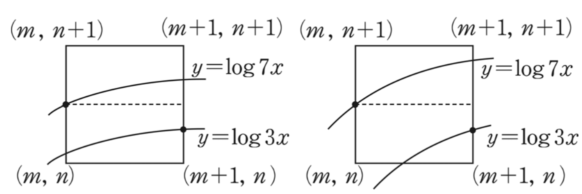
출제 가능 문제

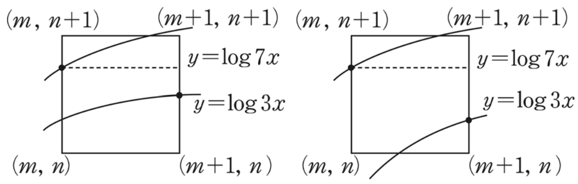
30 | 자연수 점의 조건에서, $x \geq 3$인 꼭짓점을 포함해야 한다.

$x \geq 3$이면 $7x > 3(x+1)$이므로,

$\log 7x > \log 3(x+1)$

$\log 3x < \log 3(x+1) < \log 7x < \log 7(x+1)$





위의 정사각형을 $y=\log 3x$, $9=\log 7x$의 그래프가 지나려면, $n \le \log 7m \le n+1$, $n \le \log 3(m+1) \le n+1$이어야 한다.

$1 \le m \le 99$에서

(i) $1 \le \log 7m \le 2$, $1 \le \log(3m+3) \le 2$일 때

$10 \le 7m < 100$, $10 \le 3m+3 < 100$에서

$3 \le m \le 14$

(ii) $2 \le \log 7m \le 3$, $2 \le \log(3m+3) \le 3$일 때

$100 \le 7m < 1000$, $100 \le 3m+3 < 1000$

에서 $33 \le m \le 142$

$1 \le m \le 99$이므로

$3 \le m \le 14$,

$33 \le m \le 99$

구하는 m의 개수는 $12+67=79$(개)

[다른 풀이]

(그래프를 이용하는 방법)

그래프 개형을 그리기 위해 y좌표의 정수부분이 바뀌는 지점을 구해본다.

$\log 7x = n$

$7x = 10^n$

$x = \dfrac{10^n}{7}$

(i) $n=1$: $x = \dfrac{10}{7} = 1.42\cdots$

(ii) $n=2$: $x = \dfrac{100}{7} = 14.2\cdots$

(iii) $n=3$: $x = \dfrac{1000}{7} = 142.15\cdots$

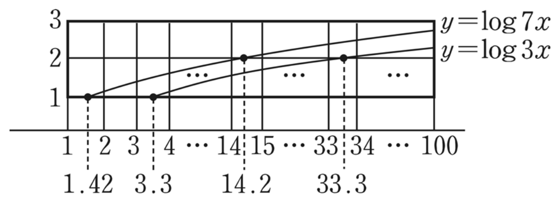
마찬가지로, $\log 3x = n$

$$x = \frac{10^n}{3}$$

(i) $n=1$: $x = \dfrac{10}{3} = 3.33\cdots$

(ii) $n=2$: $x = \dfrac{100}{3} = 33.3\cdots$

(iii) $n=3$: $x = \dfrac{1000}{3} = 333.\cdots$



x, y가 모두 100이하의 자연수인 경우는 굵은 테두리 내부이고, 하나의 사각형 안에 두 곡선이 지나는 경우는 그림에서

$3 \le x \le 15$

$33 \le x \le 100$

이고, x의 범위안에서 만족하는 정사각형의 개수는 각각 12개, 67개이다.

$\therefore\ 12+67=79$