2015학년도 대학수학능력시험 모의평가 3회

수학 영역(B 형) 해설지

성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

정답및 해설

1) [정답] ⑤ (출제자 : 09이홍구)

[출제의도] 행렬의 연산을 할 수 있는가?

[해설]

두 행렬 A, B에 대하여 주어진 식 $BA+3B$ 는 $B(A+3E)$로 변형 가능하다. 따라서 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$이고 $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$이므로 변형된 식에 집어 넣으면 $B(A+3E)=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\right\}$

$$=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-2\\4&2\end{pmatrix}$$

따라서 모든 성분의 합은 10이다.

2) [정답] ① (출제자 : 09이홍구)

[출제의도] 삼각함수의 식을 계산할 수 있는가?

[해설]

$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ 범위에서 $\cos\theta=\frac{1}{4}$이므로 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{15}}{4}$ 이다.

따라서 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta = 2\times\frac{1}{4}\times\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)=-\frac{\sqrt{15}}{8}$

3) [정답] ② (출제자 : 09이홍구)

[출제의도] 좌표공간의 외분점 계산을 할 수 있는가?

[해설]

두 점 $\mathrm{A}(1,-3,2)$, $\mathrm{B}(4,3,-1)$ 에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{8-1}{2-1}, \frac{6-(-3)}{2-1}, \frac{-2-2)}{2-1}\right)=(7,9,-4)=(a,b,-4)$

이므로 $a=7, b=9$이다. 따라서 $a-b=-2$이다.

4) [정답] ③ (출제자 : 10김우성)

[출제의도] 등차수열의 합의 공식을 이해할 수 있는가?

[해설]

$a_1+a_9=10$, $a_{25}-a_9=10$ 을 더하면 $a_1+a_{25}=20$

$\sum_{n=1}^{25}a_n=\frac{25(a_1+a_{25})}{2}$이므로 $\frac{25(20)}{2}=250$ $\Rightarrow$ $\therefore \sum_{n=1}^{25}a_n=250$

5) [정답] ④ (출제자 : 09이성규)

[출제의도] 이항분포에서 평균과 분산을 구할 수 있는가?

[해설]

$\mathrm{E}(X)=16p$, $\mathrm{V}(X)=16pq$, $(q=1-p)$ 에서 $q=\frac{3}{4}$임을 알 수 있다.

따라서 $p=\frac{1}{4}$이고, $\mathrm{E}(X)=4$, $\mathrm{V}(X)=3$이다.

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2$ 이므로 $\mathrm{E}(X^2)=19$

6) [정답] ④ (출제자 : 14고정민)

[출제의도] 직선의 방정식과 평면의 방정식의 성질을 알고 있는가?

[해설]

평면의 방정식이 $3x-2y+2z+1=0$이므로 이 평면의 법선벡터는 $(3,-2,2)$이다. 따라서 평면과 수직인 직선의 방향벡터는 또한 $(3,-2,2)$이다.

한편, 이 직선이 점 $(2,2,1)$을 지나므로 직선의 방정식은

$\frac{x-2}{3}=\frac{2-y}{2}=\frac{z-1}{2}$이다. 또한, 점 $(-1,a,b)$을 지나므로,

$\frac{-1-2}{3}=\frac{2-a}{2}=\frac{b-1}{2}$이다. 따라서 $a=4, b=-1$이고 $a+b=3$이다.

7) [정답] ② (출제자 : 14서재현)

[출제의도] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

문제에 의해 점 A와 B를 나타내면 각각 $(k,4^k)$, $(k,2^k)$이다.

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$이므로, 점 P의 x좌표는 0, y좌표는 점 A와 B의 중점인 $\frac{4^k+2^k}{2}$이다. 따라서 $f(k)=\frac{4^k+2^k}{2}$이다.

$\frac{4^k+2^k}{2}=10$이므로 $2^k=t\ (t>0)$으로 치환해서 풀면,

$t^2+t=20$, $t=-5$ or $t=4$

$t>0$이므로 $t=4$

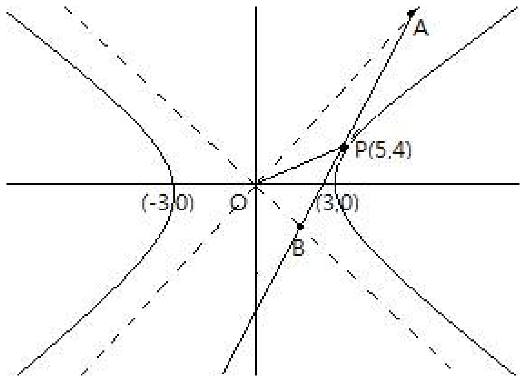
$2^k=4$이므로 $k=2$

8) [정답] ③ (출제자 : 13김단비)

[출제의도] 쌍곡선의 점근선과 쌍곡선 위의 한 점에서 접선을 구할 수 있는가?

[해설]

문제에 주어진 조건을 이용하여 그래프를 그리면 다음과 같은 그림이 된다.



$\triangle OPA + \triangle OPB = \triangle OAB$이므로 $\triangle OPA$와 $\triangle OPB$의 높이는 같다.

즉, $\dfrac{\triangle OPB}{\triangle OPA} = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$이다.

이때, $P(5,4)$에서의 접선방정식은 $\dfrac{5}{9}x - \dfrac{4}{9}y = 1$이므로,

점 P의 접선방정식과 두 점근선 $y = x$, $y = -x$가 만나는 점은 $A(9,9)$, $B(1,-1)$이다. 따라서 $\overline{PA} = \sqrt{(9-5)^2 + (9-4)^2} = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{31}$

$\overline{PB} = \sqrt{(1-5)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{31}$ 이므로

$\dfrac{\triangle OPB}{\triangle OPA} = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = 1$이다.

[별해]

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$위의 점 P에서의 접선이 점근선과 만나는 교점을 A, B라고 하면 $\overline{PA} = \overline{PB}$이다. 이 때 $\triangle OPA$와 $\triangle OPB$의 높이가 같으므로

$\dfrac{\triangle OPB}{\triangle OPA} = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = 1$

9) [정답] ⑤ (출제자 : 13안정혁)

[출제의도] 중복조합의 개념의 알고 있으며, 음이 아닌 정수라는 점에서 0을 생각할 수 있는가?

[해설]

$a \le b \le 4 \le c < d \le e \le 10$을 두 부분으로 나누는 것을 생각한다.

$a \le b \le 4$와 $4 \le c < d \le e \le 10$으로 각각 생각하면

(1) $a \le b \le 4$는 음이 아닌 정수이므로 $0 \le a \le b \le 4$으로 생각 할 수 있다.

→5의 숫자 중에서 중복을 허락하여 2개만 뽑는 경우의 수 $\therefore {}_5H_2$

(2) $4 \le c < d \le e \le 10$은 c와 d사이에 부호가 다르므로 약간의 변형을 하면

→$4 \le c \le d-1 \le e-1 \le 10-1$과 같은 의미를 지닌다.

5개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 3개만 뽑는 경우의 수 $\therefore {}_6H_3$

$\therefore {}_5H_2 \times {}_6H_3 = {}_6C_2 \times {}_8C_3 = 840$

☺ 9번과 같이 풀면 좋은 문제들 ☺

✎ 2014학년도 9월 평가원

10. $3 \le a \le b \le c \le d \le 10$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [3점]

① 240 ② 270 ③ 300 ④ 330 ⑤ 360

✎ 2014학년도 수능

9. 숫자 1, 2, 3, 4에서 중복을 허락하여 5개를 택할 때, 숫자 4가 한 개 이하가 되는 경우의 수는? [3점]

① 45 ② 42 ③ 39 ④ 36 ⑤ 33

10) [정답] ① (출제자 : 10최원재)

[출제의도] 조건을 만족시키는 일반항 $\{a_n\}$을 구할 수 있는가?

[해설] 주어진 식에서 $n=1$을 대입하면 $3a_1 = 4a_1 - 4^2$에서 $a_1 = 16$

주어진 식에서 n대신에 $n+1$을 대입하면

$3\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 4a_{n+1} - 4^{n+2}$ … ㉠

㉠에서 주어진 식 $3\sum_{k=1}^{n} a_k = 4a_n - 4^{n+1}$을 빼면

$3a_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n - 3 \cdot 4^{n+1}$이므로

$a_{n+1} = 4a_n + \boxed{3 \cdot 4^{n+1}}$

양변을 4^{n+1}으로 나누면 $\dfrac{a_{n+1}}{4^{n+1}} = \dfrac{a_n}{4^n} + 3$

$b_n = \dfrac{a_n}{4^n}$이므로 $b_1 = \dfrac{a_1}{4} = 4$ $(\because a_1 = 16)$ 이고, $b_{n+1} = b_n + 3$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 4이고 공차가 3인 등차수열 이므로

$b_n = \boxed{3n+1}$이다.

$\dfrac{a_n}{4^n} = 3n+1$에서 $\therefore a_n = \boxed{4^n(3n+1)}$

$f(n) = 3 \cdot 4^{n+1}$, $g(n) = 3n+1$, $h(n) = (3n+1) \cdot 4^n$

$\therefore \dfrac{g(5)h(2)}{f(3)} = \dfrac{16 \times 7 \times 4^2}{3 \times 4^4} = \dfrac{7}{3}$

11) [정답] ③ (출제자 : 10김종인)

[출제의도] 무리방정식을 해결할 수 있는가?

[해설]

$f(x) - x = t$로 치환하면 $\sqrt{t} = 2t - 1$

양변을 제곱하여 정리하면 $4t^2 - 5t + 1 = 0$이므로 $(4t-1)(t-1) = 0$

$\therefore t = 1$ 또는 $t = \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{1}{4}$는 무연근이므로 $t = 1$

따라서 $f(x) = x + 1$이다.

두 함수 $y = f(x)$와 $y = x + 1$의 교점을 구하면 3개이므로, 답은 3

12) [정답] ④ (출제자 : 14황인호)

[출제의도] 수열이 수렴할 때, 그 중간값의 여부를 판단할 수 있는가?

[해설]

ㄱ. (참)

$S_n = \frac{1}{2}nh_n$이므로 $h_n = \frac{2S_n}{n}$이다. 따라서 $n \to \infty$일 때, h_n은 0로 수렴한다.

ㄴ. (거짓)

$n=6$ 일 때 S_n이 9임이 불확실하므로 $h_6 = 3$인지 알 수 없다.

ㄷ. (참)

이등변삼각형의 나머지 두변의 길이를 a_n이라 하자. 피타고라스 정리에 의해 $a_n^2 = h_n^2 + (\frac{1}{2}n)^2$ 이고, 세변의 길이의 합이 $2a_n + n$ 이므로 내접원의 성질을 이용하면 $r_n \times (2a_n + n) = 2S_n = nh_n$ 이다.

정리하면 $\frac{h_n}{r_n} = \frac{2a_n + n}{n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2a_n + n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{(\frac{1}{2}n)^2 + h_n^2} + n}{n}$$

$\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n} = 2$

[별해]

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ 이므로 a_n은 극한으로 갈수록 $\frac{1}{2}n$과 가까워진다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2a_n + n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+n}{n} = 2$

13) [정답] ⑤ (출제자 : 10최원재)

[출제의도] 주어진 도형에서 회전체의 부피를 구할 수 있는가?

[해설]

$a=2$ 일 때, 타원 $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$을 y축 방향으로 회전 시킨 회전체의 부피

$$V = \pi\int_{-1}^{1}(16 - 16y^2)dy = 2\pi\left[16y - \frac{16}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{64}{3}\pi$$

14) [정답] ② (출제자 : 10최원재)

[출제의도] 일차변환에 의해 옮겨진 도형의 자취를 구할 수 있는가?

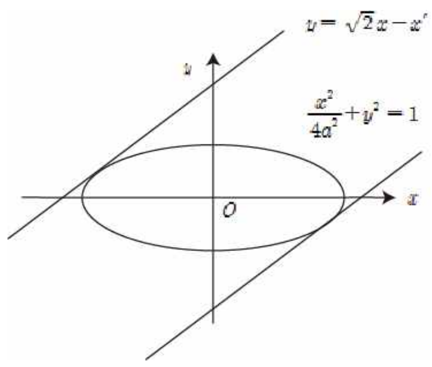
[해설]

곡선 C위의 점 (x, y)가 옮겨진 점을 (x, y')이라고 하면

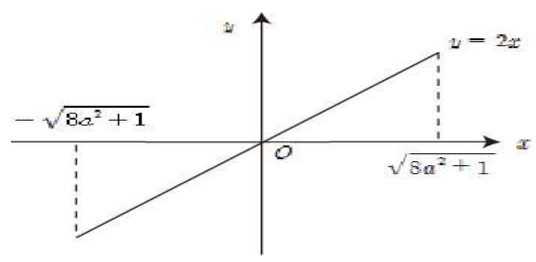
$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 2\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$에서 $\begin{cases} x' = \sqrt{2}x - y \\ y' = 2\sqrt{2}x - 2y \end{cases} \to y' = 2x'$

점 (x, y)는 타원 $\frac{x^2}{4a^2} + y^2 = 1$ 위를 움직이므로

$y = \sqrt{2}x - x'$에서 x'의 값의 범위를 구해야 한다.



기울기가 $\sqrt{2}$인 타원의 접선의 방정식은 $y = \sqrt{2}x \pm \sqrt{8a^2+1}$ 이므로 $-\sqrt{8a^2+1} \le x' \le \sqrt{8a^2+1}$



따라서 $y = 2x(-\sqrt{8a^2+1} \le x \le \sqrt{8a^2+1})$인 도형은 선분이고, 선분의 길이 $2\sqrt{5}\sqrt{8a^2+1} = 14\sqrt{5}$이므로

$a = \sqrt{6}$ ($\because a > 0$)

[별해]

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 2\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에서 $x' = \sqrt{2}x - y$이므로 x'의 범위는

코시-슈바르츠 부등식 ($(a^2+b^2)(x^2+y^2) \ge (ax+by)^2$)에 의하여

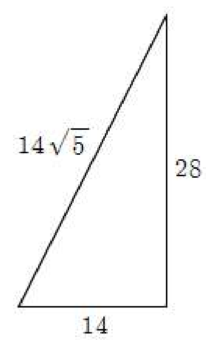
$((2\sqrt{2}a)^2 + 1^2)\left(\left(\frac{x}{2a}\right)^2 + y^2\right) \ge (\sqrt{2}x + y)^2$

$\Rightarrow (8a^2+1) \ge (\sqrt{2}x + y)^2$

$\Rightarrow (x')^2 \le 8a^2 + 1$

$\Rightarrow -\sqrt{8a^2+1} \le x' \le \sqrt{8a^2+1}$

이다. $2\sqrt{8a^2+1} = 14$이므로 $\therefore a = \sqrt{6}$



15) [정답] ④ (출제자 : 10김종인)

[출제의도] 주어진 함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

[해설]

$\frac{f'(x) - f(x)}{e^x} = \left\{\frac{f(x)}{e^x}\right\}' = 3x^2$

$\to \frac{f(x)}{e^x} = x^3 + C$ (단, C는 상수)

함수 $f(x)$는 $(0, 0)$을 지나므로 $x = 0$을 대입하면 $C = 0$임을 알 수 있다.

따라서 $f(x) = x^3e^x$

$f'(x) = x^2e^x(3+x) = 0 \to x = -3$에서 극솟값을 가진다.

$f(-3) = -27e^{-3}$이므로 $a = -27, b = -3$

$\therefore ab = 81$

16) [정답] ③ (출제자 : 09서호성)

[출제 의도] 무한등비급수와 기하와의 연계문제에서 원의 할선정리를 알고, 적용할 수 있는가?

[해설]

먼저 우리가 구해야 하는 것은, 원 O_2의 지름 $\overline{A_1C_1}$이다.

$\overline{A_1C_1}$을 t로 놓으면, $\overline{A_1C_1}:\overline{B_1C_1}=1:2$이이므로 $\overline{B_1C_1}$은 $2t$이다.

할선정리에 의해 $\overline{A_1B_1}\times\overline{B_1C_1}=(\overline{B_1P_1})^2$이므로 $\overline{B_1P_1}=\sqrt{6}t$

$\angle A_1P_1B_1=90^\circ$ 이므로 피타고라스 정리에 의해 $t=\sqrt{\frac{4}{3}}$

따라서 원 O_2의 반지름의 길이는 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이다.

길이의 비가 $1:\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로, 넓이의 비는 $1:\frac{1}{3}$이다.

$a_n=S_{2n-1}+S_{2n}$ $(n\geq 1)$이라 하면, 수열 $\{a_n\}$은

$a_1=S_1+S_2=\pi+\frac{1}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$ 이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

무한등비급수의 공식을 사용하면 $\dfrac{\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{3}}=2\pi$

그러므로 답은 2π다.

[별해] 할선정리를 쓰지 않고 푸는 방법

선분 C_1P_1을 그어보면, 각 $A_1C_1P_1$은 원주각이므로 직각이다.

그러므로 삼각형 $A_1B_1P_1$과 $A_1C_1P_1$은 닮음이다. 그 후 마찬가지로,

$\overline{A_1C_1}$을 t로 두고 풀면 똑같은 답이 나온다.

[출제자의 말]

대부분의 학생들은 고등학교 때 배우는 '사인 코사인 법칙'이나, '호의 길이' 같은 개념들은 잘 숙지하고 있지만, 중학교 때 배웠던 '할선정리'에 대해서는 그렇지 않다. 하지만 나는 할선정리 역시 원의 중요한 정리 중 하나라고 생각하며, 이 부분은 충분히 빈틈이 될 수 있다고 생각한다. 또한 이런 유형의 문제는 더 많은 기하학적 개념을 알아둘수록 생각하기 좋기 때문에 이 문제를 출제하게 되었다.

17) [정답] ② (출제자 : 10최원재)

[출제의도] 주어진 조건을 활용하고, 정규분포 표를 보고 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

(가)

$E(Y)=2E(X)+1=2m$, $\sigma(Y)=2\sigma(X)=\sigma$ 이므로

확률변수 Y는 정규분포 $N(2m,\sigma^2)$을 따른다.

(나)

$P(Y\leq 2m-2)=P(Z\leq \frac{-2}{\sigma})=0.1587$을 만족하려면 $\frac{-2}{\sigma}=-1$

$\therefore \sigma=2$

따라서 $P(2m-1\leq Y\leq 2m+2)=P(2m-\frac{1}{2}\sigma\leq Y\leq 2m+\sigma)$

$=0.1915+0.3413=0.5328$

18) [정답] ② (출제자 : 14서재현)

[출제의도] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있는가?

[해설]

ㄱ. (참)

$a=1$을 대입하면 $f(x)\geq 0$일 때는 $-3\leq x\leq 1, x\geq 2$일 때이다.

따라서 $g(x)=\begin{cases} g_1(x) & (-3\leq x\leq 1, x\geq 2) \\ g_2(x) & (x<-3, 1<x<2)\end{cases}$이다.

$\therefore g(0)=g_1(0)$

ㄴ. (참)

$a=-1$을 대입하면 $f(x)\geq 0$일 때는 $-3\leq x\leq -1, x\geq 2$일 때이다.

따라서 $g(x)=\begin{cases} g_1(x) & (-3\leq x\leq -1, x\geq 2) \\ g_2(x) & (x<-3, -1<x<2)\end{cases}$이다.

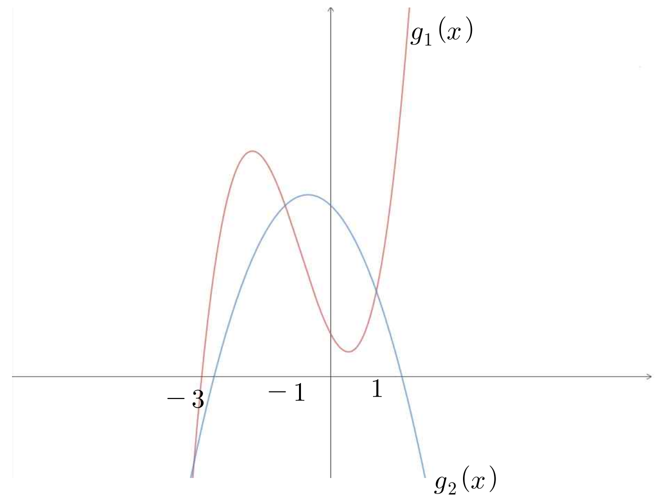
$g(x)$는 $x=-1$에서 연속임을 밝히려면 $\lim_{x\to -1} g(x)=g(-1)$임을 밝히면 된다.

$\lim_{x\to -1+0} g(x)=-2-3+4=-1$, $\lim_{x\to -1-0} g(x)=-1+1-2+1=-1$,

$g(-1)=-1$ 이므로 $\lim_{x\to -1} g(x)=g(-1)$

그러므로 $g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

ㄷ. (거짓)



(1) 함수 $f(x)$의 범위에 따라, 함수 $g(x)$는 어떤 범위에서는 붉은색 그래프가, 나머지 범위에서는 파란색 그래프가 된다.

(2) 함수 $f(x)=(x+3)(x-2)(x-a)$는 실수 a의 값에 따라 부호가 달라진다.

$a\neq 2$일 때, a를 무슨 값으로 잡든 간에 $x=2$에서 $f(x)$값에 부호 변화가 생긴다. $g_1(2)\neq g_2(2)$이므로, 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 이미 불연속점을 가진다.

ㄷ에서 함수 $g(x)$의 불연속점의 개수가 1이 되게 하는 a의 값을 찾고 있으므로, 우리는 $x=2$을 제외한 나머지 x범위에서는 함수 $g(x)$를 연속이게 만드는 a의 값을 찾아야 한다.

다음으로 $f(x)$값이 부호 변화가 생기는 곳이 $x=a$일 때와 $x=-3$일 때이다. 그런데 $x=-3$일 때 부호변화가 생긴다 해도, $g(x)$의 두 그래프를 보면 $x=-3$에서 만나기 때문에 $f(x)$의 부호에 관계없이 $g(x)$는 $x=-3$에서 연속이다.

그러므로 a는 두 함수 $g_1(x)$와 $g_2(x)$의 교점, 즉 $a=-1, 1, -3$이어야 $x=2$를 제외한 나머지 x의 범위에서 함수 $g(x)$가 연속이 된다.

ⅰ) $a=-3$일 경우

$a=-3$일 경우 부등식 $f(x)\geq 0$을 풀면 $x\geq 2, x=-3$이므로,

$g(x)=\begin{cases} g_1(x) & (x\geq 2, x=-3) \\ g_2(x) & (x<-3, -3<x<2) \end{cases}$이다. 범위에 따라 그래프를 그리면 $x=2$를 제외한 나머지 범위에서는 연속인 그래프가 나오게 된다.

ⅱ) $a=-1$일 경우

부등식 $f(x)\geq 0$을 풀면 $-3\leq x\leq -1, x\geq 2$ 이므로

$g(x)=\begin{cases} g_1(x) & (-3\leq x\leq -1, x\geq 2) \\ g_2(x) & (x<-3, -1<x<2) \end{cases}$이다. 범위에 따라 그래프를 그리면 $x=2$를 제외한 나머지 범위에서는 연속인 그래프가 나오게 된다.

ⅲ) $a=1$일 경우,

부등식 $f(x)\geq 0$을 풀면 $-3\leq x\leq 1, x\geq 2$이므로

$g(x)=\begin{cases} g_1(x) & (-3\leq x\leq 1, x\geq 2) \\ g_2(x) & (x<-3, 1<x<2) \end{cases}$이다. 범위에 따라 그래프를 그리면 $x=2$를 제외한 나머지 범위에서는 연속인 그래프가 나오게 된다.

ⅳ) $a=2$일 경우

부등식 $f(x)\geq 0$을 풀면 $x\geq -3$이므로

$g(x)=\begin{cases} g_1(x) & (x\geq -3) \\ g_2(x) & (x<-3) \end{cases}$이다. 이 범위에 따라 그래프를 그리면 모든 x에 대하여 연속인 그래프가 나오게 된다.

따라서 $g(x)$의 불연속점이 하나가 되도록 하는 a값은 $-1, 1, 3$ 즉, 3개다.

19) [정답] ① (출제자 : 13오인수)

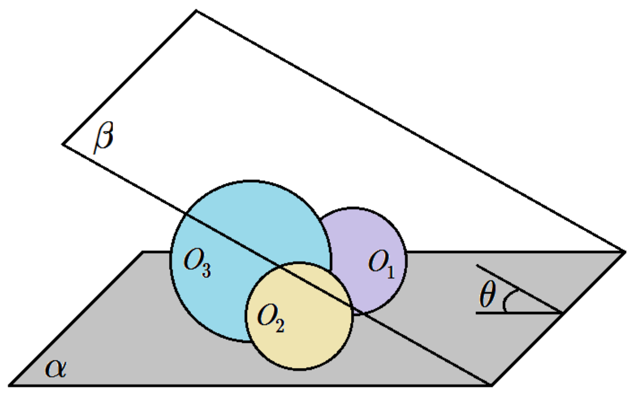
[출제의도] 구의 위치관계를 이해하고, 이면각을 계산할 수 있는가?

[해설]

세 구 O_1, O_2, O_3의 중심을 각각 A, B, C라 하자. 그리고 세 구에 모두 접하는 두 평면을 각각 α, β라 하자.

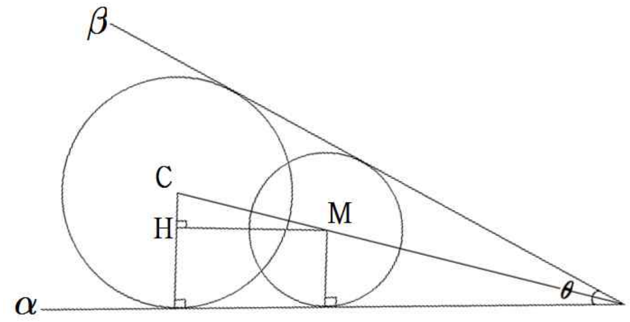
$\mathrm{A}(0,0,0)$, $\mathrm{B}(2, 2\sqrt{3}, 0)$, $\mathrm{C}(4,0,3)$에서

$\overline{\mathrm{AB}}=2+2$, $\overline{\mathrm{BC}}=2+3$, $\overline{\mathrm{CA}}=3+2$이므로 세 구 O_1, O_2, O_3은 서로 외접한다. 따라서 세 구 O_1, O_2, O_3와 두 평면 α, β의 위치관계는 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다.



선분 AB의 중점을 M이라 하면, $\mathrm{M}(1, \sqrt{3}, 0)$이다.

두 평면 α, β에 수직이고 두 점 C, M을 지나는 단면을 나타내면 다음 그림과 같다.



이 때 $\angle\mathrm{CMH}=\frac{\theta}{2}$, $\overline{\mathrm{CM}}=\sqrt{21}$, $\overline{\mathrm{CH}}=1$에서 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{21}}$이므로

$\cos\theta=1-2\sin^2\theta=\frac{19}{21}$이다.

[별해]

$\overline{\mathrm{CM}}$을 구할 때, 점과 점 사이의 거리공식을 사용해서 구할 수도 있고, 삼각형 ABC에서 선분 AB를 밑변, 선분 CM을 높이로 생각하여 $\overline{\mathrm{CM}}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$로 구할 수 있다.

20) [정답] ⑤ (출제자 : 13오인수)

[출제의도] 역행렬의 정의를 알고, 행렬의 성질을 이용해서 주어진 식을 변형하여 문제를 풀어낼 수 있는가?

[해설]

ㄱ. $A^2+3AB=A(A+3B)=2E$에서 역행렬의 정의에 의하여

$A(A+3B)=(A+3B)A=A^2+3BA=2E$가 성립한다.

따라서 $A^2+3AB=A^2+3BA$이므로 $AB=BA$가 성립한다.

(*) $AB=BA$ 즉, 행렬 A와 B에 대하여 교환법칙이 성립하므로 행렬의 전개 및 인수분해가 다항식처럼 자유로워진다.

$(A+B)(A-B)=O$에서 $A^2=B^2$이다.

$A^2+3AB=B^2+3AB=2E$에서 $(B+3A)B=2E$이므로

∴ B의 역행렬이 존재한다. (참)

ㄴ. $A^2B=AAB=ABA=BAB=BAA=BA^2$이므로

$A^2B=BA^2$이 성립한다. (참)

[별해] (*)에 의하여 당연히 성립한다.

ㄷ. [출제자의 말] ㄴ의 모양에서 힌트를 찾는 것을 의도했습니다.

$A^2+3AB=2E$에서 $A^3+3A^2B=2A$ ……㉠ 이 성립한다.

$B^2+3AB=2E$에서 $B^3+3AB^2=2B$……㉡ 이 성립한다.

㉠+㉡을 하면 $A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=2(A+B)$가 성립한다.

(*)에 의하여 $A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=(A+B)^3$이므로

$(A+B)^3=2(A+B)$가 성립한다.

$$\begin{aligned} \therefore\ (A+B)^5 &= (A+B)^3(A+B)^2 \\ &= 2(A+B)(A+B)^2 = 2(A+B)^3 \\ &= 2\cdot 2(A+B) = 4(A+B) \ \text{(참)} \end{aligned}$$

21) [정답] ① (출제자 : 09서호성)

[출제 의도] 도형에 대한 기본적인 지식과 삼각 함수의 각종 정리에 대해 정확히 알고, 식을 세워서 초월함수를 미분할 수 있는가?

[해설]

먼저, $l=r\theta$에 의해 $\angle \mathrm{BOP}=2t$, $\angle \mathrm{AOQ}=4t$라 할 수 있다.

$\angle \mathrm{ABC}$는 $\widehat{\mathrm{AC}}$의 원주각이므로 $\angle \mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{12}$이고,

$\angle \mathrm{BAP}$는 $\widehat{\mathrm{BP}}$의 원주각이므로 $\angle \mathrm{BAP}=t$이다.

$\triangle \mathrm{OAB}$는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로, $\overline{\mathrm{AB}}=1$이다.

$\angle \mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{12}$, $\angle \mathrm{BAP}=t$이므로,

$\angle \mathrm{ADB}=\pi-\left(\dfrac{1}{12}\pi+t\right)=\dfrac{11}{12}\pi-t$이다.

$\triangle \mathrm{ABD}$에 외접하는 원의 반지름 길이를 R이라고 할 때,

$\triangle \mathrm{ABD}$에 사인 법칙을 적용하면

$\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle \mathrm{ADB}}=2\mathrm{R}$에서 $R=\dfrac{1}{2\sin\left(\dfrac{11}{12}\pi-t\right)}$이다.

따라서 우리가 구하는 L은

$L=2\pi R=\dfrac{\pi}{\sin\left(\dfrac{11}{12}\pi-t\right)}$이다.

한편, 점 P와 Q가 처음 만날 때는 $\angle \mathrm{BOP}+\angle \mathrm{AOQ}+\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}=2\pi$이다.

즉, $6t+\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}=2\pi$, $t=\dfrac{\pi}{4}$이다.

t에 대한 L의 변화율을 구하면

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\cos\left(\frac{11}{12}\pi-t\right)}{\sin^2\left(\frac{11}{12}\pi-t\right)}\pi$$

$t=\dfrac{\pi}{4}$일 때, $\dfrac{dL}{dt}=-\dfrac{2}{3}\pi$

[출제자의 말]

삼각함수에 관한 각종 법칙들과 정리, 그리고 잊고 있을 수 있는 원주각에 대해 물어보고 싶었다. 대부분의 학생들이 기하를 다룰 때, 자주 등장하는 코사인 법칙과 삼각함수의 덧셈정리, 배각공식, 반각공식에 대해서는 잘 숙지하고 있으나, 상대적으로 사인 법칙이나, 원주각 등은 잘 숙지하지 못하는 경우가 많다. 또한 모든 문제를, 좌표화 시켜서 해석기하로 풀려는 경향이 있는데, 그러한 패러다임을 탈피한다면 기하를 다룰 때 보다 폭넓은 시각을 가질 수 있을 것이라 생각한다. 또한 속력 개념 역시 추가함으로써, 변화율을 구할 수 있는지 역시 알아보고자 했다.

22) [정답] 270 (출제자 : 09이홍구)

[출제의도] 이항계수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

다항식 $(x+3)^5$의 전개식에서 x^2의 계수는 ${}_5C_2 3^3=10\times27=270$이다.

23) [정답] 10 (출제자 : 14황인호)

[출제의도] 확률과 무한등비급수를 연결시킬 수 있는가?

[해설]

이 게임에서 이기려면 두 개의 정사면체의 밑면에 똑같은 숫자가 나와야 하므로 이길 확률은 $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}\times4=\dfrac{1}{4}$ 이고, 질 확률은 $\dfrac{3}{4}$이다.

준우가 먼저 시작할 때, 호성이가 바로 다음 차례에 이길 확률은 $\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}$ 이고, 호성이가 두 번째 던졌을 때 이길 확률은 $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3\times\dfrac{1}{4}$ 이다.

그러므로 호성이가 n번째 던졌을 때 이길 확률은 $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2n-1}\times\dfrac{1}{4}$이다.

따라서 준우가 이길 확률은 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^{2k-1}\times\frac{1}{4}$ 이고,

계산하면 $\dfrac{3}{7}$이 나온다. $\therefore p+q=10$

24) [정답] 29 (출제자 : 14이다운)

[출제의도] 모비율의 추정을 할 수 있는가?

[해설]

표본비율 $\hat{p}$는 n이 충분히 크므로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\left(\sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

신뢰도 95.44%로 추정하였으므로

$$\mathrm{P}(-2<Z<2)=\mathrm{P}\left(-2<\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}<2\right)=0.9544$$

n이 충분히 클 때에는 p,q대신 $\hat{p},\hat{q}$를 대신 사용해도 무방하므로

$\mathrm{P}\left(\hat{p}-2\sqrt{\dfrac{\hat{p}\,\hat{q}}{100}}\le p\le \hat{p}+2\sqrt{\dfrac{\hat{p}\,\hat{q}}{100}}\right)=0.9544$임을 알 수 있다.

이러한 과정을 통해 모비율을 추정하는 것은 기본개념으로 숙지하고 있기를 바라며 이 문제에서 $\hat{p}=\dfrac{1}{5}$이므로 이를 대입하여 신뢰구간의 길이를 구해보면

$$4\sqrt{\frac{\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}{100}}=\frac{4}{5^2}=\frac{4}{25}\text{이다.}$$

25) [정답] 512 (출제자 : 09이성규)

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 식이 주어진 실생활 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

교체 전의 호스 양 끝의 압력차를 , 교체하려는 호스 양 끝의 압력차를 ΔP_2라 하면, 압력차는 변하지 않으므로 $\Delta P_1=\Delta P_2$이다.

$$\Delta P_1=\frac{8\mu\times2\times Q}{\pi\times2^4}$$

$$\Delta P_2=\frac{8\mu\times8\times Q}{\pi\times a^4}$$

$$\frac{8\mu\times2\times Q}{\pi\times2^4}=\frac{8\mu\times8\times Q}{\pi\times a^4}$$

$$\frac{1}{2^3}=\frac{8}{a^4}$$

$$a^4=2^6 \rightarrow a=2^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \therefore a^6=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^6=2^9=512$$

26) [정답] 15 (출제자 : 09이성규)

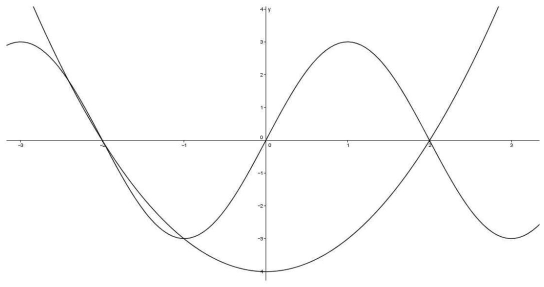
[출제의도] 식이 주어진 함수의 그래프를 그리고, 분수부등식을 풀 때 무연근을 고려할 수 있는가?

[해설]

먼저 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프를 그려보자.

$f(x)$와 $g(x)$가 $x=\pm 2$에서 만나는 것은 쉽게 알 수 있다.

$f(-1)=-3$, $g(-1)=-3$이고 $f(-3)=3$, $g(-3)=5$이다.



한편, 주어진 부등식의 양변에 $\{f(x)\}^2$을 곱하면

$g(x)f(x) \le \{f(x)\}^2$

$\{g(x)-f(x)\}f(x) \le 0$

$\therefore g(x) \ge f(x),\ f(x)<0$ 또는 $g(x) \le f(x),\ f(x)>0$

(이 때, $f(x)=0$은의 실근은 무연근이다.)

$\therefore -5 \le x < -4,\ -2 < x \le -1,\ 0 < x < 2,\ 2 < x < 4$

따라서 이를 만족하는 정수 x는 -5, -1, 1, 3 이므로,

모든 정수 x의 곱은 15

[별해]

정수해를 구하는 문제이므로 닫힌구간 $[-3,3]$에 속한 정수를 부등식에 직접 대입하여 구하는 방법도 있다. 예를 들어 $x=1$을 대입하면 $\frac{g(1)}{f(1)}=\frac{3}{-3}=-1 \le 1$이므로 $x=1$은 부등식의 해이다. 이 과정은 단순계산이기 때문에 다른 정수에 대해서는 생략한다.

[출제자의 말]

그래프를 그려보면 $x \le -2$인 부분에서 교점이 생기는지 고민할 수 있다. 이 문제는 정수해를 찾는 문제이므로 $x=-3$일 때 $f(x)$와 $g(x)$만 확인하는 것만으로 충분하지만 아래 과정을 통해 좀 더 정확한 그래프를 그릴 수 있다.

x가 -2보다 작을 때 $f(x)$와 $g(x)$ 중 어떤 것이 더 큰지 알아보기 위해 $x=-2$에서의 기울기를 조사해보자.

$f'(x)=\frac{3}{2}\pi\cos\frac{\pi}{2}x$ 이므로 $f'(-2)=-\frac{3}{2}\pi$

$g'(x)=2x$ 이므로 $g'(-2)=-4$

$-\frac{3}{2}\pi \le -4$이므로 x가 2보다 작은 쪽에서 교점이 생기는 것을 알 수 있고, $f(-3)=3$, $g(-3)=5$이므로 교점은 $-3 \le x \le -2$에서 생긴다.

27) [정답] 625 (출제자 : 10김우성)

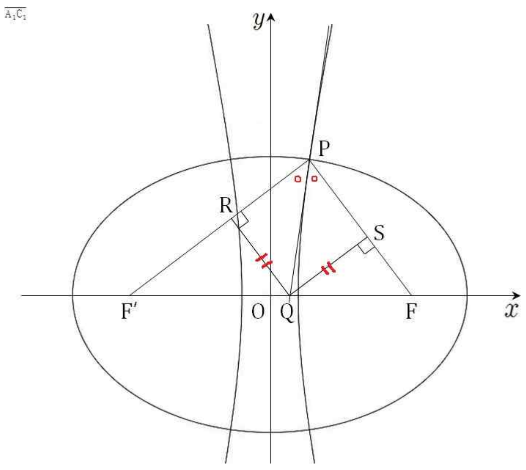
[출제의도] 각 이등분선을 활용할 수 있고 쌍곡선과 타원의 정의를 이해할 수 있다.

[해설]

$\triangle QPR$과 $\triangle QPS$는 RHA합동이므로 $\overline{QR}=\overline{QS}$이다.

타원과 쌍곡선의 정의에 따라 $\overline{PF'}+\overline{PF}=14$, $\overline{PF'}-\overline{PF}=2$ 이므로,

$\overline{PF'}=8$, $\overline{PF}=6$이고, $\overline{F'F}=10$ 이므로 $\triangle PF'F$은 직각삼각형이다.



($\triangle PF'F$의 넓이)=($\triangle PF'Q$의 넓이)+($\triangle PFQ$의 넓이) 에서

$\triangle PF'F=\frac{1}{2}\times\overline{PF'}\times\overline{PF}=\frac{1}{2}\times\overline{PF'}\times\overline{QR}+\frac{1}{2}\times\overline{PF}\times\overline{QS}$

$=\frac{1}{2}(\overline{PF'}+\overline{PF})\overline{QR}$

$\frac{1}{2}\times 8\times 6=\frac{1}{2}\times 14\times\overline{QR}$

$\therefore \overline{QR}=\frac{24}{7}$

$\overline{QR}\times\overline{QS}=(\overline{QR})^2=\frac{576}{49}$

따라서 답은 $576+49=625$

28) [정답] 37 (출제자 : 14고정민)

[출제의도] 사인법칙과 제2 코사인법칙을 활용할 수 있는가?

[해설]

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=\frac{2}{\angle ACB}=\frac{2}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\theta\right)}$이다.

따라서 $\overline{AC}=\frac{2\sin\theta}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\theta\right)}$이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{2\sin\theta}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\theta\right)}\times\sin\frac{\pi}{4}=\frac{2\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\theta\right)}$이다.

한편, 삼각형 ADB에서 제 2 코사인법칙에 의해

$\overline{AD}^2=1+4-2\times 2\times\cos(\pi-\theta)$이므로 $\overline{AD}=\sqrt{5-4\cos(\pi-\theta)}$

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\left(1+2+\sqrt{5-4\cos(\pi-\theta)}\right)\times r(\theta)$

$=\frac{1}{2}\times 2\times 1\times\sin(\pi-\theta)$

따라서 $r(\theta)=\frac{2\sin(\pi-\theta)}{3+\sqrt{5-4\cos(\pi-\theta)}}$

$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{r(\theta)}{S(\theta)}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\dfrac{2\sin(\pi-\theta)}{3+\sqrt{5-4\cos(\pi-\theta)}}}{\dfrac{2\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\theta\right)}}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{2\sin(\pi-\theta)\cdot\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\theta\right)}{2\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}\cdot\left(3+\sqrt{5-4\cos(\pi-\theta)}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{2\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 6}=\frac{1}{6}$$

그러므로 $p=6, q=1$ $\therefore p^2+q^2=37$

29) 〔정답〕 16 (출제자 : 13오인수)

〔출제의도〕 주어진 조건을 바탕으로 도형의 위치관계를 파악하고, 벡터의 내적을 활용하여 구하고자 하는 식의 최댓값을 구할 수 있는가?

〔해설〕

1. 대략적인 위치 파악하기

① 세 점 A_1, A_2, A_3가 점 A_0과 같은 거리에 있으므로 세 점 A_1, A_2, A_3은 중심이 A_0이고, 반지름이 r인 구 O 위에 있다고 할 수 있다.

② 구 O가 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$을 포함하는 평면에 의해 잘린 단면을 원 C라 하자. 원 C는 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$의 외접원이 된다.

③ (가)에서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}$, $\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}$가 서로 수직이므로 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$은 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$을 빗변으로 하는 직각삼각형이 되고, 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$은 원 C의 지름이 된다.

④ (나)에서 $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_k}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3}-\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{3-k}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_k}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_{3-k}\mathrm{A}_3}$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_k}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_{3-k}\mathrm{A}_3}=4\cos\dfrac{3-k}{3}\pi$ $(k=1,2,3)$이다.

$k=1$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}=4\cos\dfrac{2}{3}\pi=-2$

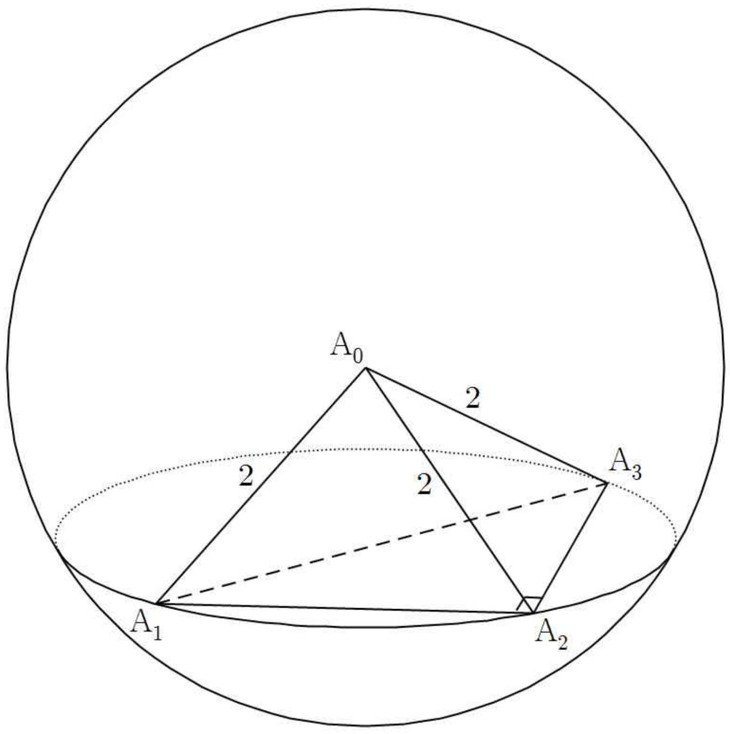
$k=2$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}=4\cos\dfrac{1}{3}\pi=2$

$k=3$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3}=\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3}\right|^2=4$

⑤ $\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3}\right|^2=4$에서 $\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3}\right|=2$이므로

$\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3}\right|=r=2$

①~⑤를 종합하면 네 점 A_0, A_1, A_2, A_3과 구 O, 원 C의 위치관계는 다음 그림과 같다.



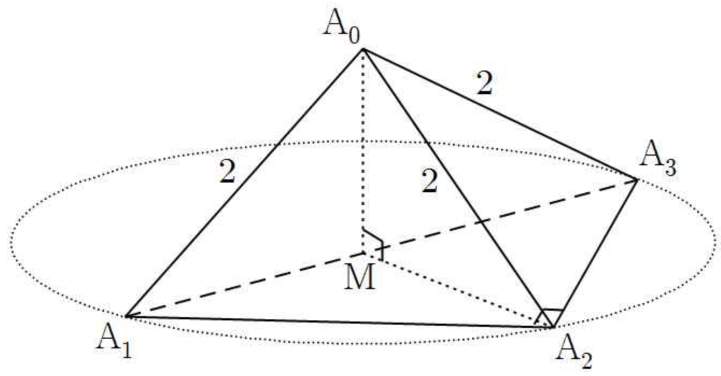
2. 구체적인 위치 파악하기

① $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}=-2$, $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}=2$에서

내적으로 주어진 각각의 두 벡터가 서로 꼬인 위치에 있으므로 단순하게 위치관계를 파악하기에는 어려움이 있다.

따라서 주어진 두 내적을 활용하기 편리하도록 적당히 변형한다.

② 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$은 원 C의 지름이므로 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$의 중점을 M이라 하면 점 M은 원 C의 중심이 된다. 따라서 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{M}}$과 원 C는 서로 수직이다.



③ 이제 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{M}}$과 원 C가 서로 수직이라는 조건을 활용하기위해

$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_k}=\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{M}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}_k}$ 형태로 변형하면

$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}=\left(\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{M}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}_1}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}=\overrightarrow{\mathrm{MA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}=-2$

$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}=\left(\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{M}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}_2}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}=\overrightarrow{\mathrm{MA}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}=2$

$\left(\because\ \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{M}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{M}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}=0\right)$

④ $\overrightarrow{\mathrm{MA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}=-2$, $\overrightarrow{\mathrm{MA}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}=2$에서

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{MA}_1}$과 $\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}$이 이루는 각은 90° 보다 커야하고,

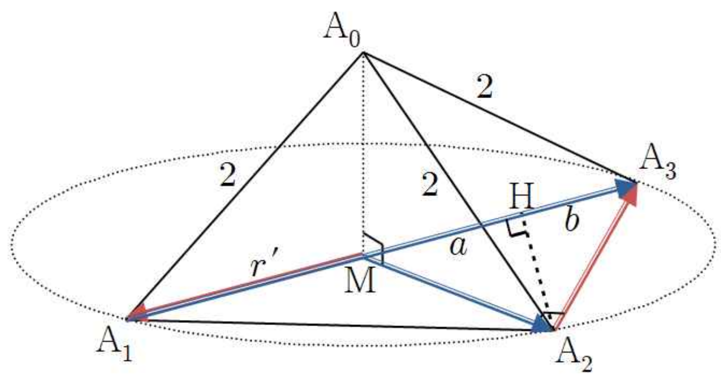
두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{MA}_2}$과 $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}$이 이루는 각은 90° 보다 작아야한다.

따라서 점 A_2는 점 A_1보다 점 A_3에 더 가까이 위치해야하므로

$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}>\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}$이다.

⑤ 점 A_2에서 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원 C의 반지름의 길이를 r'이라 하자.

$\overline{\mathrm{MH}}=a$, $\overline{\mathrm{HA}_3}=b$라 하면 $a+b=r'$이 성립한다.



⑥ 두 벡터의 내적을 정사영 관점에서 해석하면

$\overrightarrow{\mathrm{MA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}=-\overline{\mathrm{MA}_1}\times\overline{\mathrm{HA}_3}=-r'\cdot b=-2 \quad\Rightarrow\quad r'\cdot b=2$

$\overrightarrow{\mathrm{MA}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}=\overline{\mathrm{MH}}\times\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}=a\cdot 2r'=2 \quad\Rightarrow\quad r'\cdot a=1$

두 식을 더하면 $r'(a+b)=3 \Rightarrow (r')^2=3$

$\therefore\ r'=\sqrt{3}$

3. 구하고자 하는 식의 값이 최대가 될 조건 파악하기

① 삼각형 PA_0Q에서 $\angle PA_0Q=\theta$라 하면

$|\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{A_0P}|^2+|\overrightarrow{A_0Q}|^2-2|\overrightarrow{A_0P}||\overrightarrow{A_0Q}|\cos\theta$이므로

$|\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{A_0P}|^2+|\overrightarrow{A_0Q}|^2-2\overrightarrow{A_0P}\cdot\overrightarrow{A_0Q}$이다.

$\therefore\ 2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{A_0P}|^2-|\overrightarrow{A_0Q}|^2$

$=|\overrightarrow{PQ}|^2+\left(|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{A_0P}|^2-|\overrightarrow{A_0Q}|^2\right)$

$=|\overrightarrow{PQ}|^2-2\overrightarrow{A_0P}\cdot\overrightarrow{A_0Q}$

② $|\overrightarrow{PQ}|^2-2\overrightarrow{A_0P}\cdot\overrightarrow{A_0Q}$의 값이 최대가 되기 위해선

$|\overrightarrow{PQ}|$의 값이 최대가 되고, $\overrightarrow{A_0P}\cdot\overrightarrow{A_0Q}$의 값이 최소가 되어야한다.

그런데 $|\overrightarrow{PQ}|$의 값이 커질수록 $|\overrightarrow{A_0P}\cdot\overrightarrow{A_0Q}|$의 값도 같이 커지기

때문에 $\overrightarrow{A_0P}\cdot\overrightarrow{A_0Q}$의 값은 음수이면서 최소가 되어야한다.

③ $\overrightarrow{A_0P}\cdot\overrightarrow{A_0Q}$의 값이 음수이면서 최소가 되려면

일단 $\angle PA_0Q=\theta$가 둔각이면서 최대가 되어야한다.

따라서 점 P, Q는 각각 선분 A_0A_1, A_0A_3 위에서 움직여야하고,

이 때, θ의 값은 $\frac{2}{3}\pi$이다.

④ $|\overrightarrow{PQ}|$의 값이 최대가 되고, $\overrightarrow{A_0P}\cdot\overrightarrow{A_0Q}$의 값이 최소가 되려면

점 P, Q의 위치는 각각 점 A_1, A_3가 되어야한다.

⑤ $|\overrightarrow{A_1A_3}|=2r'=2\sqrt{3}$,

$\overrightarrow{A_0A_1}\cdot\overrightarrow{A_0A_3}=|\overrightarrow{A_0A_1}||\overrightarrow{A_0A_3}|\cos\frac{2}{3}\pi=2\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$ 이므로

⑥ $\therefore\ |\overrightarrow{PQ}|^2-2\overrightarrow{A_0P}\cdot\overrightarrow{A_0Q}$의 최댓값은

$\Rightarrow |\overrightarrow{A_1A_3}|^2-2\overrightarrow{A_0A_1}\cdot\overrightarrow{A_0A_3}$

$=(2\sqrt{3})^2-2\cdot(-2)=16$

☺ 29번과 같이 풀면 좋은 문제들 ☺

✎ 2013학년도 9월 평가원

29. 좌표공간에서 네 점 A_0, A_1, A_2, A_3이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{A_0A_2}|=|\overrightarrow{A_1A_3}|=2$
(나) $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\left(\overrightarrow{A_0A_k}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right)=\cos\frac{3-k}{3}\pi$ $(k=1, 2, 3)$

$|\overrightarrow{A_1A_2}|$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점]

✎ Epsilon모의고사 3회 29번 수정 전 문제

29. 중심이 O이고 반지름이 13인 구 위의 세 점 A, B, C에 대하여 다음 세 조건이 성립한다.

(가) 점 A와 점 C 사이의 거리는 10이다.
(나) 선분 AB와 선분 BC는 서로 수직이다.
(다) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OB}=-14$

이 때, 사면체 O−ABC의 부피를 구하시오. [4점]

[정답] 96

30) [정답] 4 (출제자 : 14이다운)

[출제의도] 정적분의 기본정리를 이용하여 적분으로 정의된 함수를 해석할 수 있는가?

[풀이]

$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$임을 이용하여 함수 $g(x)$를 해석해보자.

보통 정적분의 기본정리를 이용하여 푸는 문제에서는 두 가지를 생각하여야 한다.

첫 번째로는 위끝과 아래끝이 같은 경우 $F(x)$가 0이 되는 x를 구할 수 있다는 것과

두 번째로는 $f(x)$가 연속일 때, $F(x)$의 미분한 함수를 구할 수 있다는 것이다.

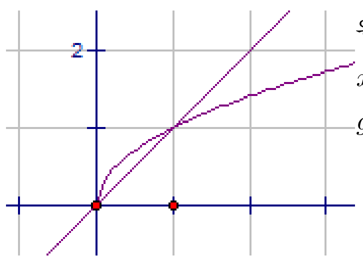
($F(x)=\int_a^x f(t)dt$ → $F'(x)=f(x)$)

먼저 위끝과 아래끝이 같은 경우를 보면

$x=\sqrt{x}$인 경우 즉, $x=0, 1$두 가지 경우가 있다.

따라서 $g(0)=g(1)=0$이다.

또한



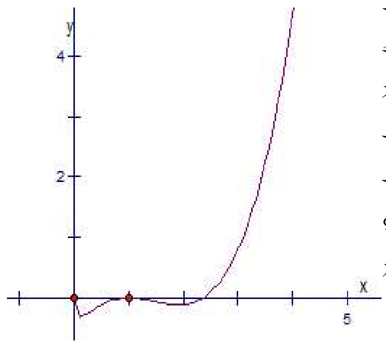
왼쪽 그래프와 같이 $0<x<1$에서 $x<\sqrt{x}$이고 $f(x)>0$이므로 $g(x)<0$임을 알 수 있다.

다음으로 $g'(x)=f(x)-\dfrac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$이고 $f(1)=0$이므로 $g'(1)=0$이다.

즉, 찾아낸 조건들을 다시 적어보면

$g(0)=g(1)=0$, $0<x<1$에서 $g(x)<0$, $g'(1)=0$

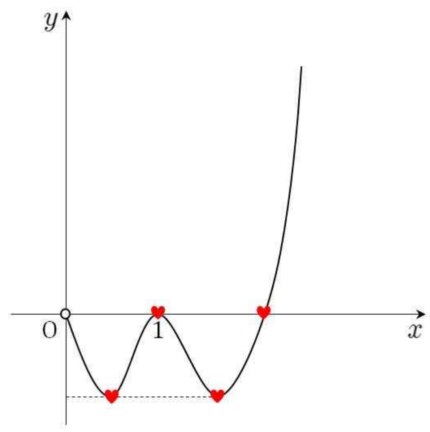
그런데 $x>1$이후에 $x=2$이면 $g(x)<0$이고 $x>4$이면 $g(x)>0$이므로 $g(x)$의 개형을 그릴 수 있다.



왼쪽과 같은 그래프가 나올 것임을 유추할 수 있는데 함수 $f(x)$의 y절편과 극솟값이 정해지지 않은 변수이므로 함수 $g(x)$의 극솟값이 몇 개가 될지 알 수 없고 그 극솟값들이 같을지 다를지도 알 수가 없다. 따라서 그래프의 경우가 여러 개임을 알 수 있다.

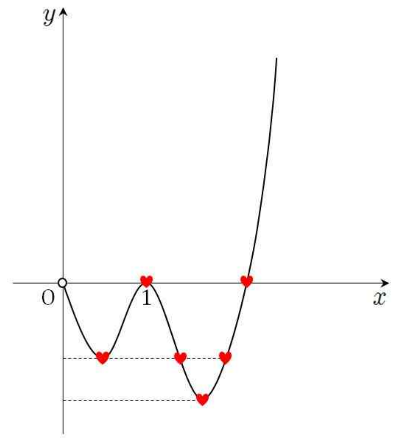
그런데 그 많은 경우 중에서 $h(k)$의 불연속점의 개수가 최소가 되는 경우를 생각해보자.

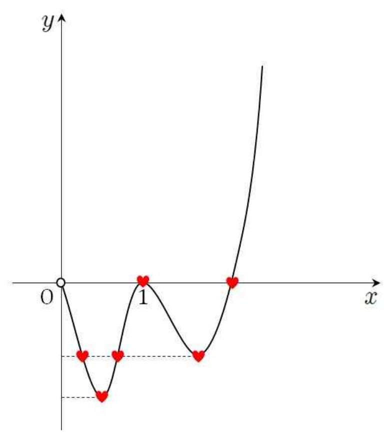
① 먼저 극솟값이 $0<x<1$와 $1<x<\alpha$에서 한 개씩만 가지고 있는 경우를 생각해 보자. (α는 $g(x)=0$의 근 중에서 $0, 1$이 아닌 값)



그림과 같이 극솟값이 같은 경우에 $|g(x)-g(k)|$가 미분불가능 하도록 만드는 k의 값은 ♥표시한 4개의 값을 가지는 경우이다.

② 극솟값이 다른 경우를 생각해보자.





그림과 같이 극솟값이 다른 경우에 $|g(x)-g(k)|$가 미분불가능 하도록 만드는 k의 값은 ♥표시한 6개의 값을 가지는 경우이다.

만약 극솟값이 $0<x<1$와 $1<x<\alpha$구간에서 한 개 이상의 극솟값을 갖게 된다면 그래프가 더 구불구불할 것이고 그렇게 되면 $|g(x)-g(k)|$가 미분불가능하게 만드는 k값이 많아지게 됨을 알 수 있다.

따라서 최솟값은 4개다.

☺ 30번과 같이 풀면 좋은 문제들 ☺

✎ 2011학년도 수능

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$S=\{a \mid$ 함수 $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않다.$\}$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

2014년 10월 11일 시행
Epsilon 모의고사 3회

출제자 : 성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon
09학번 : 서호성 이성규 이홍구
10학번 : 김우성 김준우 최원재
12학번 : 양한솔
13학번 : 김단비 김찬호 안정혁 오인수 오현주
14학번 : 고정민 서재현 이다운 황인호

편집 : 13학번 오인수, 14학번 김민지,
13학번 김찬호, 13학번 오현주

검토위원 :
학회 Epsilon