정답과 해설

3회차 정답표

1. ②	2. ③	3. ④	4. ②	5. ④
6. ④	7. ③	8. ①	9. ③	10. ②
11. ⑤	12. ②	13. ④	14. ①	15. ①
16. ⑤	17. ⑤	18. ③	19. ③	20. ①
21. ③	22. 20	23. 4	24. 164	25. 792
26. 50	27. 24	28. 10	29. 10	30. 13

1. 정답 : ②

$A+2E=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a & 5 \end{pmatrix}$이므로 (모든 성분의 합)$=a+10=12$

이고 따라서 $a=2$

2. 정답 : ③

$y=e^x-e^{-x}$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$\int_{-2}^{2}\left(e^x-e^{-x}\right)dx=0$

3. 정답 : ④

$$\frac{|2+1+2+7|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{12}{3}=4$$

4. 정답 : ②

주어진 그래프를 나타내는 행렬은 7×7행렬이고 그 성분 중 1의 개수는 변의 개수의 두 배이므로 18개다. 따라서

(0의 개수)$=49-$(1의 개수)$=31$

5. 정답 : ④

주어진 다항식을 나열하면 각 항은 다음과 같이 주어진다.

$${}_{10}\mathrm{C}_k(x^2)^k\left(-\frac{1}{x}\right)^{10-k}={}_{10}\mathrm{C}_k(-1)^{10-k}x^{3k-10}\ \left(k=0,1,\cdots,10\right)$$

따라서 x^2앞의 계수는 $k=4$일 때의 ${}_{10}\mathrm{C}_4=210$

6. 정답 : ④

수열 $\{a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이고 $a_8=8$이므로 $a_n=2^{n-5}$

$b_6\times b_{10}=(a_8-a_6)\times(a_{12}-a_{10})$

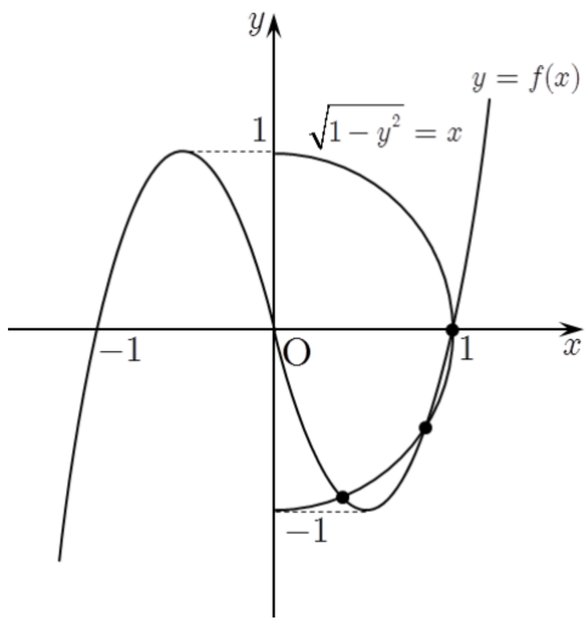
$\quad=(8-2)\times(128-32)=6\times96=576$

7. 정답 : ③

무리방정식 $\sqrt{1-\{f(x)\}^2}=x$의 실근은 연립방정식

$\begin{cases} y=f(x) \\ \sqrt{1-y^2}=x \end{cases}$를 만족하는 x값이다.

$\sqrt{1-y^2}=x \Leftrightarrow x^2+y^2=1$, $x\geqq0$ 이므로 아래 그림에서 주어진 무리방정식의 실근의 개수는 3개임을 알 수 있다.



8. 정답 : ①

주어진 조건을 수식에 대입하면 다음과 같다.

$$\log32=3\log2+k\log\frac{1200}{300},\ \log128=3\log2+k\log\frac{a}{300}$$

$$k\log\frac{1200}{300}=\log4,\ k\log\frac{a}{300}=\log16$$

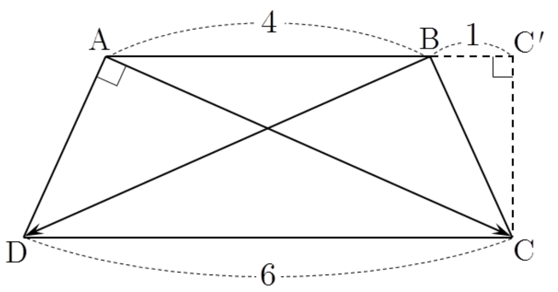
이제 두 식을 서로 나누면 $\dfrac{\log\frac{a}{300}}{\log4}=2$이고 따라서

$\log\frac{a}{300}=\log16 \Rightarrow \frac{a}{300}=16 \Rightarrow a=4800$

9. 정답 : ③

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$이므로 두 선분 AD, AC는 서로 직교한다. … ㉠

사각형 ABCD가 등변사다리꼴이므로 점 C에서 직선 AB로 내린 수선의 발을 C′이라 할 때, $\overline{BC'} = 1$ …… ㉡



$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA}$ ($\because$ ㉠)

$= (\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'C}) \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BA}$

$= -|\overrightarrow{AC'}||\overrightarrow{BA}| = -20$ ($\because$ ㉡)

10. 정답 : ②

함수 $f(x)g(x)$가 불연속일 가능성이 있는 점은 $x=0, 1, 3$뿐이다.

이제 함수 $f(x)g(x)$의 연속성에 의하여

$$\begin{cases} \lim_{x\to -0} f(x)g(x) = 0 \cdot g(0) = 0 \\ \lim_{x\to +0} f(x)g(x) = 1 \cdot g(0) = g(0) \\ f(0)g(0) = g(0) \end{cases} \Rightarrow \ g(0) = 0$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 1-0} f(x)g(x) = 1 \cdot g(1) = g(1) \\ \lim_{x\to 1+0} f(x)g(x) = 2 \cdot g(1) = 2g(1) \\ f(1)g(1) = 2g(1) \end{cases} \Rightarrow \ g(1) = 0$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 3-0} f(x)g(x) = 0 \cdot g(3) = 0 \\ \lim_{x\to 3+0} f(x)g(x) = 0 \cdot g(3) = 0 \\ f(3)g(3) = g(3) \end{cases} \Rightarrow \ g(3) = 0$$

이고 따라서 $g(0) = g(1) = g(3) = 0$이다.

ㄱ. $g(0) = 0$ ($\therefore$ 참)

ㄴ. $g(0) = g(1) = g(3) = 0$ ($\therefore$ 참)

ㄷ. $g(x) = 0$은 $g(0) = g(1) = g(3) = 0$을 만족하며 그래프가 직선이다. ($\therefore$ 거짓)

11. 정답 : ⑤

ㄱ. 주어진 조건에 의하여 $ABA - A = (AB - E)A = 2E$ 이고 따라서 $AB - E$의 역행렬은 $\frac{1}{2}A$이다. ($\therefore$ 참)

ㄴ. 주어진 두 번째 조건에 의하여 $B(AB - E) = 4E$ 이고 따라서 $AB - E$의 역행렬은 $\frac{1}{4}B$이다. 이제 ㄱ.에 의하여 $\frac{1}{2}A$와 $\frac{1}{4}B$는 $AB - E$의 역행렬로써 서로 같다. 즉, $2A = B$ ($\therefore$ 참)

ㄷ. ㄴ. 에 의하여 $2A^2 = AB,\ 2A^2 = BA$이므로 $AB = BA$ ($\therefore$ 참)

12. 정답 : ②

$$\boxed{(가)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}{2} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n}{2}$$

이므로 (가)에 알맞은 식은 $f(n) = \frac{n}{2}$이다.

$$\boxed{(나)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{1} - \sqrt{0}\right) + \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \cdots + \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{2}$$

이므로 (나)에 알맞은 식은 $g(n) = \frac{\sqrt{n}}{2}$이다.

$$\boxed{(다)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\boxed{(가)}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

이므로 (다)에 알맞은 값은 $p = \frac{1}{2}$이다.

따라서 $\log_2 f(p) + \log_2 g(p) = \log_2 \frac{1}{4} + \log_2 \frac{1}{2\sqrt{2}} = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$

13. 정답 : ④

$f(x) = a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\alpha)$

$$\left(\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{a^2+b^2} = 4$이고 따라서 $a^2+b^2 = 16$이다. 산술・기하 평균 부등식에 의하여

$16 = a^2 + b^2 \geqq 2\sqrt{a^2b^2} = 2|ab|$ (등호는 $a^2 = 8,\ b^2 = 8$일 때 성립)

이고 $|ab|$의 최댓값은 8이다.

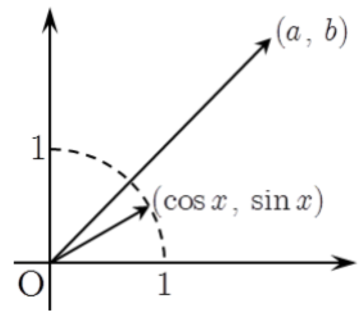
14. 정답 : ①

벡터의 내적을 이용해 다음과 같이 함수 $f(x)$를 이해하자.

$$f(x)=a\cos x+b\sin x=(a,\,b)\cdot(\cos x,\,\sin x)\quad\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$$

(1) $(a,\,b)\in$ 제 1사분면

$(\cos x,\,\sin x)$는 크기가 1인 벡터이므로 벡터 $(a,\,b)$와 같은 방향을 가질 때, $f(x)$가 최대가 되고 그 최댓값은 $\sqrt{a^2+b^2}$이다. 따라서 $a^2+b^2=25$



(2) $(a,\,b)\in$ 제 2사분면

두 벡터 $(\cos x,\,\sin x)$, $(a,\,b)$의 크기가 일정하므로 이루고 있는 각도가 가장 작을 때 $f(x)$는 최댓값을 가진다. 따라서 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=b$이다. 즉, $b=5$

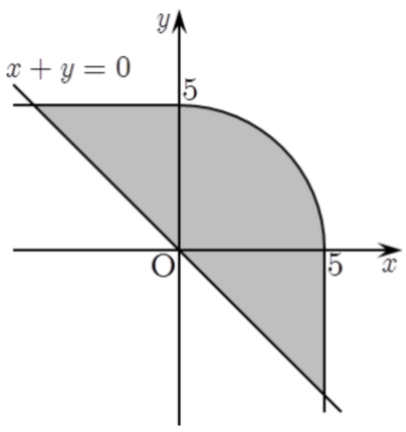
(3) $(a,\,b)\in$ 제 3사분면

두 벡터 $(\cos x,\,\sin x)$, $(a,\,b)$는 항상 둔각을 이루므로 $f(x)$값은 음수이고 따라서 최댓값은 5가 될 수 없다.

(4) $(a,\,b)\in$ 제 4사분면

두 벡터 $(\cos x,\,\sin x)$, $(a,\,b)$의 크기가 일정하므로 이루고 있는 각도가 가장 작을 때 $f(x)$는 최댓값을 가진다. 따라서 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)=a$이다. 즉, $a=5$

(1), (2), (3), (4)에 의해서 곡선 C와 직선 $x+y=0$이 이루는 도형의 넓이는 오른쪽 그림과 같이 $25+\frac{25}{4}\pi$이다.



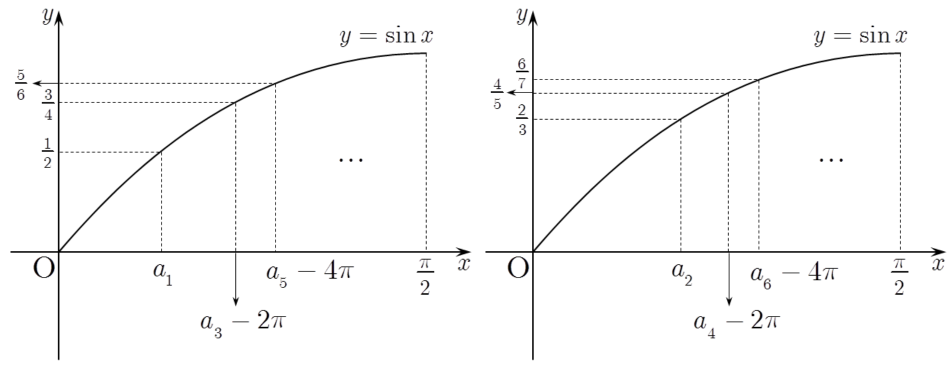
15. 정답 : ①

직선 $y=\frac{n}{n+1}$은 n이 커지면 점점 $y=1$로 가까워지며 올라간다.

따라서 아래 두 수열은 모두 $\frac{\pi}{2}$로 수렴한다.

$$a_1,\ a_3-2\pi,\ a_5-4\pi,\ a_7-6\pi,\ \cdots,\ a_{2n-1}-2\pi(n-1),\ \cdots$$

$$a_2,\ a_4-2\pi,\ a_6-4\pi,\ a_8-6\pi,\ \cdots,\ a_{2n}-2\pi(n-1),\ \cdots$$



$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_{2n-1}-2\pi(n-1)}{n}+\frac{a_{2n}-2\pi(n-1)}{n}+\frac{4\pi(n-1)}{n}\right\}$$

$$=0+0+4\pi=4\pi$$

16. 정답 : ⑤

$\overline{\mathrm{BC}}=a(t)$, $\overline{\mathrm{CA}}=b(t)$라 하면 $a(t)b(t)=100$ …… ㉠

㉠을 시간에 대하여 미분하면 $a(t)b'(t)+a'(t)b(t)=0$ … ㉡

시간 $t=t_0$를 $a'(t_0)+b'(t_0)=0$인 시간이라 정의한 후 ㉡에 $t=t_0$를 대입하면 $a(t_0)b'(t_0)+a'(t_0)b(t_0)=0$이고 $b'(t_0)=-a'(t_0)\ne0$이므로 양 변을 $a'(t_0)$로 나누어 $a(t_0)-b(t_0)=0$을 얻는다. 이제 ㉠에 의하여 $a(t_0)=10,\,b(t_0)=10$ …… ㉢

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{a(t)^2+b(t)^2}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}^2=a(t)^2+b(t)^2$이고 이 식의 양 변을 시간에 대해 미분하면

$2\overline{\mathrm{AB}}\left(\frac{d}{dt}\overline{\mathrm{AB}}\right)=2a(t)a'(t)+2b(t)b'(t)$ 이고 이 식에 $t=t_0$를 대입하면

$$20\sqrt{2}\left(\frac{d}{dt}\overline{\mathrm{AB}}\right)\bigg|_{t=t_0}=20\left\{a(t_0)+b(t_0)\right\}=0\ \Rightarrow\ \left(\frac{d}{dt}\overline{\mathrm{AB}}\right)\bigg|_{t=t_0}=0$$

17. 정답 : ⑤

남학생과 여학생의 비율을 $p:1-p$라 하자. $(0<p<1)$

임의로 뽑은 남학생의 수학점수를 X, 임의로 뽑은 여학생의 수학점수를 Y라 하면

$$X\sim\mathrm{N}(60,\,10^2)\ ,\quad Y\sim\mathrm{N}(65,\,15^2)\ \cdots\cdots\ ㉠$$

이 고등학교 3학년 학생들 중 임의로 뽑은 한 학생의 점수가 80점 이상일 사건을 A, 임의로 뽑은 한 학생이 여학생일 사건을 B라 하면

$$0.96=\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{(1-p)\mathrm{P}(Y\geq 80)}{p\mathrm{P}(X\geq 80)+(1-p)\mathrm{P}(Y\geq 80)}$$
$$=\frac{(1-p)\cdot\mathrm{P}(Z\geq 1)}{p\cdot\mathrm{P}(Z\geq 2)+(1-p)\cdot\mathrm{P}(Z\geq 1)}$$
$$=\frac{0.16(1-p)}{0.02p+0.16(1-p)}=\frac{8-8p}{8-7p}\ \Rightarrow\ p=\frac{1}{4}$$

따라서 남녀 성비는 $\frac{1}{4}:\frac{3}{4}=1:3$

18. 정답 : ③

정육면체를 굴리는 시행을 n번 했을 때, 1이 적힌 면이 위를 보며 놓여있을 확률을 q_n이라 하자.

정육면체를 $n+1$번 굴려서 1이 적힌 면이 바닥을 보고 있기 위해서는 n번 굴렸을 때, 1이 적힌 면이 옆면에 있어야 하고 1이 적힌 옆면 쪽으로 정육면체를 굴려야 한다. 이를 수식으로 나타내면

$p_{n+1}=$(n번째에 1이 옆면에 있을 확률)$\times$(1쪽으로 굴릴 확률)

$$=(1-p_n-q_n)\times\frac{1}{4}\quad(n\geq 1)\ \cdots\cdots\ ㉠$$

마찬가지 방법으로 정육면체를 $n+1$번 굴려서 1이 적힌 면이 위를 보고 있기 위해서는 n번 굴렸을 때, 1이 적힌 면이 옆면에 있어야 하고 1이 적힌 옆면의 반대쪽으로 정육면체를 굴려야 한다. 이를 수식으로 나타내면

$q_{n+1}=$(n번째에 1이 옆면에 있을 확률)$\times$(1의 반대로 굴릴 확률)

$$=(1-p_n-q_n)\times\frac{1}{4}\quad(n\geq 1)\ \cdots\cdots\ ㉡$$

처음에 놓여 있는 정육면체에서 1이 적힌 면이 바닥을 보고 있기 때문에 $p_1=q_1=0$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡에 의하여 $p_{n+1}=q_{n+1}\ (n\geq 1)$이고 ㉢에 의하여 $p_n=q_n\ (n\geq 1)$임을 알 수 있다. 이를 이용해 ㉠을 변형하면

$$p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ p_{n+1}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{6}\right)$$
$$\Rightarrow\ \left|p_{n+1}-\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{2}\left|p_n-\frac{1}{6}\right|$$

이고 따라서 수열 $\left\{\left|p_n-\frac{1}{6}\right|\right\}$은 초항이 $\frac{1}{6}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|p_n-\frac{1}{6}\right|=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

19. 정답 : ③

ㄱ. <반례>

행렬 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$이 나타내는 일차변환 f에 대하여 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{B}(0,2)$은 모두 원점으로 옮겨진다. (∴거짓)

ㄴ. 원점을 지나지 않는 직선 l 위의 서로 다른 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 생각하자. 두 벡터 (x_1, y_1), (x_2, y_2)가 서로 평행 할 수 없으므로 $x_1y_2-x_2y_1\neq 0$ ⋯⋯ ㉠

f를 나타내는 행렬을 A라 하면 조건에 의하여 $A\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$를 만족하고 따라서 $A\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}=O$를 만족한다.

(단, O는 영행렬) 그런데 ㉠에 의하여 행렬 $\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}$는 역행렬을 가지고 $A\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}=O$의 양 변의 오른쪽에 $\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}$의 역행렬을 곱하면 $A=O$이다. (∴참)

ㄷ. <대우명제의 증명>

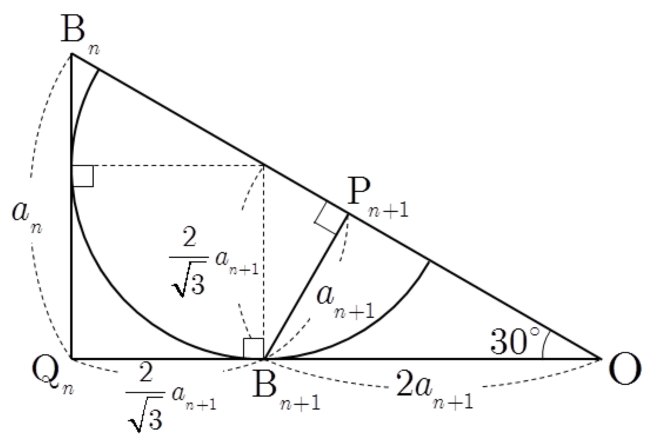
f를 나타내는 행렬이 역행렬을 갖지 않으면 $f(\mathrm{A})$, $f(\mathrm{B})$, $f(\mathrm{C})$는 원점을 지나는 한 직선 위의 점들이므로 삼각형을 이루지 않는다. (∴참)

20. 정답 : ①

삼각형 $\mathrm{B}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{O}$과 그 내부에 그려지는 삼각형 $\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{O}$을 생각하자. 정육각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n$의 한 변의 길이를 $2a_n$이라 하면 아래 그림에서 알 수 있듯이 $a_n:\left(2+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)a_{n+1}=1:\sqrt{3}$

이고 따라서

$$a_{n+1}=\frac{3(\sqrt{3}-1)}{4}a_n,\ a_1=3\ \cdots\cdots\ ㉠$$



위 그림에서 원호의 길이는 반지름이 $\frac{2}{\sqrt{3}}a_{n+1}$, 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴의 호의 길이와 같으므로 도형 K_n을 그릴 때 새롭게 그려지는 호의 길이는 $12\times\frac{2}{\sqrt{3}}a_{n+1}\times\frac{2}{3}\pi=\frac{16\pi\sqrt{3}}{3}a_{n+1}$이다.

$$l_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16\pi\sqrt{3}}{3}a_{n+1}$$

$$=\frac{16\pi\sqrt{3}}{3}\times\frac{\frac{9(\sqrt{3}-1)}{4}}{1-\frac{3(\sqrt{3}-1)}{4}}\ (\because ㉠)$$

$$=\frac{48\pi(6+\sqrt{3})}{11}$$

21. 정답 : ③

(가)에서 주어진 식에 $x=5$를 대입하면 $2f(5)$이므로 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)+f(10-x)=2f(5)$를 만족한다. 그러므로

$y=f(x)$의 그래프는 $(5,f(5))$에 대하여 대칭이다. …… ㉠

(나)에서 주어진 식을 x에 대하여 부정적분하면 다음 등식을 얻는다.

$f(x+10)-f(x)=C$ (C는 상수) …… ㉡

$$\int_{10n}^{10n+10}\{f(x)-x\}dx=\int_0^{10}\{f(x+10n)-x-10n\}dx$$

$$=\int_0^{10}\{f(x)+Cn-x-10n\}dx\ (\because ㉡)$$

$$=10(C-10)n-50+\int_0^{10}f(x)dx$$

이므로 수열 $\left\{\int_{10n}^{10n+10}\{f(x)-x\}dx\right\}$은 등차수열이고 (다)에 의하여 $C=10$, $\int_0^{10}f(x)dx=80$ …… ㉢

그런데 ㉠에 의하여 $y=f(x)$의 그래프는 $(5,f(5))$에 대하여 대칭이고 ㉢의 식은 다음과 같이 해석할 수 있다.

$$80=\int_0^{10}f(x)dx=10f(5)\ \Rightarrow\ f(5)=8\ \cdots\cdots\ ㉣$$

(가)에서 주어진 조건에 $x=0$을 대입하고 ㉡의 식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+f(10)=2f(5)=16$, $f(10)-f(0)=10$

$\Rightarrow f(0)=3$, $f(10)=13$ …… ㉤

$$\int_0^{10}xf'(x)dx=\Big[xf(x)\Big]_{x=0}^{x=10}-\int_0^{10}f(x)dx$$

$$=10f(10)-80\ (\because ㉢)$$

$$=130-80\ (\because ㉤)=50$$

22. 정답 : 20

$$\lim_{n\to\infty}2n\sin\frac{10}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\sin\frac{10}{n}}{\frac{10}{n}}\times 20\right\}=20$$

23. 정답 : 4

확률밀도함수의 정의에 따라 $\int_0^9 f(x)dx=\frac{1}{2}\times 9\times f(3)=1$을 만족하고 따라서 $f(3)=\frac{2}{9}$이다. $y=f(x)$의 그래프는 선분으로 이루어져 있으므로 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases}(0\leq x\leq 3) & \frac{2}{27}x\\(3\leq x\leq 9) & \frac{1}{3}-\frac{1}{27}x\end{cases}$$

$$\mathrm{E}(X)=\int_0^9 xf(x)dx=\int_0^3\frac{2}{27}x^2dx+\int_3^9\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{27}x^2\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}+12-\frac{26}{3}=4$$

24. 정답 : 164

f는 원점을 중심으로 하는 90° 회전변환이므로 쌍곡선 C의 초점은 쌍곡선 $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{15}=1$의 초점을 f로 옮긴 점이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{15}=1$의 초점이 $(8,0)$, $(-8,0)$이므로 쌍곡선 C의 초점은 $(0,8)$, $(0,-8)$이고 이 두 점이 타원 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 초점이므로 $b^2>100$, $b^2-100=64$이다. 따라서 $b^2=164$

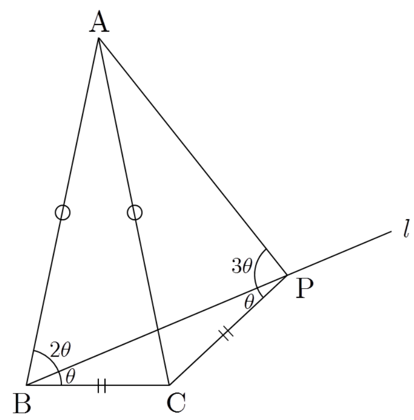
25. 정답 : 792

$\sum_{k=1}^{6} a_k$ 는 각 자리 수의 합이 7인 자연수 중 1자리 수, 2자리 수, $\cdots$, 6자리 수의 개수를 모두 더한 값이다.

$7=000007$, $1231=001231$, $121111=121111$ 와 같이 이해하면 0부터 9까지의 정수를 중복을 허락하여 6개 나열하는 순열 중 배열된 정수의 합이 7이 되도록 배열하는 경우의 수가 구하고자 하는 값과 같다.

$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6=7$을 만족하는 음이 아닌 정수 쌍 $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$의 개수는 ${}_6\mathrm{H}_7={}_{12}\mathrm{C}_5=792$

26. 정답 : 50



$\triangle$ABC가 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{AB}}\cos3\theta$이고 $\triangle$CBP도 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{BP}}=2\overline{\mathrm{BC}}\cos\theta=4\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta\cos3\theta$ $\cdots$ ㉠

$\triangle$ABP에서 사인 법칙을 적용하면

$$\frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\sin(\angle\mathrm{BAP})}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle\mathrm{APB})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\cos\theta\cos3\theta}{\sin5\theta}=\frac{1}{\sin3\theta} \quad (\because ㉠)$$

$$4\sin3\theta\cos3\theta\cos\theta=\sin5\theta \Rightarrow 2\sin6\theta\cos\theta=\sin5\theta$$
$$\Rightarrow \sin7\theta+\sin5\theta=\sin5\theta$$
$$\Rightarrow \sin7\theta=0 \Rightarrow 7\theta=n\pi \ (n\text{은 정수})$$

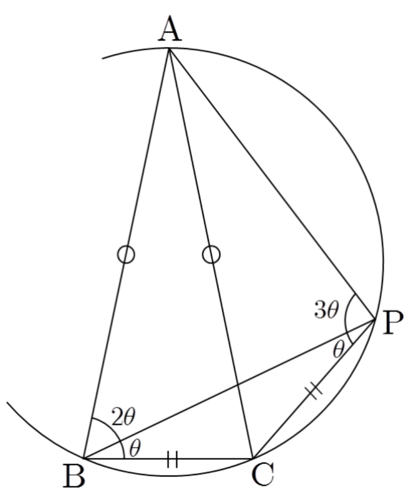
그런데 3θ가 이등변삼각형 $\triangle$ABC의 밑각이므로 $0<3\theta<\frac{\pi}{2}$이고

$0<7\theta<\frac{7\pi}{6} \Rightarrow 0<n\pi<\frac{7\pi}{6}$ 을 만족하는 정수 n은 1뿐이므로

$\theta=\frac{\pi}{7}$이다. 따라서 $p=7$, $q=1$이고 $p^2+q^2=50$

$\angle\mathrm{BCA}=\angle\mathrm{BPA}=3\theta$이므로 원주각의 성질에 의해 네 점 A, B, C, P는 한 원 위에 있다. 원에 내접하는 사각형의 성질에 따라 $\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{APC}=\pi$이고

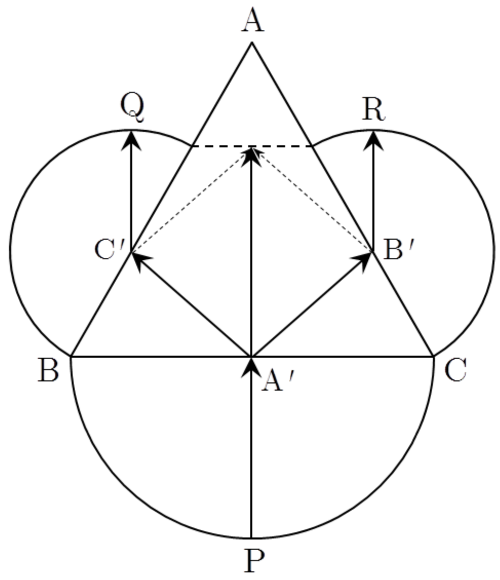
즉, $7\theta=\pi$



27. 정답 : 24

BC의 중점을 A′, AC의 중점을 B′, AB의 중점을 C′이라 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{PA'}}+\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}+\overrightarrow{\mathrm{C'Q}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{PA'}}+\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'R}}\right)$$
$$=\left(2\overrightarrow{\mathrm{PA'}}+\overrightarrow{\mathrm{C'Q}}+\overrightarrow{\mathrm{B'R}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}+\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}\right)$$



이다. 그런데 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}+\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$가 선분 BC에 수직하므로 크기가 일정한 세 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PA'}}$, $\overrightarrow{\mathrm{C'Q}}$, $\overrightarrow{\mathrm{B'R}}$가 선분 BC에 수직할 때, $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|$는 최댓값을 가진다. 이제 $\left|\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}+\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}\right|$의 크기는 $\overline{\mathrm{AA'}}$의 길이의 $\frac{2}{3}$배이고 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PA'}}\right|=6$,

$\left|\overrightarrow{\mathrm{C'Q}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{B'R}}\right|=4$ 이므로 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|$의 최댓값은

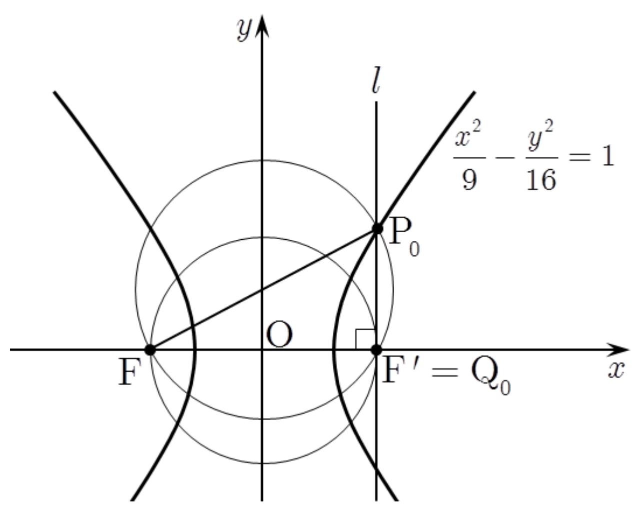
$$x+y\sqrt{3}=\left|\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}+\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}\right|+2\left|\overrightarrow{\mathrm{PA'}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{C'Q}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{B'R}}\right|$$
$$=4\sqrt{3}+12+8=20+4\sqrt{3}$$

즉, $x=20$, $y=4$이고 $x+y=24$

28. 정답 : 10

$\overline{\mathrm{FQ}}$는 선분 FF′을 지름으로 하는 원의 현이므로 $\overline{\mathrm{FQ}}\le\overline{\mathrm{FF'}}=10$이고 따라서 Q=F′를 만족하는 점 P가 존재하면 $\overline{\mathrm{FQ}}$의 최댓값은 10이 된다. $\cdots\cdots$ ㉠

F′를 지나고 y축에 평행한 직선 l을 긋고 l과 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$이 만나는 제 1사분면 위의 점을 $\mathrm{P_0}$라 하자. 두 선분 $\mathrm{P_0F}$, FF′를 지름으로 하는 두 원의 교점 중 F가 아닌 점을 $\mathrm{Q_0}$라 하면 $\angle\mathrm{FF'P_0}=\frac{\pi}{2}$이므로 원주각의 성질에 의해 $\mathrm{F'}=\mathrm{Q_0}$이다.



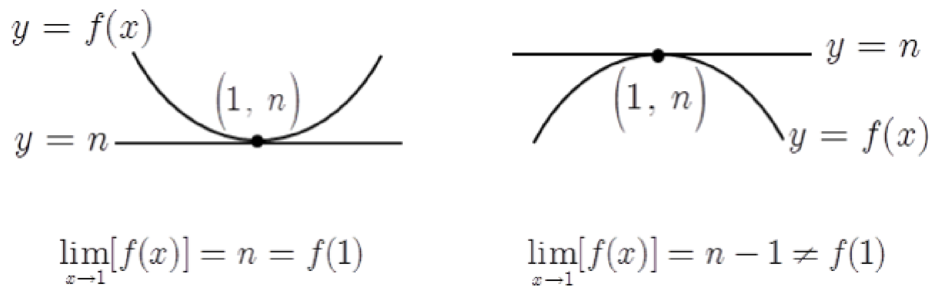
㉠에 의하여 $\overline{\mathrm{FQ}}$의 최댓값은 10

29. 정답 : 10

(가), (나)에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. 그런데 $f(x)$는 삼차함수이므로 실수 전체에서 연속이고 함수 $g(x)$의 불연속은 $f(x)$가 정수인 x값들에 대해서만 가능하다. 따라서

$$f(1)=n\ (n\text{은 정수})$$

(가)에 의해서 $\lim_{x\to1}[f(x)]$가 수렴하고 (나)에 의해서 그 수렴값은 $[f(1)]$이 될 수 없다. ㉠에 의해서 $\lim_{x\to1}[f(x)]$가 수렴하려면 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극점을 가져야 하는데 아래 그림에서 알 수 있듯이 $f(x)$는 $x=1$에서 극대점을 가진다. …… ㉠

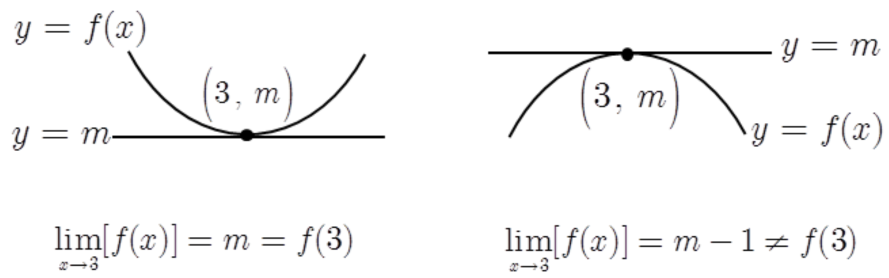


(다)에 의해 $\lim_{x\to3}[f(x)]=\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$를 만족한다. $f(3)$이 정수가 아니라 가정하면

$$\lim_{x\to3}[f(x)]=[f(3)]\ \Rightarrow\ [f(3)]=f(3)$$

에서 $f(3)$은 정수가 아니라는 가정에 모순이고 따라서 $f(3)$은 정수다.

$f(3)=m\ (m$은 정수$)$라 하면 아래 그림에서 알 수 있듯이 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소점을 가진다. …… ㉡

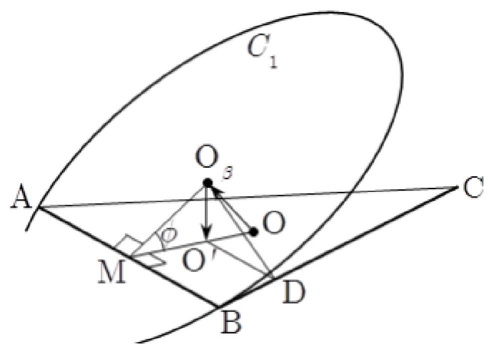


㉠, ㉡에 의해서 $f'(x)=k(x-1)(x-3)\ (k>0)$이고 따라서

$$\frac{f'(11)}{f'(5)}=\frac{k\times10\times8}{k\times4\times2}=10$$

30. 정답 : 13

두 평면 α, β가 이루는 이면각을 ϕ라 하자. 점 O에서 평면 β로 내린 수선의 발을 O_β라 하면 두 점 A, B의 중점 M에 대하여 선분 OM이 선분 AB에 수직이므로 삼수선 정리에 의하여 두 선분 $\mathrm{O}_\beta\mathrm{M}$, OM이 서로 수직하고 따라서



$$\angle\mathrm{OMO}_\beta=\phi\ \cdots\ ㉠$$

점 O_β에서 선분 OM으로 내린 수선의 발을 O′라 하면 삼수선의 정리에 의해 선분 $\mathrm{O}_\beta\mathrm{O}'$은 평면 α에 수직한다. O′에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면 삼수선의 정리에 의해 $\angle\mathrm{O}_\beta\mathrm{DO}'$는 두 평면 α, γ의 이면각이 된다. $\angle\mathrm{O}_\beta\mathrm{DO}'=\theta$라 하고 구의 반지름을 r이라 하면 $\overline{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}r$이므로

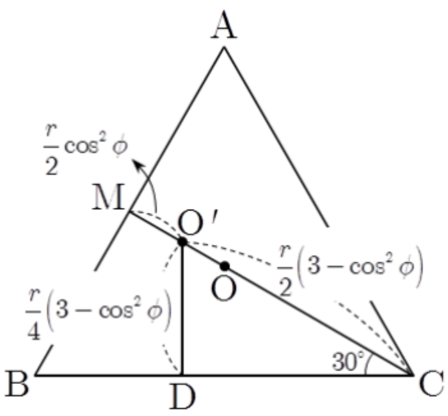
$$\overline{\mathrm{O}_\beta\mathrm{O}'}=\overline{\mathrm{O}_\beta\mathrm{M}}\sin\phi=\overline{\mathrm{OM}}\cos\phi\sin\phi=\frac{1}{2}r\cos\phi\sin\phi\ \cdots\cdots\ ㉡$$

오른쪽 그림에서 알 수 있듯이

$\overline{\mathrm{O'D}}=\overline{\mathrm{CO'}}\sin30^\circ$

$=(\overline{\mathrm{CM}}-\overline{\mathrm{MO'}})\sin30^\circ$

$=\frac{r}{4}(3-\cos^2\phi)\ \cdots\ ㉢$



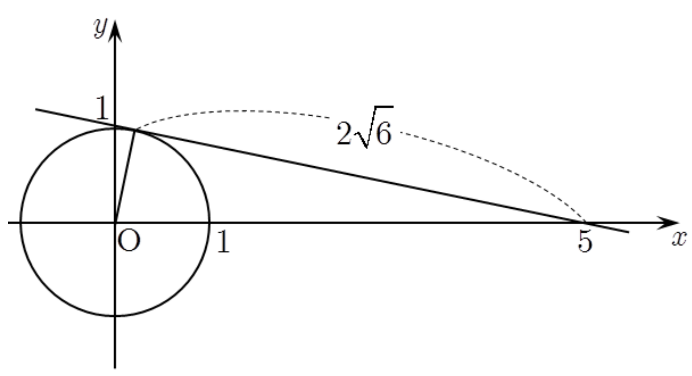
㉡, ㉢에 의하여

$\tan\theta=\frac{\overline{\mathrm{O}_\beta\mathrm{O}'}}{\overline{\mathrm{O'D}}}=\frac{2\sin\phi\cos\phi}{3-\cos^2\phi}=\frac{2\sin2\phi}{5-\cos2\phi}$이므로 $\frac{2\sin2\phi}{5-\cos2\phi}$의 최댓값이 $\tan\theta_{\max}$이다. 그런데

$\frac{2\sin2\phi}{5-\cos2\phi}=-2\left(\frac{\sin2\phi-0}{\cos2\phi-5}\right)$

$=-2\times\left\{(\cos2\phi,\ \sin2\phi),\ (5,\ 0)\text{을 잇는 직선의 기울기}\right\}$

이므로 아래 그림에서 $\tan\theta_{\max}=(-2)\times\left(-\frac{1}{2\sqrt6}\right)=\frac{1}{\sqrt6}$



따라서 $\cos^2\theta_{\max}=\dfrac{1}{\sec^2\theta_{\max}}=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta_{\max}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{6}}=\dfrac{6}{7}$ 이고

$p=7$, $q=6$이므로 $p+q=13$