J&S 9월 직전 모의고사
정답 및 해설

1	④	2	③	3	③	4	④	5	①
6	④	7	④	8	②	9	③	10	⑤
11	②	12	②	13	⑤	14	①	15	①
16	①	17	⑤	18	②	19	③	20	②
21	⑤	22	2	23	150	24	8	25	15
26	40	27	25	28	100	29	91	30	333

1. 지수법칙

$27^{\log_3\sqrt{2}} \times 4^{\frac{1}{4}} = 3^{3\log_3\sqrt{2}} \times \sqrt{2}$

$= 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 4$

2. 행렬 계산

$2A + AB = A(2E+B)$

$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \therefore -6$

3. 함수의 극한 계산

$\lim_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to -2}\dfrac{(2x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)}$

$= \lim_{x\to -2}\dfrac{2x-1}{x-2} = \dfrac{-5}{-4} = \dfrac{5}{4}$

4. 행렬과 그래프

$\int_{-1}^{1}\dfrac{x^3}{x+1}dx - \int_{1}^{-1}\dfrac{1}{y+1}dy$

$= \int_{-1}^{1}\dfrac{x^3}{x+1}dx + \int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x+1}dx = \int_{-1}^{1}\dfrac{x^3+1}{x+1}dx$

$= \int_{-1}^{1}(x^2-x+1)dx = \int_{-1}^{1}(x^2+1)dx$

$= 2\int_{0}^{1}(x^2+1)dx = 2\left[\dfrac{1}{3}x^3+x\right]_0^1 = \dfrac{8}{3}$

5. 독립시행의 확률

${}_3C_2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^1 + {}_3C_3\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\left(\dfrac{3}{4}\right)^0 = \dfrac{9}{64} + \dfrac{1}{64} = \dfrac{5}{32}$

6. 삼차함수가 극값을 가질 조건

삼차함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면, $f(x)$가 극값을 갖지 말아야 하는데, 그러기 위해서는 $f(x)$가 항상 증가하거나, 항상 감소해야 한다. 그런데 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$가 항상 증가해야 한다. 즉, $f'(x) \geq 0$이어야 한다. → 판별식이 0보다 작거나 같아야 한다.

$\to f'(x) = x^2 - 2ax + 8a \geq 0$

$\to D/4 = a^2 - 4a = a(a-8) \leq 0$

$\to 0 \leq a \leq 8$

따라서 가능한 자연수 a는

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 8개다.

7. 등차중항

$\left|\dfrac{a_2 a_6}{2}\right| = |a_4 + a_8|$에서 $a_4 + a_8 = 2a_6$이므로

$\left|\dfrac{a_2 a_6}{2}\right| = |2a_6|$

첫 번째 $a_6 = 0$일 때, $a_1 = 10$이므로 $a_3 = 6$

두 번째 $\left|\dfrac{a_2}{2}\right| = |2|$에서 $a_2 = 4$일 때, $a_1 = 10$이므로 $a_3 = -2$

세 번째 $\left|\dfrac{a_2}{2}\right| = |2|$에서 $a_2 = -4$일 때, $a_1 = 10$이므로 $a_3 = -18$ 따라서 가능한 모든 a_3의 값의 합은 -14이다.

8. 조건부확률

	남학생	여학생	합계
A	5		11
B	0	$3a \times \dfrac{40}{100}$	
C			
합계	$4a$	$3a$	35

	남학생	여학생	합계
A	5	6	11
B	0	6	6
C	15	3	18
합계	20	15	35

따라서 임의로 선택한 학생이 이벤트 C를 참여한 학생이었을 때, 이 학생이 여학생일 확률은

$\dfrac{3}{18} = \dfrac{1}{6}$

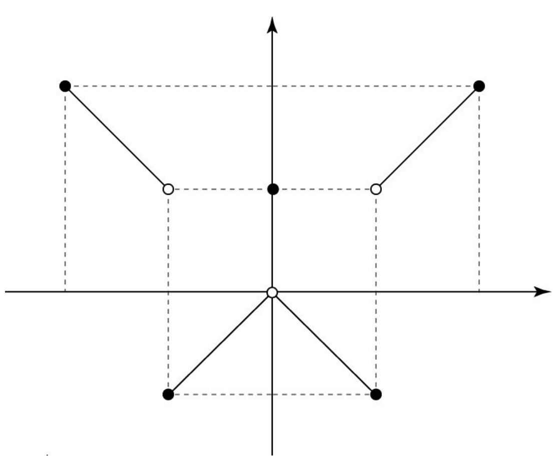
9. 등차수열의 합

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n - 3n^2}{S_n} = \dfrac{1}{2}$ 에서 최고차항의 계수만 본다. 따라서 $\dfrac{\frac{d}{2}-3}{\frac{d}{2}} = \dfrac{1}{2}$ 이어야 한다. $d = 12$

$a_n = 12n - 11 \quad a_5 = 49$

10. 함수의 극한과 연속성

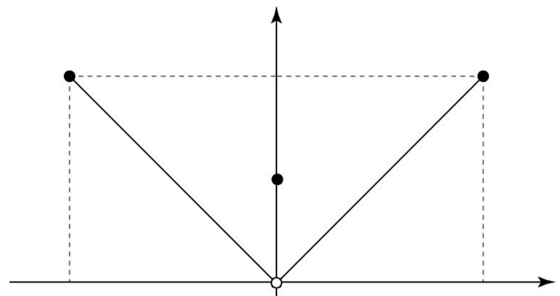
구간 $[-2, 2]$에서 함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $1 + 0 = 1$ (X)

ㄴ. 구간 $(-2, 2)$에서 불연속인 점은 $-1, 0, 1$의 3개이다. (O)

ㄷ. 함수 $|f(x)|$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $|f(x)|$는 $x = 0$에서 불연속이다. 하지만 $\{f(x)-1\}$이 $x = 0$에서 0이 되므로 $|f(x)|\{f(x)-1\}$은 $x = 0$에서 연속이다. (O)

11. 로그 실생활 활용

농도가 $10(\%)$인 용액 A의 농도를 $40(\%)$으로 만드는 데 걸린 시간이 2분이므로

$2 = p\log\dfrac{200}{60-40} = p\log 10 = p$

이 때, 농도가 $10(\%)$인 용액 A의 농도를 $30(\%)$로 만드는 데 걸린 시간을 T_{30}이라 하면

$T_{30} = 2\log\dfrac{150}{60-30} = 2\log 5 = 2\log\dfrac{10}{2}$

$= 2(1-\log 2) = 2\times 0.7 = 1.4$

12. 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

(ⅰ) $n = 1$일 때, (좌변)$= a_1 = 40$,
(우변)$= 7\times 2! + 26 = 40$
이므로 $(*)$이 성립한다.

(ⅱ) $n = m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m} a_k = (2m+5)(m+1)! + 26$

이므로

$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = a_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} a_k$

$= \boxed{(m+4)(2m+5)(m+2)!}$

$+ (2m+5)(m+1)! + 26$

$= \boxed{(m+4)(2m+5)(m+2)!}$

$+ (m+2)! + \boxed{(m+3)(m+1)!} + 26$

$= (2m+7)(m+2)! + 26$

가 성립한다.

따라서 $n = m+1$일 때, $(*)$이 성립한다.

그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
$(*)$이 성립한다.

13. 함수의 극한과 연속성

두 함수 $g(x)$와 $g^{-1}(x)$는 $(1, 1)$과 $(2, 2)$에서 만난다. 즉, 함수 $f(x)$가 $(1, 1)$과 $(2, 2)$를 지날 때($t = 2$, $t = 4$일 때) $h(t) = 1$이고, 함수 $f(x)$가 $(1, 1)$과 $(2, 2)$이 아닌 나머지 부분들을 지날 때 $h(t) = 2$이다. 따라서 $h(t)$는 $t = 2$, $t = 4$에서 불연속이다. 이 때, $h(t)(t^2+at+b)$가 $t \geq 1$에서 항상 연속이 되기 위해서는 $t^2 + at + b = 0$이 $t = 2$, $t = 4$를 근으로 가져야 한다.

$\to a = -6,\ b = 8 \quad \to a + b = 2$

14. 수열의 규칙성 찾기

두 함수 $f(x)$, $g(x+1)$은 자연수 n에 대하여 $(n,\ 2^n)$인 점에서만 만나게 된다. 점 $(n,\ 2^n)$를 지나고 기울기가 -1인 직선 $f(n)$은

$f(n)=-(x-n)+2^n=-x+2^n+n$ 이므로

가능한 t는 2^n+n이다. $\rightarrow a_n=2^n+n$

$\rightarrow \sum_{n=1}^{8} a_n=\sum_{n=1}^{8}(2^n+n)$

$=\frac{2(2^8-1)}{2-1}+\frac{8\times 9}{2}=2^9-2+36=546$

15. 모평균의 추정 – 신뢰구간의 길이

크기가 49인 표본을 임의추출하여 모평균을 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2\times 2\times\frac{\sigma}{7}=\frac{4}{7}\sigma$

크기가 n인 표본을 임의추출하여 모평균을 신뢰도 99%로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2\times 3\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{6}{\sqrt{n}}\sigma$

$\rightarrow \frac{4}{7}\sigma=\frac{6}{\sqrt{n}}\sigma \quad \rightarrow n\le 110.\mathrm{xx}\cdots$

따라서 자연수 n의 최댓값은 110이다.

16. 적분 구간에 변수가 있는 정적분

$f(x)g(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

그런데 $f(0)+g(0)=g(1)=0$이므로

$f(x)=3x+1,\ g(x)=x-1$이다.

$f(x)$와 $\{g(x)\}^2$의 교점을 구하면

$3x+1=x^2-2x+1 \rightarrow x^2-5x=0$

$\rightarrow x=0$ 또는 $x=5$

따라서 좌표평면 위에서 함수 $y=3x+1$과 함수 $y=x^2-2x+1$로 둘러싸인 부분의 넓이는

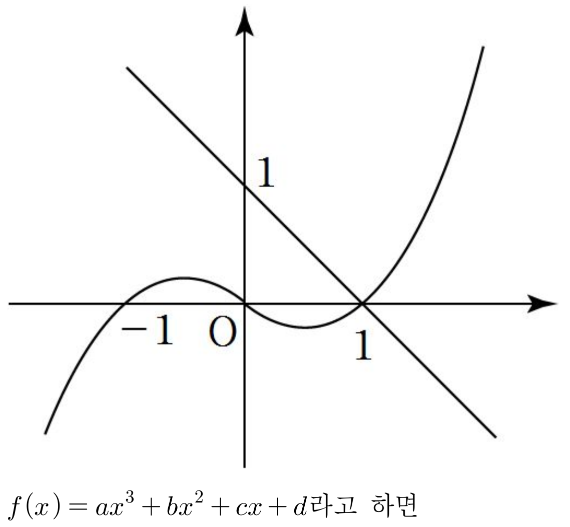
$\int_0^5\{(3x+1)-(x^2-2x+1)\}dx$

$=\int_0^5(-x^2+5x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_0^5$

$=-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}=\frac{125}{6}$

17. 확률밀도함수

(가) 조건과 (나) 조건에 의해서 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 다음과 같이 그려진다.



$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라고 하면

$f(-1)=-a+b-c+d=0$

$f(0)=d=0 \qquad f(1)=a+b+c+d=0$

$\rightarrow b=0,\ c=-a,\ c=0$

$\rightarrow f(x)=ax^3-ax$

$[-2,\ 2]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $|f(x)|$이므로

$\int_{-2}^{2}|f(x)|dx=2\int_0^2|f(x)|dx$

$=2\int_1^2(ax^3-ax)dx-2\int_0^1(ax^3-ax)dx$

$=2\left[\frac{a}{4}x^4-\frac{a}{2}x^2\right]_1^2-2\left[\frac{a}{4}x^4-\frac{a}{2}x^2\right]_0^1$

$=5a=1 \rightarrow a=\frac{1}{5} \rightarrow f(x)=\frac{1}{5}x^3-\frac{1}{5}x$

$\mathrm{P}(1\le X\le 2)=\int_1^2\left(\frac{1}{5}x^3-\frac{1}{5}x\right)dx$

$=\left[\frac{1}{20}x^4-\frac{1}{10}x^2\right]_1^2=\frac{9}{20}$

18. 역행렬의 성질

ㄱ. 오른쪽 식의 양변의 왼쪽에 B를 곱하면 $BA^2+B^3=4B$이고, 오른쪽 식의 양변의 오른쪽에 B를 곱하면 $AB^2+B^3=4B$이다. (O)

ㄴ. 오른쪽 식을 변형한 $A=E-BAB$의 양변을 제곱하면 $A^2=E-2BAB+BAB^2AB$

인데 ㄱ에 의하여 $A^2=E-2BAB+B^4A^2$

오른쪽 식을 변형한 $A^2=4E-B^2$를 이 식에 대입하면 $E-2BAB+B^4A^2=4E-B^2$

$\rightarrow B^4A^2-2BAB+B^2=3E$

$\rightarrow B(B^3A^2-2AB+B)=3E$

이므로 B의 역행렬이 존재한다. (O)

ㄷ. $B(B^3A^2-2AB+B)=3E$

$\rightarrow B(B^2A^2-2A+E)B=3E\ (\therefore A^2B=BA^2)$

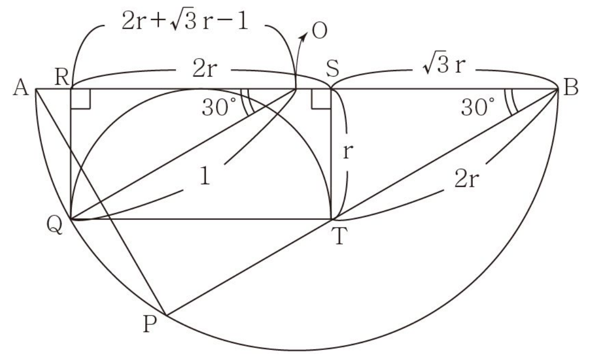
$\rightarrow B^2A^2-2A+E\ne O \rightarrow 2A-B^2A^2\ne E$

$\rightarrow A(2E-B^2A)\ne E$

따라서 $A^{-1}\ne 2E-B^2A$ (X)

19. 무한등비급수 넓이합

첫 번째 반원의 중심을 O, 두 번째 반원이 호 AP와 만나는 점을 Q, 점 Q에서 선분 AB를 향해 내린 수선의 발을 R, 두 번째 반원이 선분 PB와 만나는 점을 T, 점 T에서 선분 AB를 향해 내린 수선의 발을 S라 하자. 두 번째 반원의 반지름의 길이를 r이라 하면,

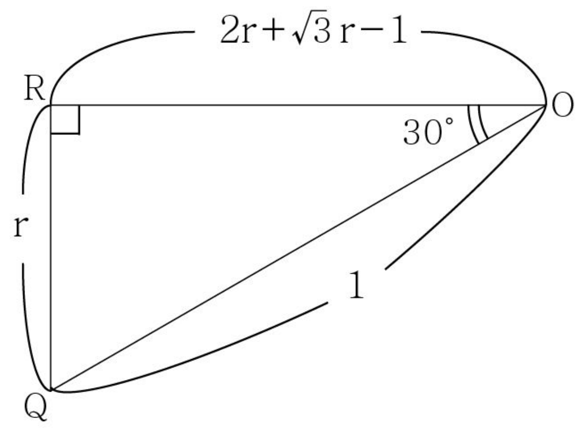


1) $\overline{\mathrm{ST}}=r,\ \angle\mathrm{SBT}=30^\circ \rightarrow \overline{\mathrm{SB}}=\sqrt{3}r$

2) $\overline{\mathrm{RS}}=2r,\ \overline{\mathrm{SB}}=3r \rightarrow \overline{\mathrm{RO}}=(\overline{\mathrm{RS}}+\overline{\mathrm{SB}})-\overline{\mathrm{OB}}$
$=2r+\sqrt{3}r-1$

3) $\overline{\mathrm{RQ}}=r,\ \overline{\mathrm{OQ}}=1$

이를 정리하여 그림으로 나타내면 다음과 같다.



피타고라스 정리에 의하여

$r^2+(2r+\sqrt{3}r-1)^2=1$

$\rightarrow r^2+4r^2+3r^2+1+4\sqrt{3}r^2-2\sqrt{3}r-4r=1$

$\rightarrow (8+4\sqrt{3})r^2=(4+2\sqrt{3})r$

$\rightarrow r=\frac{1}{2} \rightarrow$ 공비$=\frac{1}{4}$

한편, S_1은 중심각이 120°인 부채꼴 OPB에서 삼각형 OPB의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$S_1=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\rightarrow \frac{a}{1-r}$(공식) $\rightarrow \frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{9}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}$

20. 상용로그의 성질

$1\le\log n<3 \quad\rightarrow\quad f(n)=1$ or 2

1) $f(n)=1$이고 n이 짝수일 때
 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90의 9개

2) $f(n)=1$이고 n이 홀수일 때 $\rightarrow$ 없음

3) $f(n)=2$이고 n이 짝수일 때
 100, 150, 200, 250, ⋯, 900의 18개

4) $f(n)=2$이고 n이 홀수일 때
 125, 175, 225, 275, ⋯, 975의 18개

$\rightarrow 9+18+18=45$

21. 함수의 그래프 이용하기

우선 $f(x)=ax(x-1)(x-b)$에서 $b<0$일 때, $0<b<1$일 때, $b>1$일 때로 나눈다. $b=0,\ 1$일 때는 특수한 상황이여서 (나)조건에 의해 아니란걸 알 수 있다.

또, $b<0$일 때와 $0<b<1$일 때, (나)의 $\int_n^{n+1}g(x)dx=0$을 만족하는 n의 최솟값의 4이다.를 만족하지 않는다. 따라서 $b>1$일 때의 개형이 그려져야 하고, 자연수 n의 최솟값이 4이므로 $b=4$가 되어야 한다.

$f(x)=ax(x-1)(x-4)\quad f(5)=5$이므로

$a=\frac{1}{4}\quad 20(a+b)=85$

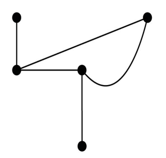
22. 수열의 극한 계산

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)(2n+5)}{n^2-9}=2$

23. 행렬과 그래프

행렬의 모든 성분의 합

=(변의 개수)×2=5 × 2=10



와 $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 에서 반드시 a와 b가 1이 되어야 한다. (한 점과 이어진 변의 개수가 3개인 점이 2개 있기 때문이다.)

$(10a+5b)c=150$

24. 지수함수의 최대최소

지수함수 $y=a\times\left(\frac{4}{a}\right)^x$ 는 정의역이 제한되어 있기 때문에 지수함수가

감소함수라면 $x=-2$ 에서 최댓값을 갖고

증가함수라면 $x=1$ 에서 최댓값을 가진다.

$x=1$ 을 대입해 보면 항상 지수함수의 최댓값이 4이기 때문에 주어진 지수함수는 감소함수여야 하고, 지수함수에 $x=-2$ 를 대입한

$a\times\left(\frac{4}{a}\right)^{-2}=32$ 이어야 한다.

따라서 $a^3=16\times 32=2^9$, $a=8$

25. 역행렬의 성질

$A^3-E=O$ $(A-E)(A^2+A+E)=O$

행렬 $A-E$의 역행렬이 존재하므로

$(A-E)(A^2+A+E)=O$의 양 변에

$(A-E)^{-1}$ 을 곱하면 $A^2+A+E=O$

따라서 $A^2=-A-E$ 행렬 A의 모든 성분의 합은 -1, 행렬 E의 모든 성분의 합은 2

따라서 행렬 A^2의 모든 성분의 합 -1

26. 통계적 추정 표준정규분포표

$\mathrm{P}(5\sigma-8\le \overline{X}\le 204)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{5\sigma-8-200}{\frac{\sigma}{5}}\le\frac{\overline{X}-200}{\frac{\sigma}{5}}\le\frac{204-200}{\frac{\sigma}{5}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{25\sigma-1040}{\sigma}\le Z\le\frac{20}{\sigma}\right)=0.5328$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 1.0)$

또는 $\mathrm{P}(-1.0\le Z\le 0.5)$인데, 타당한 σ의 값은 $\mathrm{P}(-1.0\le Z\le 0.5)$인 경우 뿐이다.

$\to \sigma=40$

27. 미적분 - 속도와 가속도

두 점 P, Q가 $t=2$, $t=4$일 때 속도가 같으므로

$8a+4b+2c=1$ …… ㉠

$64a+16b+4c=2$ …… ㉡

점 P와 점 Q가 항상 같은 방향으로 움직이고, 점 P가 출발한 후 $t=2$까지 움직인 거리가 점 Q가 출발한 후 $t=2$까지 움직인 거리의 절반이므로

$\frac{1}{2}\int_0^2(at^3+bt^2+ct)dt=\int_0^2\frac{1}{2}t\,dt$

$\to \frac{1}{2}\left[\frac{a}{4}t^4+\frac{b}{3}t^3+\frac{c}{2}t^2\right]_0^2=\left[\frac{1}{4}t^2\right]_0^2$

$\to 2a+\frac{4}{3}b+c=1$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하면

$a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{3}{2}$, $c=\frac{5}{2}$

$\to v_{\mathrm{Q}}(t)=\frac{1}{4}t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{5}{2}t$

$\to \alpha_{\mathrm{Q}}(t)=\frac{3}{4}t^2-3t+\frac{5}{2}$ $\to \alpha_{\mathrm{Q}}(1)=\frac{1}{4}=d$

$\therefore\ 100d=\frac{100}{4}=25$

28. 중복조합

1) $0\le x<2$일 때

$\to -x+2+y+z+w=6$

$\to -x+y+z+w=4$

$\begin{cases} x=0 \to y+z+w=4 \\ x=1 \to y+z+w=5 \end{cases}$

$\to {}_{3+4-1}C_4+{}_{3+5-1}C_5=36$

2) $2\le x\le 4$일 때

$\to x-2+y+z+w=6$

$\to x+y+z+w=8$

$\begin{cases} x=2 \to y+z+w=6 \\ x=3 \to y+z+w=5 \\ x=4 \to y+z+w=4 \end{cases}$

$\to {}_{3+6-1}C_6+{}_{3+5-1}C_5+{}_{3+4-1}C_4$

$=64$

$36+64=100$

29. 극값의 조건

왼쪽에서의 미분계수(좌미분계수)의 값이 항상 $\frac{1}{2}$이므로 오른쪽에서의 미분계수(우미분계수)의 값이 0보다 작아야 한다.

$-\frac{n}{2}x^2+\left(\frac{3}{2}n-7\right)x+\frac{15}{2}$ 을 미분한

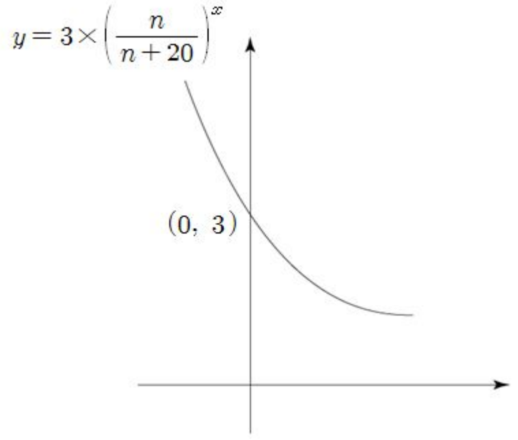
$-nx+\left(\frac{3}{2}n-7\right)$에 $x=1$ 대입

$\frac{1}{2}n-7<0$ 을 만족하는 $n=1,\ 2,\ \cdots,\ 13$

30. 지수함수의 개형 ^~^

우선 대략적인 개형을 파악하기 위해

$y=3\times\left(\frac{n}{n+20}\right)^x$ 의 특징을 파악해 보면 항상 점(0, 3)을 지나고 감소함수라는 점을 알 수 있다.

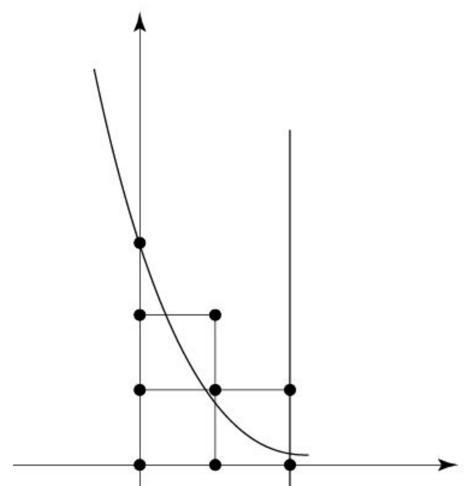


위 그래프는 대략적인 개형이다.

이제 기울기가 1인 직선이 오직 하나가 되도록 n의 값을 찾아보자.

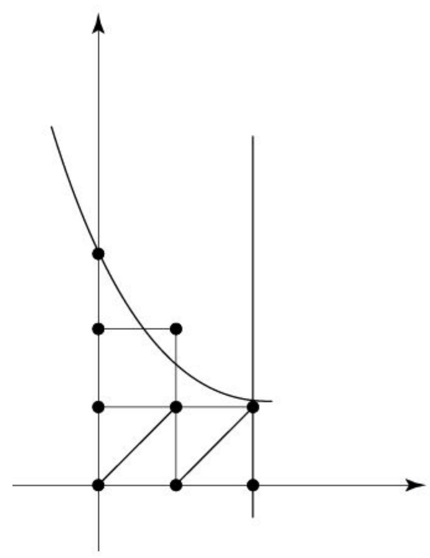
만약 위의 지수함수가 $x=1$에서 2와 3사이의 값을 가진다면 최소 점 (0, 0)과 점 (1, 1)을 잇는 직선과 점(0, 1)과 점 (1, 2)를 잇는 직선 2개 생기게 된다.

반대로 아래 그림처럼 $x=1$에서 0과 1사이의 값을 가진다면 기울기가 1인 직선이 존재하지 않게 된다.



따라서 반드시 $x=1$에서 1이상 2미만의 값을 가져야 한다.

그러나 아래 그림처럼 $x=2$에서 곡선이 1보다 큰 값을 갖게 된다면 기울기가 1인 직선이 2개



존재하게 된다.

따라서 $x=2$에서 곡선은 0과 1사이의 값을 가져야 한다.

$1\le 3\times\left(\frac{n}{n+20}\right)^1<2$의 부등식을 풀면

$10\le n<40$

$0\le 3\times\left(\frac{n}{n+20}\right)^2<1$의 부등식을 풀면

$n^2-20n-200<0$

$\Leftrightarrow -10+10\sqrt{3}<n<10+10\sqrt{3}$

$1.7<\sqrt{3}<1.8$ 이므로 둘을 동시에 만족하는 n의 값은 $n=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ \cdots,27$