2015 대수능 대비 FINAL 모의고사
정답과 해설

1회차 정답표

1. ③	2. ①	3. ⑤	4. ⑤	5. ①
6. ②	7. ②	8. ③	9. ③	10. ②
11. ④	12. ②	13. ④	14. ②	15. ③
16. ④	17. ④	18. ⑤	19. ①	20. ③
21. ③	22. 4	23. 72	24. 90	25. 150
26. 4	27. 29	28. 2	29. 150	30. 52

1. 정답 : ③

$BA^{-1}=\left(AB^{-1}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ 이므로 모든 성분의 합은 0이다.

2. 정답 : ①

$2^3<10<2^4$, $2^6<100<2^7$ 이므로 $10=2^{3.\times\times\cdots}$, $100=2^{6.\times\times\cdots}$ 이고

$10<2^x<100 \Leftrightarrow 2^{3.\times\times\cdots}<2^x<2^{6.\times\times\cdots} \Leftrightarrow 3.\times\times\cdots<x<6.\times\times\cdots$

이므로 자연수 x는 $4, 5, 6$ 뿐이다.

3. 정답 : ⑤

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 $r^3=\dfrac{a_7}{a_4}=\dfrac{7}{2}$ 이다.

$a_{10}=a_7\times r^3=28\times\dfrac{7}{2}=98$

4. 정답 : ⑤

$2\sin 45^\circ\cos 15^\circ=\sin 60^\circ+\sin 30^\circ=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

5. 정답 : ①

$6x-4x^2=\sqrt{2x^2-3x+5}$

$\Leftrightarrow -2A=\sqrt{A+5}$ ($2x^2-3x=A$로 치환)

$\Leftrightarrow 4A^2-A-5=0$, $A\leq 0$

$\Leftrightarrow A=-1$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0$

$\Leftrightarrow x=1$ 혹은 $\dfrac{1}{2}$

이므로 모든 실근의 합은 $1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

6. 정답 : ②

타자가 타석에 들어서서 출루하는 사건을 A, 안타를 치지 못하는 사건을 B라 하면 구하고자 하는 확률은 다음과 같다.

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(B\cup A)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{0.42-0.33}{0.42}=\dfrac{9}{42}=\dfrac{3}{14}$

7. 정답 : ②

p, q, r이 이 순서대로 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열을 이루는 것을

이용하여 $q=\dfrac{1}{4}p$, $r=\dfrac{1}{16}p$ 이라 하자.

$p+q+r=1$이므로 $\dfrac{21}{16}p=1$이고 따라서 $p=\dfrac{16}{21}$, $q=\dfrac{4}{21}$, $r=\dfrac{1}{21}$

$\mathrm{E}(X)=0\cdot p+1\cdot q+2\cdot r=\dfrac{4}{21}+\dfrac{2}{21}=\dfrac{6}{21}=\dfrac{2}{7}$

8. 정답 : ③

벽을 두께를 두배로 하기 전의 두께를 d_0 (m), 구하고자 하는 값을 x (dB)라 하면 다음의 두 등식이 성립한다.

$$\log_2\frac{50}{100}=-kd_0 \;\cdots\cdots\; (1),\quad \log_2\frac{x}{100}=-2kd_0 \;\cdots\cdots\; (2)$$

(1)에 2를 곱한 후 (2)에서 빼주면

$\log_2\dfrac{x}{100}-\log_2\dfrac{1}{4}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}\cdot 100=25$

9. 정답 : ③

직선 $2x+y=2$, $z=3$에서 $x=t$로 매개화하면 $\begin{cases} x=0+t \\ y=2-2t \\ z=3 \end{cases}$ 이고

따라서 주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{v}$라 하면 $\vec{v}=(1,\ -2,\ 0)$이다.

A, B를 잇는 직선의 방향벡터는 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$이므로 두 직선이 수직하면

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{v}=0 \Leftrightarrow (k-1,\ -2,\ 8) \cdot (1,\ -2,\ 0)=0$

$\Leftrightarrow k-1+4=0$

$\Leftrightarrow k=-3$

10. 정답 : ②

f의 정의에서 $f(X)=X^2$임을 쉽게 알 수 있다.

$$f(A)=2E \Leftrightarrow A^2=2E \Rightarrow A^{10}=32E$$

이므로 A^{10}의 모든 성분의 합은 $32+32=64$

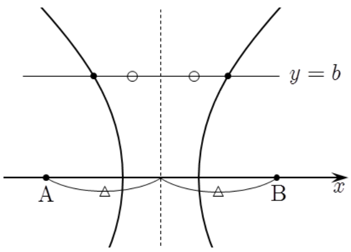
11. 정답 : ④

포물선 $y^2=12x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\, b)$에서의 포물선의 접선의 방정식과

법선의 방정식이 $by=6(x+a)$, $y=-\dfrac{b}{6}(x-a)+b$ 이므로 A, B의

좌표는 각각 $(-a,\, 0)$, $(a+6,\, 0)$이다.

A, B를 초점으로 가지는 쌍곡선이 $(a,\, b)$, $(-3,\, b)$를 지나면 A, B의 중점의 x좌표가 $\dfrac{a-3}{2}$이어야 하고



따라서 $\dfrac{a-3}{2}=3$이고 $a=9$

$b^2=12a$이므로 $a^2+b^2=9^2+12 \cdot 9=9 \cdot 21=189$

12. 정답 : ②

$\triangle\mathrm{ABC}$는 이등변삼각형이므로 $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}$이고

$\angle\mathrm{BAC}=20^\circ$이므로 $\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\left(180^\circ-\angle\mathrm{BAC}\right)=80^\circ$이고

따라서 (가)에 알맞은 값은 $\alpha=80^\circ$이다.

(1), (2)에 의하여 $\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{CAP}$이고 $\angle\mathrm{CAP}$는 $\angle\mathrm{CAB}$의 이등분각이므로 (나)에 알맞은 값은 $\beta=10^\circ$이다.

따라서 $\alpha-\beta=80^\circ-10^\circ=70^\circ$

13. 정답 : ④

$\displaystyle\int_{\sec^2 x}^{2} g(t)\,dt=\int_{\sec^2 x-1}^{1} g(t+1)\,dt=\int_{\tan^2 x}^{1}\left\{g(t)+1\right\}dt$ 이므로

주어진 등식에 위 식을 대입하면 다음과 같다.

$$\int_{0}^{\tan^2 x} g(t)\,dt+\int_{\tan^2 x}^{1} g(t)\,dt+\int_{\tan^2 x}^{1} dt=10-\sec^2 x$$

$$\int_{0}^{1} g(t)\,dt=10-\sec^2 x-\int_{\tan^2 x}^{1} dt=9-\sec^2 x+\tan^2 x=8$$

14. 정답 : ②

$$a_{12}-a_{11}=\int_{0}^{12} g(t)\,dt-\int_{0}^{11} g(t)\,dt=\int_{11}^{12} g(t)\,dt=\int_{0}^{1} g(t+11)\,dt$$

이고 주어진 등식 $g(t+1)=g(t)+1$을 이용하면

$$g(t+11)=g(t+10)+1=g(t+9)+2=\ \cdots\ =g(t)+11$$

이다 따라서

$$a_{12}-a_{11}=\int_{0}^{1}\left\{g(t)+11\right\}dt=8+11=19$$

15. 정답 : ③

ㄱ. $(A-E)(A+E)\left(A^2+2E\right)=A^4+A^2-2E=-3E$ 이므로 $A-E$는 역행렬을 가지고 그 역행렬은 $-\dfrac{1}{3}(A+E)\left(A^2+2E\right)$이다.

($\therefore$ 참)

ㄴ. 주어진 등식 $AB+E=A+B$를 정리하면 $(A-E)(B-E)=O$ 이고 ㄱ.에 의해서 $A-E$의 역행렬을 양 변에 곱해주면 $B=E$를 얻는다. 따라서 $AB=BA$는 성립 ($\therefore$ 참)

ㄷ. $B=E$이므로 $A^n=E$를 만족하는 행렬 A가 존재하기 위한 자연수 n의 최솟값을 구하면 된다.

$n=1$이면 $A=E$이고 $A^4+A^2+E=3E$이므로 모순

$n=2$이면 $A^2=E$이고 $A^4+A^2+E=3E$이므로 모순

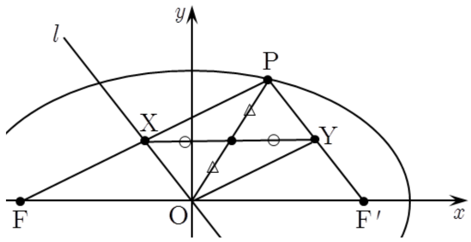
$n=3$이면 $A^3=E$이고 $A^4+A^2+E=A^2+A+E=O$이어야 한다. 그런데 $A^2+A+E=O$을 만족하는 행렬 A는 항상 $A^3=E$를 만족하므로 $A^2+A+E=O$을 만족하는 행렬 A가 존재하면 n의 최솟값은 3이 된다. $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$가 $A^2+A+E=O$을 만족하므로 n의 최솟값은 3이다. ($\therefore$ 거짓)

16. 정답 : ④

$\triangle$FPF$'$와 $\triangle$FXO가 서로 닮음이고 닮음비가 $2:1$이므로

$\overline{\mathrm{OX}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{F'P}}=\overline{\mathrm{YP}}$이고 두 선분 OX, YP가 서로 평행하므로

사각형 OXPY는 평행사변형이다.

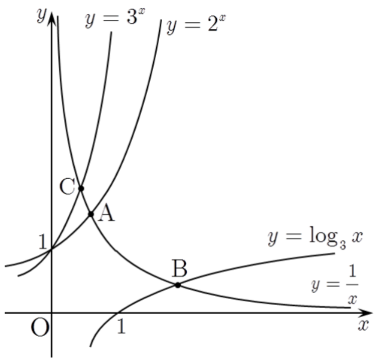


평행사변형의 두 대각선은 서로의 길이를 이등분하며 만나기 때문에 두 점 X, Y의 중점은 두 점 O, P의 중점과 같다. 따라서 구하고자 하는 자취는 타원 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$을 원점을 중심으로 $\frac{1}{2}$배 닮음변환시킨 타원이며 자취의 방정식은 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$이다. 두 초점의 좌표는 $(4,\,0)$, $(-4,\,0)$이고 따라서 두 초점 사이의 거리는 8이다.

17. 정답 : ④

함수 $y=3^x$의 그래프와 곡선 $y=\frac{1}{x}$의 교점을 C$(x_3,\,y_3)$라 하자.

$y=3^x$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 곡선 $y=\frac{1}{x}$도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 점 B, C는 서로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 즉, $x_2=y_3$, $x_3=y_2$



ㄱ. 위 그림에서 알 수 있듯이 점 A가 점 C보다 오른쪽에 있으므로 $x_1>x_3=y_2$ ($\therefore$ 참)

ㄴ. $x_1x_2+y_1y_2<x_1y_1+x_2y_2 \Leftrightarrow (x_1-y_2)(x_2-y_1)<0$

ㄱ.에 의해서 $x_1-y_2>0$이고 위 그림에서 알 수 있듯이 점 C가 점 A보다 위에 있으므로 $y_1<y_3=x_2$이다. 따라서 $x_2-y_1>0$이고 $(x_1-y_2)(x_2-y_1)>0$ ($\therefore$ 거짓)

ㄷ. $x_1x_2-y_1y_2>x_1-y_2 \Leftrightarrow x_1(x_2-1)>y_2(y_1-1)$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2-1}{y_2}>\frac{y_1-1}{x_1} \quad (\because x_1y_2>0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_3-1}{x_3}>\frac{y_1-1}{x_1}$$

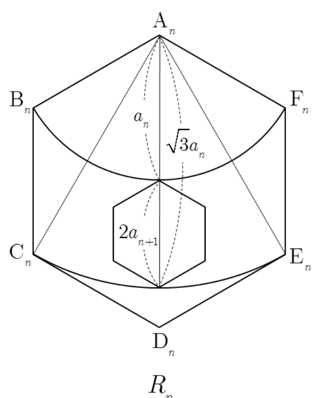
$\frac{y_3-1}{x_3}$은 점 C$(x_3,\,y_3)$와 점 $(0,\,1)$을 잇는 직선의 기울기이고

$\frac{y_1-1}{x_1}$은 점 A$(x_1,\,y_1)$과 점 $(0,\,1)$을 잇는 직선의 기울기다.

위 그림에서 알 수 있듯이 두 점 C$(x_3,\,y_3)$, $(0,\,1)$을 잇는 직선의 기울기가 더 크다. ($\therefore$ 참)

18. 정답 : ⑤

그림 R_n을 만들 때 새로 그린 정육각형의 한 변의 길이를 a_n이라 하자. $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}=\sqrt{3}\,a_n$, $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n}=2a_n$ 이므로 오른쪽 그림에서 알 수 있듯이



R_n

$$2a_{n+1}=\left(\sqrt{3}-1\right)a_n$$

$$a_{n+1}=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)a_n$$

이고 따라서 수열 $\{a_n\}$은 초항이 3이고 공비가 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$인 등비수열이다. 그림 R_n을 만들 때 새로 색칠된 부분의 넓이를 T_n이라 하면

T_n =(부채꼴 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n$의 넓이)+(사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n\mathrm{E}_n$의 넓이)

−(부채꼴 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n\mathrm{E}_n$의 넓이)

$$=\frac{\pi}{3}{a_n}^2+\sqrt{3}\,{a_n}^2-\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\,a_n\right)^2=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\right){a_n}^2$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{9\sqrt{3}-\frac{3\pi}{2}}{1-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}=18-\sqrt{3}\,\pi$$

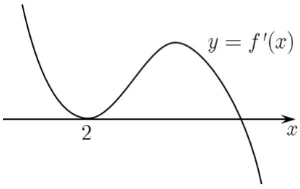
정답과 해설

19. 정답 : ①

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{f'(x)}=\infty \Leftrightarrow f'(2)=0,\ x=2$ 근방에서 $f'(x)\geqq 0$ …… ㉠

$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4x}=-4 \Leftrightarrow f(4)=f(2),\ \frac{1}{4}f'(4)=-4$ …… ㉡

㉠에 의하여 최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 따라서



$f'(x)=a(x-2)^2(x-\alpha)\quad (a<0,\ \alpha>2)$ 라 할 수 있다.

이 식에 ㉡을 대입해보면

$f'(4)=-16 \Leftrightarrow 4a(4-\alpha)=-16 \Leftrightarrow a(\alpha-4)=4$

$$f(4)=f(2) \Leftrightarrow \int_2^4 f'(x)\,dx=0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 ax^2(x+2-\alpha)\,dx=0$$

$$\Leftrightarrow 4a+\frac{8}{3}a(2-\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{7}{2}\quad (\because a\neq 0)$$

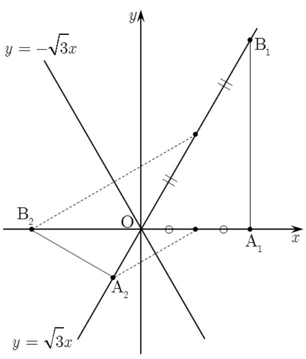
따라서 $a=-8,\ \alpha=\frac{7}{2}$이고 $f'(x)=-8(x-2)^2\left(x-\frac{7}{2}\right)$ 이다.

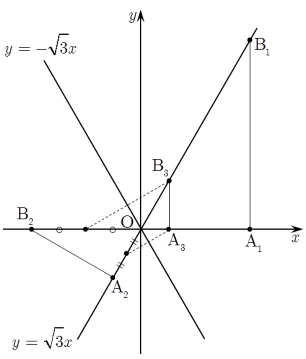
$$f(3)-f(1)=\int_1^3 f'(x)\,dx=\int_1^3 -8(x-2)^2\left(x-\frac{7}{2}\right)dx$$

$$=\int_{-1}^1 -8x^2\left(x-\frac{3}{2}\right)dx=2\int_0^1 12x^2\,dx=8$$

20. 정답 : ③

일차변환 f는 직선 $y=-\sqrt{3}x$에 대한 대칭변환과 원점을 중심으로 하는 $\frac{1}{2}$배 닮음변환의 합성이다. 따라서 A_n, B_n을 좌표평면에 표현하면 다음과 같다.





위 그림에서 알 수 있듯이 $\triangle OA_nB_n$은 $\angle B_nOA_n=60^\circ$, $\angle OA_nB_n=90^\circ$인 직각삼각형이고 $\overline{OA_n}$은 초항이 3, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로 $\triangle OA_nB_n$의 넓이를 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{OA_n}^2=18\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

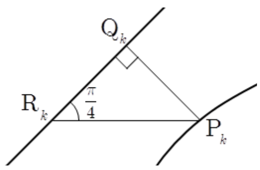
구하고자 하는 넓이를 S라 하면

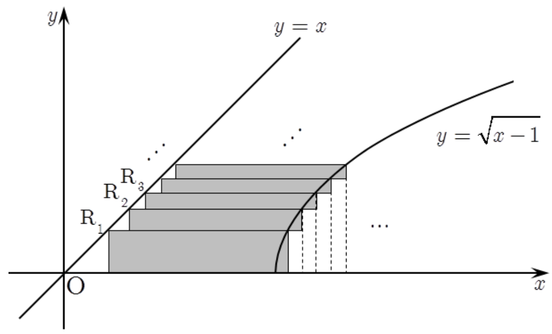
$$S=S_1+S_2-S_3-S_4+S_5+S_6-S_7-S_8+\cdots$$

$$=\frac{S_1+S_2}{1-\left(-\frac{1}{16}\right)}=\frac{\frac{9}{2}\sqrt{3}+\frac{9}{8}\sqrt{3}}{\frac{17}{16}}=\frac{90\sqrt{3}}{17}$$

21. 정답 : ③

점 P_k을 지나며 x축과 평행한 직선이 직선 $y=x$와 만나는 점을 R_k라 하면 $\overline{P_kR_k}=\sqrt{2}\cdot\overline{P_kQ_k}$이다. …… ㉠





위 그림에서 알 수 있듯이 $\overline{P_kR_k}\cdot\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)$의 값은 직사각형의 넓이를 의미한다. n이 충분히 커지면 직사각형들의 높이가 0으로 수렴하고 구분구적법의 원리에 따라

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\overline{P_kR_k}\cdot\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)\right\}$의 값은 $y=\sqrt{x-1}$, $y=x$, $y=1$, x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 된다. …… ㉡

따라서 구하고자 하는 값은

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\overline{P_kQ_k}\cdot\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}\left\{\overline{P_kR_k}\cdot\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)\right\}\quad(\because ㉠)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\left(y^2+1-y\right)dy\quad(\because ㉡)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}+1-\frac{1}{2}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{12}$$

22. 정답 : 4

$$\int_{e}^{e^3}\frac{1}{x}\ln x\,dx=\int_{1}^{3}t\,dt\ (\ln x=t\text{로 치환})=\frac{8}{2}=4$$

23. 정답 : 72

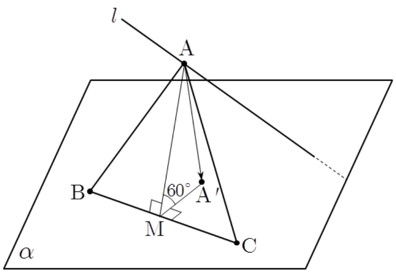
A, E가 서로 이웃하는 경우를 전체의 경우에서 빼자.

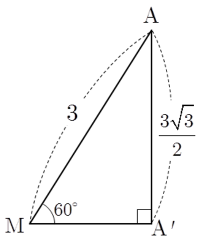
다섯 개의 알파벳을 일렬로 나열하는 방법의 가지 수 $=5!=120$

A, E가 이웃하도록 나열하는 방법의 가지 수 $=2\times4!=48$

따라서 $120-48=72$

24. 정답 : 90





A에서 평면 α로 내린 수선의 발을 A′라 하고 선분 BC의 중점을 M이라 하면 두 선분 AM, $\overline{\mathrm{BC}}$는 서로 수직이고 삼수선의 정리에 의하여 두 선분 A′M, BC는 서로 수직한다. △ABC와 평면 α가 이루는 각도가 60°이므로 위의 오른쪽 그림에서 알 수 있듯이 $\overline{\mathrm{AA'}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$이다.

A는 직선 l 위의 점이므로 t로 매개화 하여 $\mathrm{A}(2t+1,\,4-t,\,t-4)$라 할 수 있다. 평면 $\alpha : x+2y+3z=0$과 A 사이의 거리가 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로 $\frac{|2t+1+2(4-t)+3(t-4)|}{\sqrt{14}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$이고 이를 정리하면 $|t-1|=\frac{\sqrt{42}}{2}$ …… ㉠

$$\overline{\mathrm{OA}}^2=(2t+1)^2+(4-t)^2+(t-4)^2=6t^2-12t+33$$
$$=6(t-1)^2+27=6\cdot\frac{42}{4}+27=90\quad(\because ㉠)$$

25. 정답 : 150

$S_1=a_1,\ S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n$이므로 $S_n=a_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이다.

$a_n=\begin{cases}(n=1) & a_1\\(n\geq2) & S_n-S_{n-1}\end{cases}$이므로 $a_n=\begin{cases}(n=1) & a_1\\(n\geq2) & -a_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{cases}$이다.

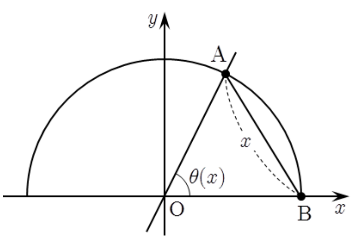
따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=a_1+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{-a_1\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}\right\}=a_1-a_1\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}a_1$

이고 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=100$이므로 $\frac{2}{3}a_1=100,\ a_1=150$

26. 정답 : 4

X는 $0\leq X\leq2$의 의 모든 실수값을 가질 수 있는 연속확률변수이므로 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 확률밀도함수의 정의에 의해 다음 등식이 성립한다.

$$\mathrm{P}(0\leq X\leq x)=\int_{0}^{x}f(t)\,dt\ \cdots\cdots ㉠$$



$\mathrm{P}(0\leq X\leq x)$의 값은 $\overline{\mathrm{AB}}=x$일 때 점 P가 부채꼴 OAB의 경계 혹은 내부에 선택되어질 확률과 같으므로 $\overline{\mathrm{AB}}=x$에 대하여 ∠AOB를 $\theta(x)$라 정의하면 다음 두 개의 등식이 성립한다.

$$\sin\frac{\theta(x)}{2}=\frac{x}{2}\ \cdots\cdots ㉡$$

$$\mathrm{P}(0\leq X\leq x)=\frac{\text{부채꼴 OAB의 넓이}}{\text{영역 D의 넓이}}=\frac{\frac{1}{2}\theta(x)}{\frac{\pi}{2}}=\frac{\theta(x)}{\pi}\ \cdots ㉢$$

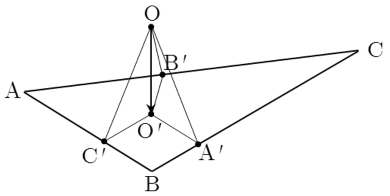
㉠, ㉢을 연립하여 양 변을 미분하면 $f(x)=\frac{1}{\pi}\theta'(x)$를 알 수 있다.

$$\mathrm{E}(X)=\int_{0}^{2}xf(x)\,dx=\int_{0}^{2}\frac{1}{\pi}x\theta'(x)\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2}2\theta'(x)\sin\frac{\theta(x)}{2}\,dx\ \ (\because ㉡)$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}4\sin t\,dt\ \left(\theta(x)=t\text{로 치환}\right)=\frac{4}{\pi}$$

따라서 $\frac{4}{\pi}=\frac{a}{\pi}$이고 $a=4$

27. 정답 : 29

점 O에서 $\triangle ABC$를 포함하는 평면으로 내린 수선의 발을 O'라 하고 O에서 세 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 A', B', C'라 하면 삼수선 정리에 의해 $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$는 각각 선분 BC, CA, AB에 수직한다. 그런데 $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$, $\overline{OC'}$는 모두 구의 반지름과 같으므로 세 삼각형 $OO'A'$, $OO'B'$, $OO'C'$는 모두 합동이고 따라서 O'는 삼각형 ABC의 내심과 같다.



$\triangle ABC$의 내심을 I라 하면

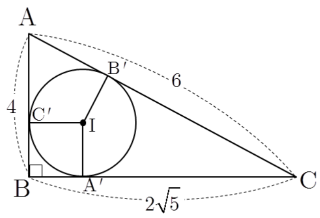
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OP}\right)$$

$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP} \quad \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IO}\text{는 서로 수직}\right)$$

$\overrightarrow{OP}$는 크기가 구의 반지름과 같고 모든 방향을 가질 수 있으므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}$가 최대가 되려면 $\overrightarrow{OP}$가 $\overrightarrow{AB}$와 같은 방향을 가져야 하고 그 때의 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값은 $|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{OP}|$와 같다. 따라서 구의 반지름을 R이라 하면

$$100=\left\{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}\text{의 최댓값}\right\}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CI}+4R \quad \cdots\cdots ㉠$$

삼각형 $\triangle ABC$의 내접원의 반지름을 r이라 하면 오른쪽 그림에서 $\overline{AC'}+\overline{A'C}=\overline{AC}$이므로 $(4-r)+(2\sqrt{5}-r)=6$이고 $r=\sqrt{5}-1$이다.



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CA'}+\overrightarrow{A'I}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'I}=-4r=4-4\sqrt{5}$

를 ㉠에 대입하면

$4R=100-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CI}=100-4+4\sqrt{5}=96+4\sqrt{5}$

$R=24+\sqrt{5}$

따라서 $p=24,\ q=5$이고 $p+q=29$

28. 정답 : 2

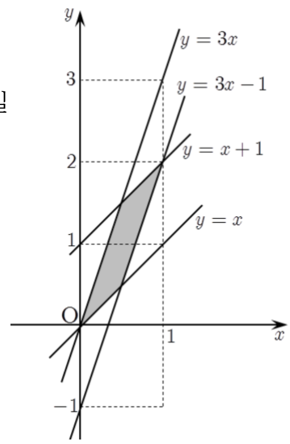
$0<x<1$인 임의의 실수 x에 대하여 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(x^*)$를 만족하는 $0<x^*<x$가 존재한다. $0<x^*<1$이므로 (나)조건에 의하여

$$1\leqq\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\leqq 3 \iff x\leqq f(x)\leqq 3x \quad (0\leqq x<1)\ \cdots ㉠$$

$0<x<1$인 임의의 실수 x에 대하여 $\dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}=f'(x^*)$를 만족하는 $x<x^*<1$가 존재한다. $0<x^*<1$이므로 (나)조건에 의하여

$$1\leqq\frac{f(1)-f(x)}{1-x}\leqq 3 \iff x+1\leqq f(x)\leqq 3x-1 \quad (0<x\leqq 1)\ \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 만족하는 함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림의 색칠 된 부분에 존재한다. 오른쪽 그림의 색칠 된 부분의 경계에서 윗부분을 그래프로 가지는 함수를 $g(x)$, 아랫부분을 그래프로 가지는 함수를 $h(x)$라 하면



$$g(x)=\begin{cases}\left(0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\right) & 3x\\ \left(\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1\right) & x+1\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}\left(0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\right) & x\\ \left(\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1\right) & 3x-1\end{cases}$$

이고 $h(x)\leqq f(x)\leqq g(x)$가 성립한다. 따라서 다음 부등식이 성립한다.

$$\int_0^1 h(x)\,dx\leqq\int_0^1 f(x)\,dx\leqq\int_0^1 g(x)\,dx$$

$$\iff \frac{3}{4}\leqq\int_0^1 f(x)\,dx\leqq\frac{5}{4} \quad \cdots\cdots (*)$$

부등식 (*)에서 등호는 $0\leqq x\leqq 1$에서 $h(x)=f(x)$이거나 혹은 $f(x)=g(x)$일 때 성립한다. 하지만 $f(x)$는 미분가능한 함수이므로 $g(x), h(x)$와 서로 같을 수 없고 따라서

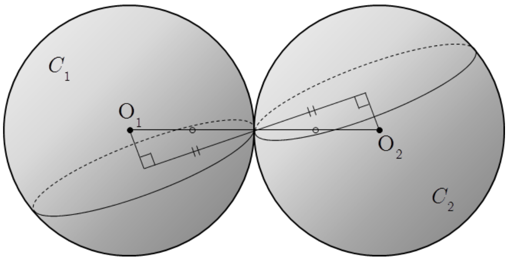
$$\frac{3}{4}<\int_0^1 f(x)\,dx<\frac{5}{4}$$

이다. 그런데 $\dfrac{3}{4}<k<\dfrac{5}{4}$인 임의의 k에 대하여 주어진 조건을 만족하는 미분가능한 함수 $f(x)$가 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=k$를 만족하도록 할 수 있으므로 $a<\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx<b$를 만족하는 a의 최댓값은 $\dfrac{3}{4}$, b의 최솟값은 $\dfrac{5}{4}$이다. 따라서 $4(b-a)$의 최솟값은 $4\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{3}{4}\right)=2$

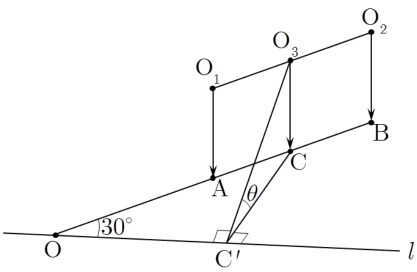
29. 정답 : 150

두 구 C_1, C_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하자. 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$와 선분 AB는 서로 평행하고 선분 AB의 연장선이 평면 β와 만나기 때문에 평면 β는 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$와 서로 평행하지 않다.

선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$와 평행하지 않은 평면 β가 반지름의 길이가 서로 같은 두 개의 구 C_1, C_2를 잘라서 생기는 두 원의 반지름이 서로 같으려면 β가 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$의 중점을 지나야 한다.



두 평면 α, β의 교선을 l이라 하고 두 점 O_1, O_2의 중점을 O_3라 하자. A, B가 각각 C_1, C_2와 평면 α의 접점이므로 O_1, O_2에서 평면 α로 내린 수선의 발은 A, B이다. O_3에서 평면 α로 내린 수선의 발을 C라 하고 점 C에서 직선 l로 내린 수선의 발을 C$'$이라 하면 삼수선의 정리에 의해 두 선분 $\mathrm{O}_3\mathrm{C}'$, CC'는 서로 수직이다. 이면각의 정의에 의해 $\theta = \angle \mathrm{O}_3\mathrm{C}'\mathrm{C}$ 이고



$\cot\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{CC}'}}{\overline{\mathrm{O}_3\mathrm{C}}}$이다.

구의 반지름을 r이라 하면

$$\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2} = 2r,\ \ \overline{\mathrm{AC}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}} = r$$

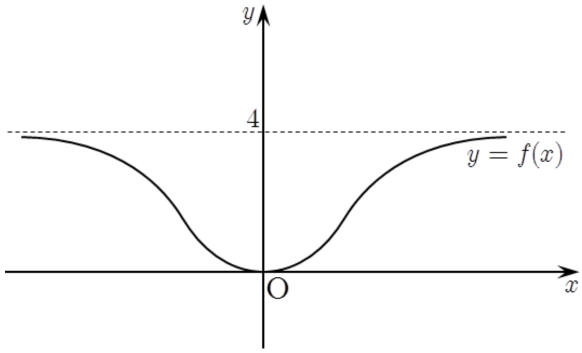
$$\overline{\mathrm{CC}'} = \overline{\mathrm{OC}}\sin 30^\circ = 3r\sin 30^\circ = \frac{3}{2}r,\ \ \overline{\mathrm{O}_3\mathrm{C}} = r$$

따라서 $100\cot\theta = 100\dfrac{\overline{\mathrm{CC}'}}{\overline{\mathrm{O}_3\mathrm{C}}} = 100 \cdot \dfrac{3}{2} = 150$

30. 정답 : 52

$f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2+a^2}$, $f'(x) = \dfrac{8a^2x}{(x^2+a^2)^2}$, $f''(x) = \dfrac{8a^2(a^2-3x^2)}{(x^2+a^2)^3}$

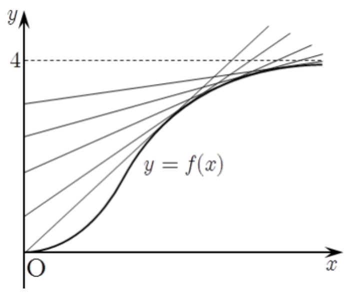
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4$



$y=f(x)$의 그래프가 위 그림과 같으므로 (가)와 (나)에서 $b=4$임을 쉽게 알 수 있다. …… ㉠

$y=f(x)$의 그래프가 y축 대칭이므로 $(0, k)$에서 $y=f(x)$로 그은 두 접선은 서로 y축 대칭이고 두 접선이 이루는 각도는 $x>0$인 부분에 그은 접선과 x축의 양의 방향이 이루는 각도의 2배와 같다.

오른쪽 그림에서 알 수 있듯이 $(0, k)$ $(0 \leqq k < 4)$에서 $y=f(x)$로 그은 접선과 x축의 양의 방향과 이루는 각도는 $k=0$일 때 최댓값을 가진다.



$\sin\theta_0 = \dfrac{3}{5}$ $\left(0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\cos\theta_0 = \dfrac{4}{5}$이고 따라서 $\tan\dfrac{\theta_0}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta_0}{1+\cos\theta_0}} = \dfrac{1}{3}$이다.

(다)조건을 만족하려면 $(0, 0)$에서 $y=f(x)$의 그래프의 $x>0$인 부분으로 그은 접선의 기울기가 $\tan\dfrac{\theta_0}{2} = \dfrac{1}{3}$보다 작거나 같아야 한다. …… ㉡

$t>0$에 대하여 $(t, f(t))$에서 $y=f(x)$로 그은 접선의 방정식은

$y = \dfrac{8a^2t}{(t^2+a^2)^2}(x-t) + \dfrac{4t^2}{t^2+a^2}$이고 원점을 지나야 하므로

$x=0$, $y=0$을 대입하여 $t=a$를 얻는다. 즉, 원점에서 $y=f(x)$로 그은 접선은 $(a, f(a))$에서 $y=f(x)$에 접한다. …… ㉢

㉡, ㉢에 의하여 $f'(a) = \dfrac{2}{a} \leqq \dfrac{1}{3}$이고 $a \geqq 6$

㉠에 의하여 $b=4$이고 a^2+b^2의 최솟값은 $a=6$일 때 $36+16=52$