제 2교시

2015학년도 카이독 수능 대비 온라인 모의고사

수학 영역
(B 형)

성명	

수험번호						-				

○ 자신이 선택한 유형(A형/B형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정확히 기재하시오.

저문 들길에 서서 푸른 별을 바라보자

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 정답에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점, 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

수학 영역(B형)

제 2교시

홀수형

5 지 선 다 형

1. $\log_{\sqrt{2}} 3 \cdot \log_3 4\sqrt{2}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt{4n^2-5}\right)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 함수 $f(x)=xe^{-x^2}$에 대하여 $f'(\sqrt{2})$의 값은? [2점]

① $-\frac{3}{e^2}$ ② $-\frac{2}{e^2}$ ③ $-\frac{1}{e^2}$ ④ $\frac{1}{e^2}$ ⑤ $\frac{2}{e^2}$

4. x, y에 대한 연립일차방정식 $\begin{pmatrix} 2^{t+1} & 2^t \\ 1 & 4^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x+7y \\ 2y \end{pmatrix}$가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 모든 실수 t의 값의 합은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

제작자 : 카이독 (siwxjed33@naver.com)

5. 두 사건 A, B에 대하여

$P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$

를 만족시킬 때, $P(B^C|A)$의 최댓값과 최솟값이 각각 M, m이다. $M+m$의 값은? (단, B^C는 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

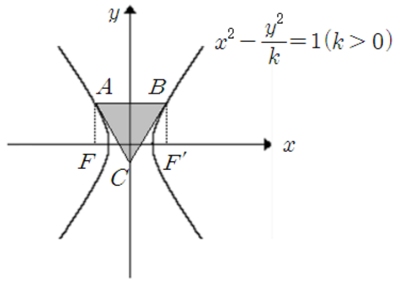
6. 자연수 n에 대하여 x에 대한 부등식

$$(x-n^2+3)(x-2n)(x-1) < 0$$

의 자연수인 해의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [3점]

① 241 ② 243 ③ 245
④ 247 ⑤ 249

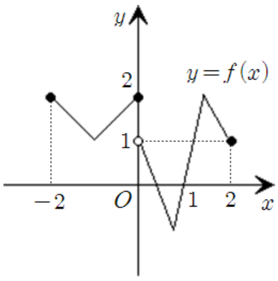
7. 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{k} = 1\,(k>0)$ 의 두 초점 F, F'에서 x축에 수직인 직선을 그을 때, 쌍곡선과 만나는 교점 중 y좌표가 양수인 점을 각각 A, B라 하자. 점 A, B에서 쌍곡선의 접선을 그을 때, 두 접선의 교점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [3점]



① $2\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

제작자 : 카이독 (siwxjed33@naver.com)

8. 닫힌 구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 아래와 같다.



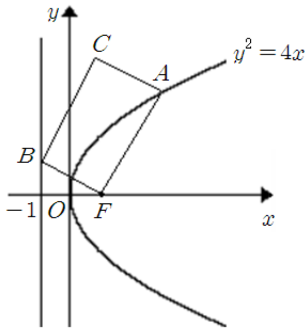
함수 $f(x)$를 $(n-1)$번 합성한 함수를 f^n이라 하자. 예를 들어 $f^1=f(x)$, $f^{n+1}=(f \circ f^n)(x)$이다. 함수 f^k가 $x=0$에서 연속이도록 하는 자연수 k의 최솟값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

9. 함수 $f(x)=2\sin x(k\sin x+\cos x)\ (0 \le x \le \frac{\pi}{2})$가 $x=\theta$에서 최댓값 2를 가질 때, $\tan\theta$의 값은? (단, $k>0$이다.)[3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ 2 ⑤ 3

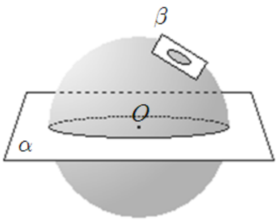
10. 그림과 같이 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 A, 직선 $x=-1$위의 점 B, 점 $F(1, 0)$에 대하여 $\angle AFB=\frac{\pi}{2}$, $\overline{AF}:\overline{BF}=3:2$를 만족한다. 좌표평면 위의 점 C에 대하여 사각형 $AFBC$가 직사각형일 때, 직사각형$AFBC$의 둘레를 구하면? [3점]

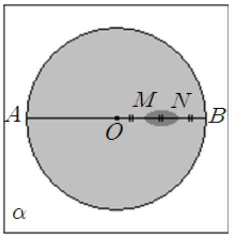


① $\frac{65}{6}$ ② $\frac{25}{2}$ ③ $\frac{85}{6}$ ④ $\frac{95}{6}$ ⑤ $\frac{35}{2}$

제작자 : 카이독 (siwxjed33@naver.com)

11. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 구의 중심 O를 지나는 평면 α에 의하여 잘린 구의 단면인 원을 C_1이라 하자. 평면 α와 한 직선을 공유하는 평면 β에 대하여 두 평면 α, β의 교선은 원 C_1의 한 지름 AB의 연장선과 수직일 때, 평면 β에 의하여 잘린 구의 단면인 원을 C_2라 하자. 원 C_2를 평면 α에 정사영시킨 도형과 선분 AB와의 교점을 M, N이라 할 때, 두 점 M, N은 선분 OB를 삼등분한다. 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]





① $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ ② $\dfrac{\sqrt{10}+1}{9}$ ③ $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{8}$
④ $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{10}+2}{6}$

12. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 7$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$n(a_{n+1} - 3a_n) = 3(3^n + a_n - 1) - 2n$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여

$$\frac{a_{n+1}-1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}} = \frac{a_n - 1}{n \cdot 3^n} + \boxed{\text{(가)}} \ (n \geq 1)$$

이다. $b_n = \dfrac{a_n - 1}{n \cdot 3^n}$이라 하면

$$b_{n+1} = b_n + \boxed{\text{(가)}} \ (n \geq 1)$$

이고, $b_1 = \boxed{\text{(나)}}$ 이므로

$$b_n = \frac{\boxed{\text{(다)}}}{n} \ (n \geq 1)$$

이다. 그러므로

$$a_n = 3^n \times \boxed{\text{(다)}} + 1 \ (n \geq 1)$$

이다.

위의 (나)에 알맞은 수를 p, (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때 $\dfrac{g(p)}{p \times f(p)}$의 값은? [3점]

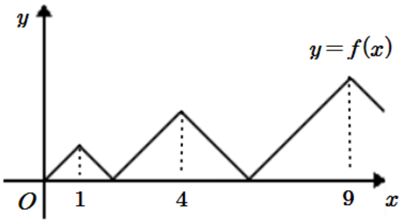
① 15 ② 12 ③ 9 ④ 6 ⑤ 3

제작자 : 카이독 (siwxjed33@naver.com)

[13 ~ 14] 그림은 $y=f(x)$의 그래프를 나타낸 것으로 양의 실수의 전체 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x)=-|x-n^2|+n\ (n^2-n \le x < n^2+n,\ n=1,2,3,\ \cdots)$$

13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. 방정식 $f(x)=0$의 양의 실근을 작은 순부터 차례대로 x_1, x_2, x_3, $\cdots$ 라 할 때, 수열 $\{a_m\}$을 다음과 같이 정의한다.

$$a_m = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kx_m}{n}\right)$$

$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{a_m}{m}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

14. 함수 $g(x)$를 $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)$라 할 때, 닫힌 구간 $[0, 200]$에서 무리방정식 $\frac{[g(x)+20]}{[g(x)+2]}+\sqrt{[g(x)-3]}=5$ 를 만족시키는 서로 다른 정수 x의 개수는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.) [4점]

① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

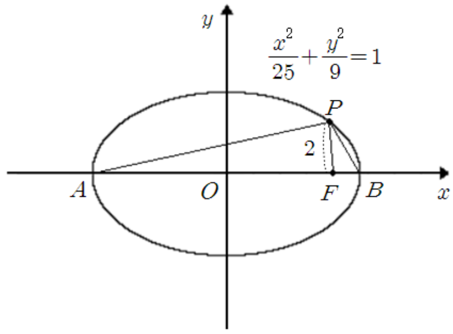
15. 어느 재단에서 어린이들을 위한 공연을 계획하는데, 구성되는 공연은 2시간 분량의 마술 쇼, 1시간 분량의 연극으로 모두 두 종류라고 한다. 재단에서 다음과 같은 규칙으로 일일 공연 계획을 세울 때, 아래의 공연 계획표를 세울 수 있는 계획 중 한 가지로 생각할 수 있다. 이 때, 세울 수 있는 일일 공연 계획의 모든 경우의 수는?
(단, 휴식 시간은 1시간 단위로 배정된다.) [4점]

(가) 오전 9시에 첫 공연을 시작하고, 밤 11시에 마지막 공연이 끝난다.
(나) 마술 쇼와 연극은 각각 2회, 3회씩 공연한다.
(다) 각 공연 사이에는 적어도 1시간 이상의 휴식을 가진다.

일일 공연 계획표	
공연 시간	공연 내용
9:00 ~ 10:00	**연극**
10:00 ~ 13:00	휴식
13:00 ~ 15:00	**마술 쇼**
15:00 ~ 16:00	휴식
16:00 ~ 17:00	**연극**
17:00 ~ 19:00	휴식
19:00 ~ 20:00	**연극**
20:00 ~ 21:00	휴식
21:00 ~ 23:00	**마술 쇼**

① 160 ② 180 ③ 200 ④ 220 ⑤ 240

16. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$의 한 초점 F와 타원 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{FP}=2$이다. 타원의 장축 위의 꼭짓점을 A, B라 할 때, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값은? [4점]



① 80 ② 82 ③ 84 ④ 86 ⑤ 88

제작자 : 카이독 (siwxjed33@naver.com)

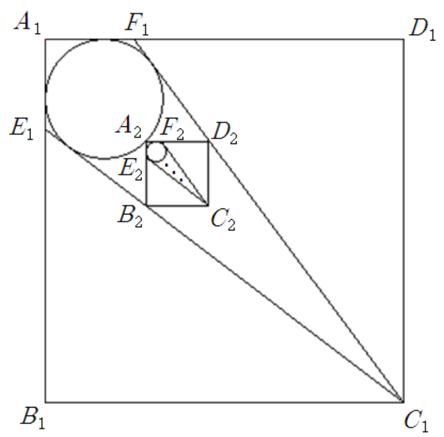
17. 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$, $2f'(x)$, $f''(x)$는 이 순서대로 공비가 $g(x)$인 등비수열을 이룬다. (나) $g(2)=1$

$\int_0^1 \frac{1}{g(2x)}dx$의 값은? (단, $f'(x)>0$, $g(x)>0$ 이다.) [4점]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

18. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1B_1, 선분 A_1D_1을 $1:3$으로 내분하는 점을 각각 E_1, F_1이라 할 때, 사각형 $A_1E_1C_1F_1$의 네 변에 내접하는 원을 R_1이라 하자.
원 R_1, 선분 C_1E_1, 선분 C_1F_1에 각각 점 A_2, B_2, D_2를 잡고 원 R_1의 내부를 지나지 않는 정사각형을 $A_2B_2C_2D_2$을 그린 후 선분 A_2B_2, 선분 A_2D_2를 $1:3$으로 내분하는 점을 각각 E_2, F_2라 할 때, 사각형 $A_2E_2C_2F_2$의 네 변에 내접하는 원을 R_2라 하자.
이와 같은 방법으로 자연수 $n(n \geq 2)$에 대하여 원 R_{n-1}, 선분 $C_{n-1}E_{n-1}$, 선분 $C_{n-1}F_{n-1}$에 각각 점 A_n, B_n, D_n을 잡고 원 R_{n-1}의 내부를 지나지 않는 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$을 그린 후 선분 A_nB_n, 선분 A_nD_n을 $1:3$으로 내분하는 점을 각각 E_n, F_n이라 할 때, 사각형 $A_nE_nC_nF_n$의 네 변에 내접하는 원을 R_n이라 하자.
원 R_n의 둘레를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]



① $\frac{64}{38+\sqrt{2}}\pi$　② $\frac{64}{40+\sqrt{2}}\pi$　③ $\frac{64}{42+\sqrt{2}}\pi$
④ $\frac{64}{44+\sqrt{2}}\pi$　⑤ $\frac{64}{46+\sqrt{2}}\pi$

제작자 : 카이독 (siwxjed33@naver.com)

19. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A+B=AB,\ AB^2-4BA^{-1}=2E$$

을 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, A^{-1}은 A의 역행렬이고, E는 단위행렬이다.) [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $B-E$의 역행렬이 존재한다.
ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. $B=A^3-A^2+A$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 0을 제외한 실수 전체의 집합에서 함수 $G(t)$를 정규분포 $N(t^2+1, 4t^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여

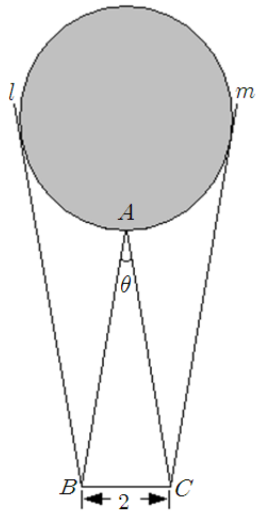
$$G(t)=P(X\le t)\ \ (t\ne 0)$$

라고 정의한다. 함수 $\left|G(t)-\frac{k}{100}\right|$가 오직 세 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 자연수 k의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값을 위의 표준정규분포표를 이용하여 구하면? [4점]

z	$P(0\le Z\le z)$
0.5	0.19
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48

① 36 ② 37 ③ 38 ④ 39 ⑤ 40

21. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 이고, $\overline{BC}=2$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 점 B에서 선분 AC와 평행한 직선 l을, 점 C에서 선분 AB와 평행한 직선 m을 그린다고 하자. $\angle BAC=\theta$라 할 때, 점 A를 지나고 직선 l, m에 접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to\pi-0}\{(\pi-\theta)^2\times S(\theta)\}$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$이고, 원은 삼각형 ABC의 내부를 지나지 않는다.)[4점]



① 4π ② 8π ③ 16π ④ 32π ⑤ 64π

단 답 형

22. $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{1}{\cos x\cos 5x}$의 값은? [3점]

23. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2+a_3+a_4+a_5=5a_1$이 성립할 때, $a_k=2a_1$ 을 만족하는 자연수 k의 값은? (단, $a_1\neq0$) [3점]

24. 어느 물질 X는 물에 담그면 물을 흡수하여 질량이 늘어난다고 한다. 질량이 $4g$인 물질 X를 물에 담근 후 t분이 지났을 때의 질량을 $M(g)$이라 할 때, 다음 관계식이 성립한다.

$$M = \log_4(a+t)+b \text{ (단, } a,\ b\text{는 상수)}$$

질량이 $4g$인 물질 X를 물에 담근 후 12분이 지났을 때 질량이 $6g$이었고, 이로부터 T분이 지났을 때 질량이 $\frac{20}{3}g$ 이었다. $5T$의 값은? (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.) [3점]

25. 공간좌표에서의 점 $A(1,3,2)$에 대하여 $\overline{AB} = \sqrt{2}$를 만족하도록 움직이는 점 B가 있다. 직선 AB는 xy평면과 만나고 이 때의 교점을 P라 하자. 점 P가 선분 AB를 $2:1$로 외분할 때, 선분 OP의 길이의 최댓값과 최솟값이 각각 $M,\ m$이다. Mm의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

26. 표본공간 $S = \{1,2,3,4,5,6\}$의 부분집합인 두 사건 $A,\ B$에 대하여 두 사건 $A,\ B$가 서로 독립일 때, $P(A) > P(B)$를 만족하는 두 사건 $A,\ B$의 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는? [4점]

제작자 : 카이독 (siwxjed33@naver.com)

27. 좌표평면에서 두 일차변환 f, g를 나타내는 행렬이 각각

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

이다. 점 $A(1,\ 1)$이 합성변환 $f \circ g$에 의해 옮겨지는 점을 B라 할 때, 두 점 A, B는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB} = \dfrac{15}{4}$

(나) 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{4}{3}$이다.

$32k^2$의 값은? (단, $k > 1$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$이다.) [4점]

28. 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x) = ax^2 + bx\ (0 \le x \le 1,\ a \ne 0)$$

이다. $E(X) \le \dfrac{5}{8}$를 만족시키는 점 $P(a,\ b)$가 나타내는 도형 전체의 길이가 l일 때, $4l^2$의 값은? [4점]

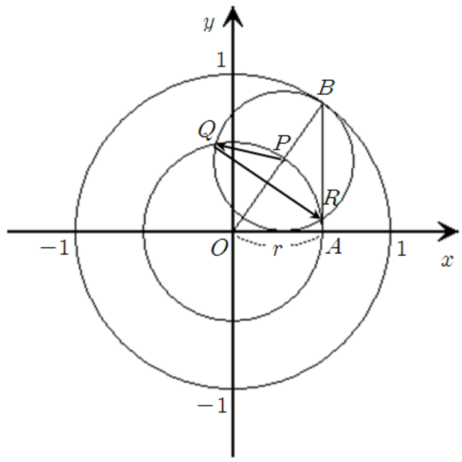
제작자 : 카이독 (siwxjed33@naver.com)

29. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f(-x) = -f(x)$
(나) $f(x+2) = f(x) + 2$
(다) $f'(x) \geq 0$

자연수 n에 대하여 원점에서 닫힌 구간 $[2n-1, 2n+1]$에 속하는 $y = f(x)$ 그래프 위의 한 점에 그은 접선의 기울기를 k_n이라 할 때, 위의 조건을 만족하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\alpha < k_8 < \beta$ 이다. $240(\beta - \alpha)$의 최솟값은? [4점]

30. 그림과 같이 원 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$, $C_2 : x^2 + y^2 = r^2 \,(0 < r < 1)$이 좌표평면 위에 있다. 점 $A(r, 0)$에서 x축에 수직인 직선을 그었을 때 원 C_1과 만나는 y좌표가 양수인 점을 B, 선분 OB와 원 C_2와의 교점을 P라 하자. 점 P를 중심으로 하고 x축에 접하는 원 C_3를 그릴 때, 원 C_2와 원 C_3가 만나는 점을 Q, R이라 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$에 대하여 내적 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR}$의 최솟값은 $p + q\sqrt{13}$ 이다. $27(p+q)$의 값은? (단, O는 원점이고, p, q는 유리수이다.) [4점]



제작자 : 카이독 (siwxjed33@naver.com)

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.