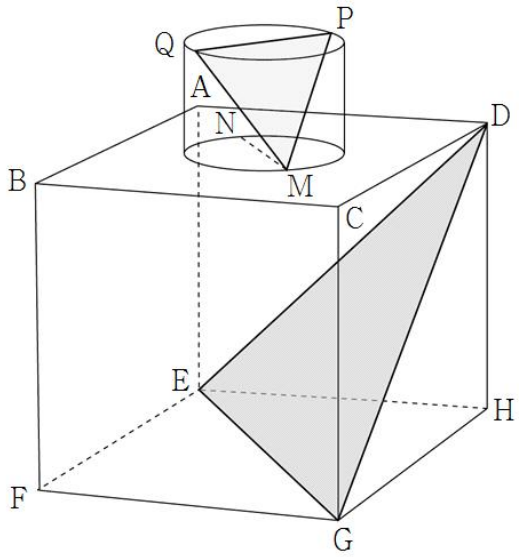
7월 인천교육청 30번 이른바 “연속정사영?” 에 대하여



인천 교육청 30번 문제입니다.
삼각형 MPQ의 평면 DEG 로의 정사영의 넓이를 구하라는 문제인데
의외로 많은 학생들이
삼각형 MPQ를 평면 ABCD에 정사영시키고
다시 그 정사영을 평면 DEG 로 정사영시키는 방식으로 계산했고
정답과 같은 수치를 찾아냈습니다.

삼각형 MPQ를 평면 ABCD가 이루는 예각을 θ_1
평면 ABCD와 평면 DEG 가 이루는 예각을 θ_2
삼각형 MPQ와 평면 DEG 가 이루는 예각을 θ

라 하면 결과적으로 $\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\theta = \frac{1}{3}$ 이므로

$\cos\theta_1 \times \cos\theta_2 = \cos\theta$ 의 결과를 보이기 때문입니다.

이 방법은 명백한 오류인데 묘한 것은
1. 이렇게 계산해서 정답을 찾은 수험생이 의외로 많다는 것
2. 의외로 이런 방식으로 계산하여 맞는 경우가 종종 있다는 것
3. 왜 자주 정답과 같은 결과가 나오는지 명쾌하게 설명되지 않고 있다는 것
입니다.

따라서, 이에 대해 일반적인 검토를 해 보겠습니다.

공간상에서 두 평면 α, β과 또 다른 평면 π가 있습니다.

두 평면 α, β가 이루는 예각을 θ
두 평면 α, π가 이루는 예각을 θ_1
두 평면 β, π가 이루는 예각을 θ_2

라 하고

$\cos\theta_1 \times \cos\theta_2 = \cos\theta$ 인 일반적인 조건을 찾아봅시다.

계산의 편의상 평면 π를 xy평면으로 두고
π의 법선벡터 $\vec{e} = (0,0,1)$
평면 α의 법선벡터 $\overrightarrow{h_1} = (a,b,c)$
평면 β의 법선벡터 $\overrightarrow{h_2} = (p,q,r)$
라 하면

$$\cos\theta_1 \times \cos\theta_2 = \frac{|c|}{|\overrightarrow{h_1}|} \times \frac{|r|}{|\overrightarrow{h_2}|} = \frac{|cr|}{|\overrightarrow{h_1}||\overrightarrow{h_2}|}$$

$$\cos\theta = \frac{|ap+bq+cr|}{|\overrightarrow{h_1}||\overrightarrow{h_2}|}$$

이므로

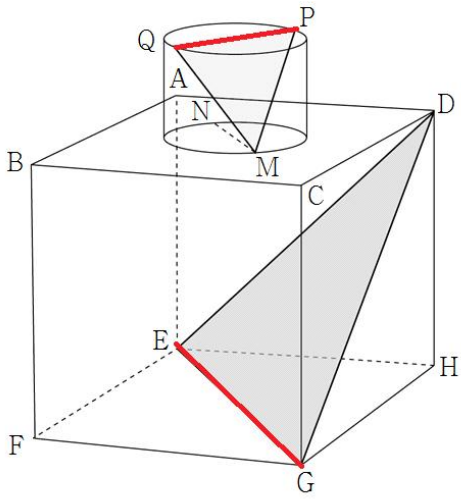
$ap+bq=0$ 이면 일반적으로 $\cos\theta_1 \times \cos\theta_2 = \cos\theta$가 성립합니다.

그런데
평면 α와 평면 π (xy평면)의 교선의 방정식이 바로 $ax+by+d=0$의 꼴이고
평면 β와 평면 π (xy평면)의 교선의 방정식이 바로 $px+qy+s=0$의 꼴이므로

결국 두 교선 $ax+by+d=0$, $px+qy+s=0$ 가 수직인 것이

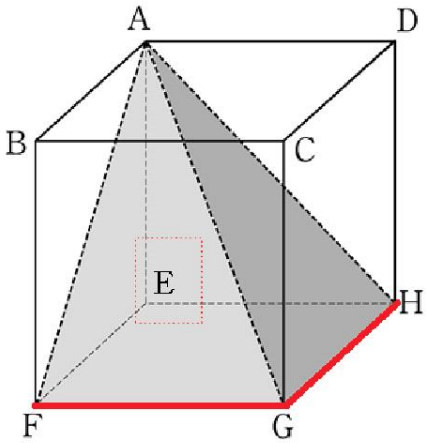
필요충분조건이 되겠습니다.

7월 인천교육청 30번 문제에서도 두 교선인 선분EG와 선분PQ가
수직이기 때문에 정답과 같은 결과가 나온 것이었군요.



$\overline{EG} \perp \overline{PQ}$

다른 기출문제 중에 적용될 만한 문제는



$\overline{FG} \perp \overline{GH}$

2007학년도 6번 정도 되겠습니다.
이외에도 EBS 등에도 찾으면 좀 있습니다.

임의의 평행 아닌 두 평면은 그 두 평면과의 두 교선이 수직인 평면을
언제나 찾아낼 수 있으므로 보편성은 있겠으나
시험문제에서는 위의 문제들처럼 직육면체(정육면체) 속에 포함된
몇몇 사례에서만 주로 용이하므로 이면각에 대한 강력한 솔루션이
되지는 못할 거 같습니다.

(끝)