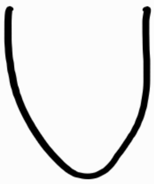
추가사항

①  김현우식 이차함수.

② $\int x f'(x)$ $\int x |f'(x)| dx$

③ $\int f'(x)$ vs $\int |f'(x)|$ 그래프 차이

$\int f' dx$ vs $\int |f'| dx$

N차

① 창무옹

② 극점찾기

③ 미분계수 확인

④ 미분가능성확인

주인

함수의 제시

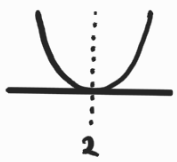
$g(x) = |f(x)|$ → $g(x)$는, $g(x) \geq 0$ 이다. 즉, $g(\alpha) = 0$이면 $g(x)$는 $x = \alpha$에서 "극소"이다.

→ $g(x)$가 미분가능하다면, $g(\beta) = 0$ 인 β에서 $g'(\beta) = 0$ 이다.

ex

$g(x) = |2x^2 + ax + b|$, $g(x)$는 미분가능 & $g(2) = 0$ 이면

$g(x)$가 미분가능하므로 $D \leq 0$이여야 함을 알 수 있는데, $g(2) = 0$이므로 (이차식의 실근이 존재하므로)



꼴이여야 함을 알 수 있다.

문자가 2개이고 식이 1개인데 함수가 결정되는 경우이며, 이런 경우를 많이 접해보고 잘 정리해두는 것이 수학을 잘하게 되는 길이라고 볼 수 있다.

ex

$g(x) = |f(x)|$ 이고, $g(x) = (x-3)(x-5)(ax^2+bx+c)$일 때, $g(1) = 5$이라는 조건식 하나만으로도 a, b, c 문자 세개를 뽑아낼 수 있다. 이것이 '함수의 제시' 유형의 매력이다.

$\because$ $g(x) = |f(x)| \geq 0$ 이고, 그로 인해 $g(x) = (x-3)(x-5)a(x-3)(x-5)$ 로 정리 되고 시작한다!

$|g(x)| = \int_3^x f(t)\,dt$ → $\int_3^x f(t)\,dt$는 항상 실전 마가 이므로, $|g(x)|$도 실전마가 이다.

→ $g(3) = 0$ $\xrightarrow{\hspace{2em}}$ $g'(3) = 0$ $\xrightarrow{\hspace{2em}}$ 무조건 $x=3$에서 극"솟"값
(∵ 실전마가 ∩ ≥0) (∵ ≥0)

(CMT)

$\int_a^x f(t)\,dt$ 꼴이 항상 실전 마가라는 것과, $|g(x)|$ 꼴이 항상 양수라는 것을 동시에 생각하고 있어야지, 문자 개수에 비해 식이 부족하게 나온 것 같을 때도 당황하지 않고 문제를 풀어 나갈 수 있다.

"이런 조건들을 얼마나 많이 경험해 보았느냐"가 준위권 - 상위권을 나누는 기준 중 하나라고 생각하기에 이런 식으로 딱딱하게라도 암기시키는 것이다

$|f(x)+g(x)|$

① $f(x) - (-g(x))$로 쪼개서 해석.

↳ 둘 중 하나가 직선일 때 유용함.

② $f(x)+g(x) = h(x)$로 두고

$h(x)$를 상수와 비교하든

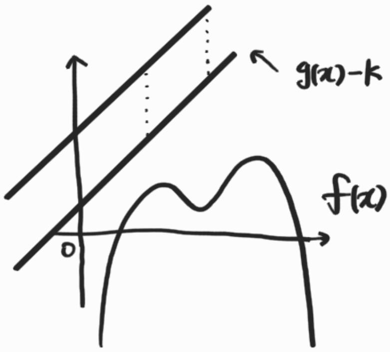
$h(\alpha)=0 \rightarrow h'(\alpha)=0$을 이용하든,

h를 미분해서 그려버리든...

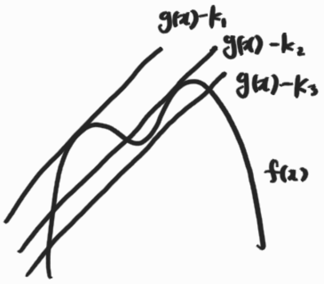
판별식 등을 쓰든...

ex

① $|f(x) - g(x) + k|$, $g(x)$는 기울기가 1인 직선



← k에 따라서 높낮이가 바뀜.

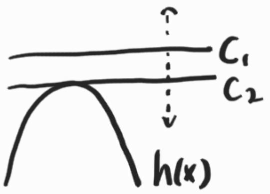


← k_1, k_2, k_3을 기준으로 문제가 풀려나갈 것임.

②

$|f(x)+g(x)-c|$, f는 이차, g는 일차

→ $f(x)+g(x)=h(x)$로 두고, 다른 조건을 통해 $h(x)$를 유추한뒤



← C_2일때를 기준으로 문제가 풀려나갈 것임을 알 수 있음.

$|f(x)+g(x)-c|$, f는 이차, g는 일차

→ 판별식을 써서 해결할 수도 있음.

$f(g(x)) = x^2 + 2x + 1$

- ① $f(g(x))$는 실전미가
- ② $f(g(x))$는 이계 미분 가능
- ③ $f(g(x)) \geq 0$ 만족 at 모든 실수 x
- ④ $f(g(x))$는 $x=1$ 대칭.

(CMT)

"뭔가 합성해서 나온 결과가 다항함수인 경우"는 사설 킬러 30번의 단골 소재이다. 위의 명제들은 너무 당연하고, 당연한 나머지 시험장에서 조건으로 떠올려서 써먹기가 정말 힘들다.

"합성결과가 다항함수"유형의 경우, 그 다항함수의 최대·최소, 우함수/기함수/대칭성, 범위 등을 전부 고려해주어야 하며, 미분·이계 미분 가능하다는 것도 가슴속에 들고 있어야 한다.

$|f(x)| = |g(x)|$

$\boxed{1}$ 방정식

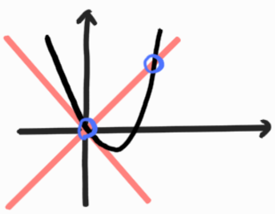
→ $f(x) = \pm g(x)$의 근을 찾아라.

$\boxed{2}$ 항등식.

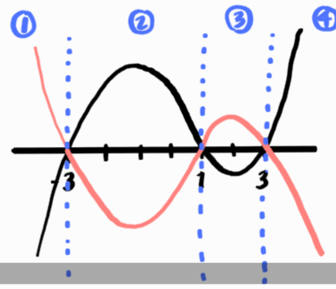
f를 통해 g를 선택하여 그리거나
g를 통해 f를 선택하여 그리는 구조의 문제.

ex

$\boxed{1}$ 방정식 $|x^2 - x| = |x|$



$\boxed{2}$ 항등식 $f(x) = |g(x)|$, f는 연속. $g(x) = (x+3)(x-1)(x-3)$



영역별로, 조건에 맞게 검정-빨강을 선택하면 됨!

좆같은 관계항등식 꼴

ex) $f(x) + f(x+1) = \frac{5}{2}x^2+3$ 등으로 제시

→ 별수 없다. 아래 항목을 전부 알고, 문제 조건 눈치보며 다 해보는 수밖에

① 대입가능함을 계속 인지

② 양변 부정적분 가능, 적분상수 고려 必

③ 양변 도함수곱해 치환그냥적분, 치환현시적분가능

④ 평행이동하고, 더하거나 빼서 주기처럼 만들 수 있음.

⑤ 양변 미분 가능

⑥ 적분구간 밀기 / 당겨오기 / 대칭쪼개기 / 평행쪼개기 가능

ex

$\int_0^2 f(t)dt$를 물으면: $f(x)+f(x+1)$를 그냥 통째로 $\int_0^1$해주면

$\int_0^1 f(x)+f(x+1) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \left(\frac{5}{2}x^2+3\right)dx$로 어이없게 끝남

눈치채기 Advanced

• $a+b > ab \cap a, b$는 정수 (정수조건 문제의 난이도 상한선)

$\Rightarrow ab-a-b<0$ 으로 이항

$\Rightarrow ab-a-b+1 < 1$

$\Rightarrow (a-1)(b-1) < 1$ 로 인수분해 가능.

$\Rightarrow a-1$ 정수 $\cap$ $b-1$ 정수이므로 $(a-1)(b-1)$ 정수

$\Rightarrow (a-1)(b-1) \leq 0$ 으로 전환 가능.

$\because$ $m.n$이 정수면 $mn <$ 정수$p \Leftrightarrow mn \leq p-1$

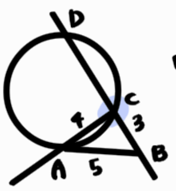
• 원문제에서 직각 → 지름!

아는것과 보이는 것은 다르다. 위 명제를 누가 모르겠는가?

이정도는 알고 가셔야, 현장에서도 보인다.

ex

① 대놓고 줬는데, "현혹되어서" 못봄



이런 상황에서, 5 4 3 보고 신나가지고

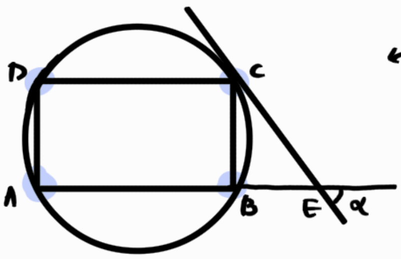
아예 직각삼각형 ~ 하고 끝내는 경우가 많다.

→ 이정도면, $\overline{AD} = 2R$ 임을 거저 준건데

현혹당해서 못 보는것이다. 주변도형에 과몰입 금지.

원과 직각 나오면 바로 지름을 찾으시길!

② 직사·정사각형과 원의 동시등장



이런식으로 주어졌을 때,

1초의 지체도 없이.

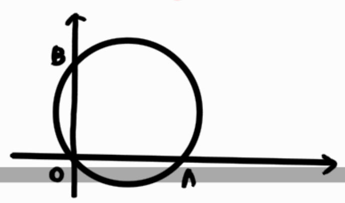
원과 직사각형의 동시등장 만으로도,

$\overline{AC} = \overline{BD} = 2R$ 임을 써놓고 시작해야 한다.

각 α, C에서의 접선 등에 정신 팔리면

빙빙 돌다 못푼다.

③ 좌표계와 함께 줌



'1초만에'

$\overline{AB} = 2R$ 쓰고 시작하기

$f(x)$: 삼차함수

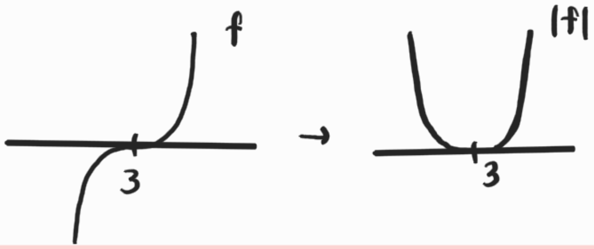
$f'(2) = f'(4) \iff f(x)$의 변곡점 : $x=3$에서 생김

$\iff f(x)$는 $(3, f(3))$에서 점대칭

$f(x)$: 삼차함수

$|f(x)|$가 실전미가, $f(3)=0$

$\iff f(x) = p(x-3)^3$ 꼴.



부채꼴 안에 부채꼴

↓

'원 안에 원'으로 바꿔서 생각

① 중심끼리 연결

② 중심$_1$ - 중심$_2$ - 접점은 일직선상

③ 중심각-원주각 관계 이용 가능한 문제면 제발 이용!

ax^2+bx+c 꼴에서 근의 개수로 함수 만들때

$a=0 \cap b\neq 0$이면 b^2-4ac에 상관없이 근이 1개

$a=0 \cap b=0$이면 b^2-4ac에 상관없이 근이 0개/∞개

도형문제 식이 안 세워진다면?

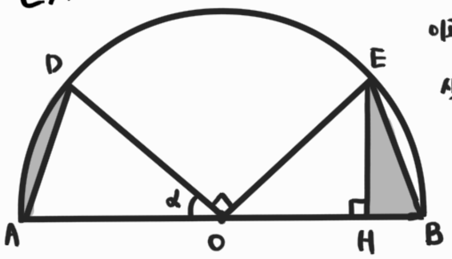
⇒ 더 큰 닮은 삼각형 구하고, 닮음비로 구하는것 아닌지

⇒ 밑변 공유하는 더 큰 삼각형 구하고, 밑변비로 구하는 것 아닌지.

⇒ 옮겨붙이기 문제인지 (주로 원주각과 관련, 210620)

⇒ 중점 연결정리를 쓸 수 있는 문제는 아닌지.

ex

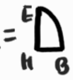


이고, $\tan\alpha = 1$ 일때

색칠된 부분의 넓이는?

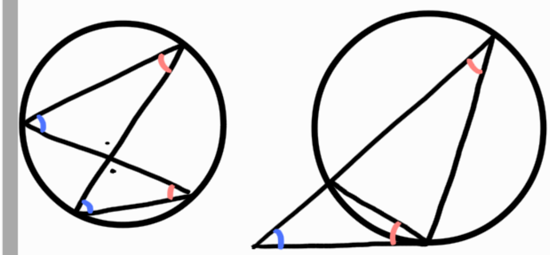
⇒ $\angle AOD = \angle EOB = 45^\circ$ ($\because \tan\alpha = 1$)

∴ $\overset{\frown}{AD}$ 와 $\overset{\frown}{EB}$ 는 합동

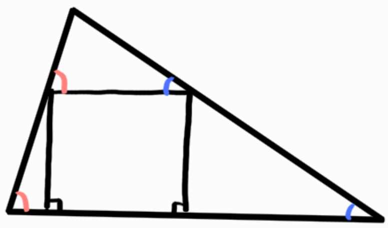
∴ 색칠된 넓이 =  = $\triangle OBE - \triangle OHE$

닮음은 주로 평행선에서 오며, 맞닮음과 내부닮음이 주로 출제된다.

물론, 원주각으로 인한 닮음도 자주 나온다.



← 할선정리¹, 할선정리² 의 근간이 되는 닮음이다.



이런거에서. 직사각형에 현혹되지 말고

닮음을 보자......!

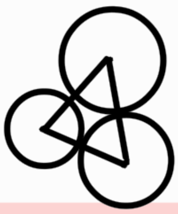
• 도형없이 좌표계에서 원이 등장?

① 기울기 곱 = -1을 이용한 수직조건 제시

② 직각 삼각형 확인 및 빗변의 중심이 원의 중심.

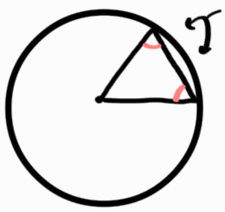
• 두·세개의 원이 접할 때

→ cos 법칙이 쓰이는 경우가 많음



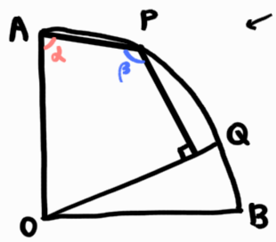
cos 법칙 쓰기 너무 좋아보인다... 그죠

• 자주 놓치는 도형 상황

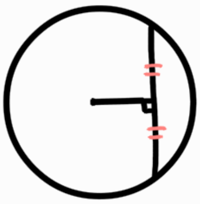


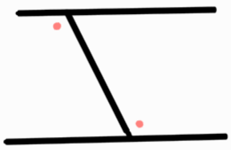
이 둘이 같다.

→

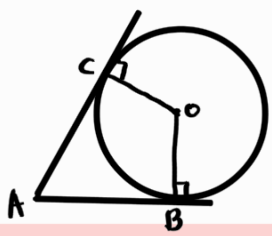


$\overline{OP}$를 이어서
β를 $\alpha+\gamma$로 나눌 수 있다.





순각 엇각 잘 못봄..



새 부리 모양 (from 기파급)

① 각 이등분
② $\overline{AC} = \overline{AB}$

△다루기 체크리스트

① 피타고라스

② 사인 법칙 ← 지름 언급 · 외접원 언급 · 각 2개 이상

③ 코사인 법칙 ← 변셋 & 변2개 각하나

④ 닮음 적극 이용 → 외닮음 · 내닮음 · 원닮음 · 원주닮음

⑤ 원주각 · 접현각

⑥ 원위 직각 → 지름

⑦ 직선위 직각 → 닮음

⑧ 내접도형 → 미지수 도입 → 주변도형 관찰

⑨ 삼각비는 적극 활용

⑩ 원 위의 네점 → 마주보는 각 합 π

⑪ 무게중심은 $2:1$

⑫ $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ → 특수각 의심

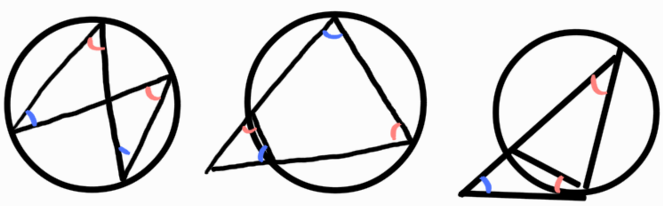
⑬ $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ 일 때, $\alpha+\beta$를 $\pi-\gamma$로 볼 수 있어야!

⑭ $S \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\theta \\ \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \end{cases}$

⑮ 각의 이등분선의 정리

⑯ 원 위의 닮음

(할선의 정리)



⑰ 넓이 외연 확장

i) 닮음비와 넓이

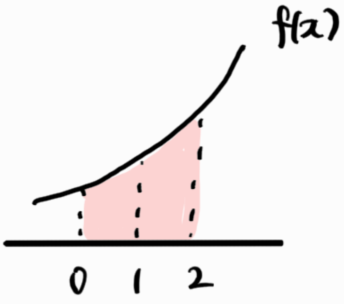
ii) 밑변비와 넓이

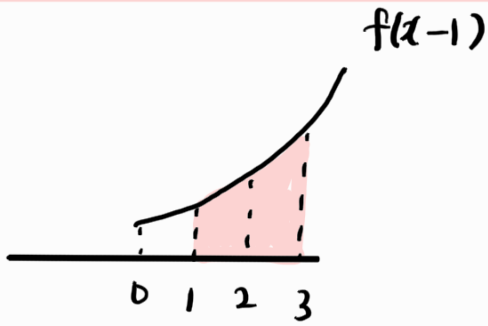
⑱ 중점 연결의 정리

적분구간 조작

① 구간 밀기 (평행이동)

$\int_0^2 f(x)dx = \int_1^3 f(x-1)dx$





↑ 외우는게 아니라, 이해하는 것임.

함수를 양의 방향으로 평행이동 시키면 구간도 양의 방향으로 밀리는 것!

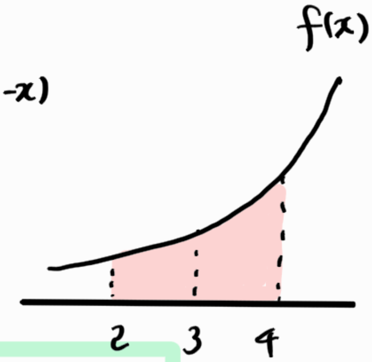
같은 원리로,

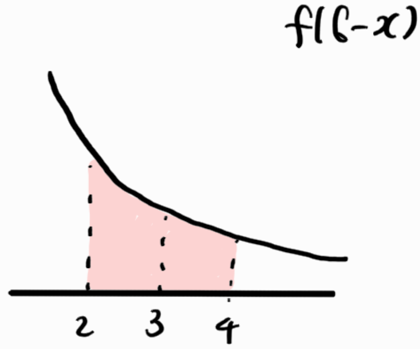
$\int_0^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x+1)dx$ 이겠지요?

② 대칭 이동

f(x)를 $x=a$ 대칭이동 시키면 $f(2a-x)$

$\int_2^4 f(x)dx = \int_2^4 f(6-x)dx$





※ 일반화하면

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx}$$

↑ 이새끼는 외우자. 언젠간 ㄱㄴㄷ 문제로든 빈칸으로든 나올듯..?

③ 응용 Ver (쪼개기)

→ 쪼개기가 필요한 이유는, f(x)를 [0,1]에서만 정의해 주고,

f(x+1)를 $\begin{cases} f(x+1) = f(x)+x^2+2x & [0,1] \\ f(2-x) = f(x)+2x+3 & [0,1] \end{cases}$ 등으로 잘게 제시하는 경우가 존재하기 때문!

$\int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 \{f(t)+f(t+1)\}dt$ 평행이동으로 쪼개기

$\int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 \{f(t)+f(2-x)\}dt$ 대칭으로 쪼개기

후 식을 대입해서 끝낼 수 있다.

④ 곱사리.

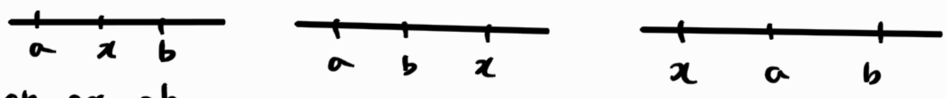
- $\int_a^b f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \boxed{\int_x^b f(t)dt}$

$= \int_a^x f(t)dt - \boxed{\int_b^x f(t)dt}$

위아래 바꾸고 부호 바꿀것!

등으로 쪼갤 수 있고, 이는

수직선 상의 내분·외분으로 떠올리자.



$\int_a^b = \int_a^x + \int_x^b$ $\int_a^b = \int_a^x - \int_b^x$ $\int_a^b = \int_x^b - \int_x^a$

이런 식으로, '원리'를 얻고, '도구'를 만든 뒤, 자유자재로 쓰는 것이 목표가 되어야 하는!

- $\int_a^x f(t)dt = \int_a^{x+2} f(t)dt - \int_x^{x+2} f(t)dt$ (이건 가나다 빈칸급)

(ex)

$$\begin{cases} \{\int_a^x f(t)dt\} \times \{\int_b^x f(t)dt\} = x^4 - 1 \\ \int_a^b f(t)dt = 2 \end{cases}$$

가 나오면, $\int_a^x$와 $\int_b^x$의 곱이 나왔으므로, 아래를 $\int_a^x - \int_b^x$로 고쳐서

A^2+B^2과 $A-B$와 $A+B$의 관계를 이용하고 싶어진다.

⑤ (미적분용) *** 치환과 범위확장 적분.

극상위권은, $\int_1^{e^2}$과 $\int_0^1 + \int_1^2$를 절친이라고 생각한다. 구시대 30번 / 사설·N제 킬러 에서 항상 둘이 손잡고 나온다.

$f(e^x) = g(x)$ 꼴로, $0 \le x \le 1$ 에서 정의된다면,

사실상 $f(x)$의 $1 \le x \le e$ 에서의 정보를 알 수 있는거잖나.

잘 이해가 안되면, $e^x = t$로 치환하고, t의 범위를 잘 체크해주자구.

$0 \le x \le 1 \rightarrow 1 \le t \le e$ 이고.

$f(t) = g(\ln t)$ $(1 \le t \le e)$ 이고.

문자만 다시 x로 바꿔주면,

$f(x) = g(\ln x)$ $[1, e]$가 되겠지?

이제, $f(e^x)$를 정의하고 $\int_1^e f(x)$를 물었을때,

그냥 $\int_1^e g(\ln x)dx$ 를 해주면 됨.

역함수

大원칙

- $f(g(x)) = x$ 쓰고 시작하기
- 역함수로 묻거나 원함수로 물어서 생각하기
- 제시된 것이 방정식인지 / 항등식인지 계속 인지하기
- 역함수 적분 시, d없기법 쓰기 전에 '선조치' 가능한 지 확인하기!
- 그래프 문제일 경우, $y=x$ 꼭 그려놓고 시작하기

$f(f(x)) = x$ 의 해석.

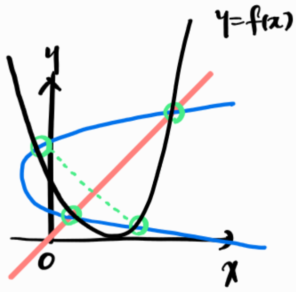
[1] 방정식 $f(f(x))=x$ 의 근

A: $f(a)=a$ 인 $x=a$ ($y=x$ 과의 교점)

B: $f(b)=c \cap f(c)=b$ 인 b, c ($y=x$ 대칭시 그래프 간 교점)

$A \cup B$ 이다.

$\Leftrightarrow$ $f(x)$를 $y=x$ 대칭시킨 "그래프"와 $f(x)$의 교점.



[2] 항등식 $f(f(x))=x$

$f(x)$는 역함수를 가진다.

$f(x)=f^{-1}(x)$ 즉 $f(x)$ 자체가 $y=x$ 대칭함수이다.

$\int xf'(x)dx$ 유

x 좌표함수의 선조치 고려와 $d\alpha$기법

① 대칭·평행이동 등에 의해 원활히 진행되는지 살핀다

② t에 관한 식만으로도 원활히 해결되는지 살핀다

③ ①.②에 해당 안될경우, $d\alpha$ 기법을 사용한다.

ex

- $\cos x = \sin t$ 의 실근 x를 $g(t)$라고 한다면,

굳이 $\cos g(t) = \sin t$ 또는 $\cos\alpha = \sin t$ 로 둘 필요 없이

각 변환 공식을 통해, 그냥

$$\cos x = \sin t = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \\ \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\therefore\ x = f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - t + 2n\pi \\ t - \frac{\pi}{2} + 2n\pi \end{cases}$$

로 그냥 표현을 해버릴수가 있다.

• $d\alpha$ 기법

① '절대식' (문제 상황상의 항등식) 을 구한다.

② x좌표를 α로 둔다.

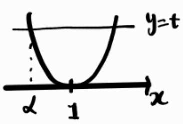
③ 그 식을 양변 미분해 dt와 $d\alpha$의 관계를 얻는다.

④ 적분식에서 dt를 $d\alpha$로 바꿔주고, 적분구간도 그에 따라 바꿔준다.

ex

$y = x^2 - 2x + 1$ 과 $y = t$ $(t \geq 0)$ 의 교점 중 작은것을 $f(t)$라고 하자.

$$\int_1^4 \frac{f(t)}{f(t)-1}\,dt$$ 는?



"절대식"

$\boxed{\alpha^2 - 2\alpha + 1 = t} \xrightarrow{\ '\ } \boxed{2(\alpha-1)d\alpha = dt}$

$\begin{cases} t=1 \\ \alpha=0 \end{cases}$ $\begin{cases} t=4 \\ \alpha=-1 \end{cases}$

$$\int_1^4 \frac{f(t)}{f(t)-1}\,dt = \int_0^{-1} \frac{\alpha}{\alpha-1}\,2(\alpha-1)\,d\alpha = \int_0^{-1} 2\alpha\,d\alpha$$

$\int xf'(x)\,dx$ 유

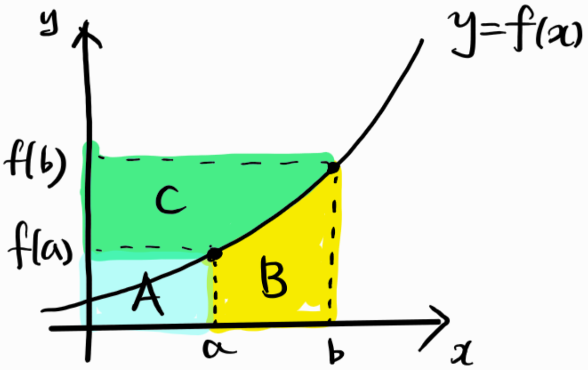
이해하는 데에는 크게 두 방법이 있다.

1. 부분적분법
2. 치환적분법

1,2번 모두 역함수 관련 적분이라는 결과가 도출된다.

2번이 약간 생소할 수 있다. 이해해보자.

1번.



$$\int_a^b xf'(x)\,dx$$

$$=[xf(x)]_a^b-\int_a^b f(x)\,dx \quad (\because \text{부분 적분})$$

$$=\underset{(A+B+C)}{bf(b)}-\underset{(A)}{af(a)}-\underset{(B)}{\int_a^b f(x)\,dx}=C$$

2번.

$\int_a^b xf'(x)\,dx$ 에서, $y=f(x)$이니, $\begin{cases} dy=f'(x)\,dx \\ f^{-1}(y)=x \end{cases}$ 이다.

$y=f(x)$로 치환해주면

$\boxed{\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy}$ 이다.

↳ C

사실 이 정도는, 상위권 수험생이 아니여도 머릿속에 다~있다.

이제, 증가/감소/절댓값1/절댓값2 를 바꿔가며 시도해보자.
이런 걸 해 보면서 실력이 느는 것이라고 생각한다.

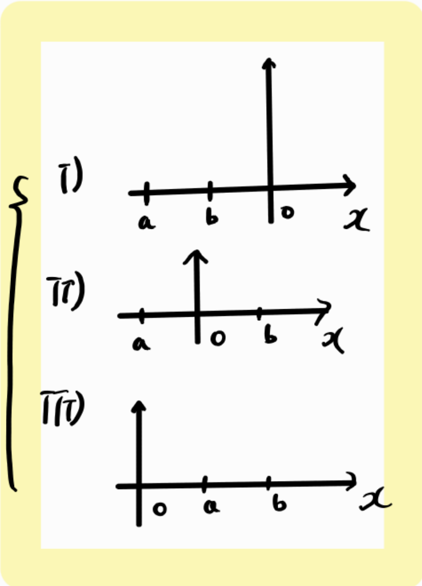
★ f: 증가함수, g: 감소함수.

① $\int_a^b x g'(x)\,dx$

② $\int_a^b x|f'(x)|\,dx$

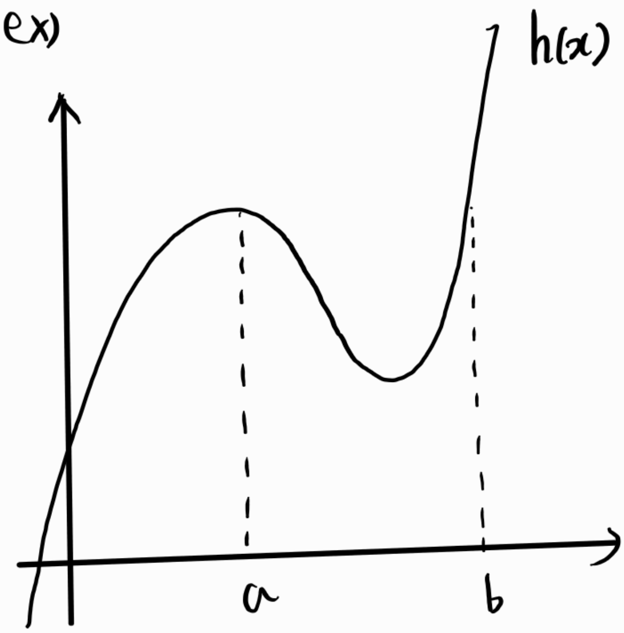
③ $\int_a^b |x| f'(x)\,dx$

④ $\int_a^b |xf'(x)|\,dx$



⑤ $\int_a^b xf'(x)\,dx + \int_b^c xg'(x)\,dx$

ex)



1 $\int_a^b x h'(x)\,dx$

2 $\int_a^b x|h'(x)|\,dx$

$\int_a^x f(t)dt$ 다루기

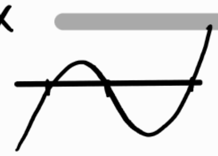
이 꼴의 함수를 힘들어하는 수험생이 정말 많다. $\int_3^x f(t)dt$ 처럼 밑이 상수면 몰라도,
$\int_a^x f(t)dt$ 처럼 밑을 숨기고 물으면 힘들어한다. 물론, 저도 힘들어했습니다..

· 기본적으로, $\begin{cases} \text{도함수가 } f(x) \text{ 이고} \\ x=a \text{에서 함숫값이 } 0 \end{cases}$ ... 인 "함수" 라고 생각해야 한다.

· 순서

1. 도함수를 통해 "모양" 파악하기
2. a를 결정하여 "높낮이" 결정하기 (= x축 결정하기)

EX

$f(x)=$  이면

$\int_a^x f(t)dt$ 의 "모양"은  로 "결정"이 된 것이다.

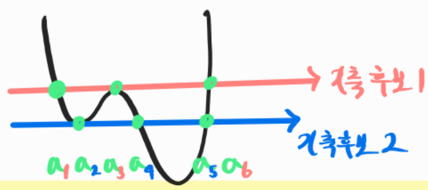
이제 a를 결정하고 싶다.

그럼 문제에서 이런 조건을 주더라.

$\int_a^x f(t)dt = 0$의 실근이 3개가 되도록 하는 a를 $a_1, a_2, \cdots a_m$ 이라 할 때...

그럼 다음과 같이 해석해주면 된다.

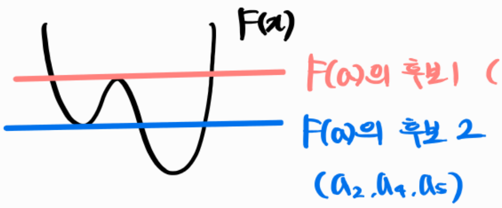
① $\int_a^x f(t)dt$ 를 하나의 함수로 보고 "x축 결정하자"는 마인드



② $f(x)$의 '한 부정적분' $F(x)$ 상정 후

$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ 로 두고,

$F(x) = F(a)$ 를 푼다는 생각으로 풀어나가기



※ 문제제작 원리 예시

1. $f(x)$를 그냥 주지 않고
추론시키거나, 안에 변수를 넣어서
이변수 문제로
2. a를 결정할 수 있도록 조건 제시해
a의 개수 / 여러 a중 하나로 수렴되는 추가조건
3. 다른 함수랑 곱해서, 부호변동놀이 (극값 개수)
시킴.

ex) $g'(x) = (x^2-2x-3) \times \int_a^x f(t)dt$ 일 때
$g(x)$의 극값 개수가 홀수가 되도록 하는 a값 합은?

$\int_a^x f(t)dt = x-a$ 같은 방정식을 만난다면?

① 각각 그려서 교점 찾기

② 이항해서 $h(x) = \int_a^x f(t)dt - (x-a)$ 로 만들고

$h'(x) = f(x) - 1$ 통해 $h(x)$ 그린 뒤

$h(x) = 0$을 그냥 풀면 됨.

$\int_\alpha^x f(t)dt$ 와 $\int_\beta^x f(t)dt$ 의 관계.

두 함수는 도함수가 완벽히 일치하고

각각 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$을 지나므로

"모양"이 같고, y축으로 평행이동 된 관계이다!

구간별 함수 Advanced

· 구간이 y값 기준일 때 *** (HARD)

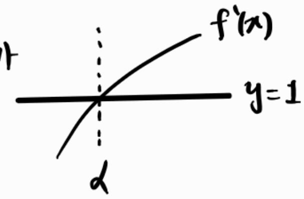
⇒ "뚫" 과 "튕" 으로 나누고,

"튕" 일때도 '접'에선 고려해야 함을 명심한다.

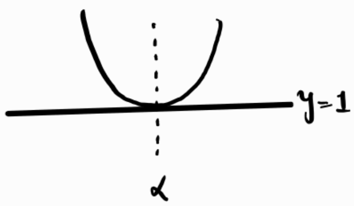
ex

$h(x)=\begin{cases} g(x) & (f'(x)>1) \\ f(x) & (f'(x)\le 1)\end{cases}$ 이라면,

$f'(x)$가



(뚫는다)

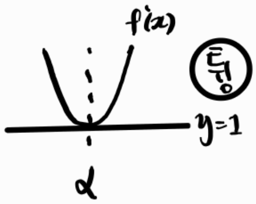


(튕긴다)

로 case를 나누고,

$f'(x)=1$일때의 $x=\alpha$에서 $\begin{cases} g(\alpha)=f(\alpha) \\ g'(\alpha)=f'(\alpha)\end{cases}$ 등 문제상의 조건을 비비면 실마리가 보인다.

이때,



튕 이더라도, $x=\alpha$일때, 그점에서 만큼은 $g \; f \; g$ (α) 임을 명심하자.

퍼즐형 적분

大원칙

① 밑대입 / 미분은 그냥 해야함

② 계산 결과, 식조작 결과를 "다시대입"하는 행위 매우 중요

③ 미분해서 나온 식 { 다시적분 (X, 무의미)
양변 x 곱하기 등 변형 후 다시적분 (O, 유의미)

④ 안통할 시 → $\boxed{1}$ ~ $\boxed{3}$의 특수적분 사용하기

$\boxed{1}$ $i(x) = g'(x)f(g(x)) - h'(x)f(h(x))$ 꼴.

$i(x)$를 양변 부정적분 할 수 있다.

$$I(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt + C$$

당연히, 이 관계를 식별하기조차 어렵게 준다. 사실상 30번 단골.

ex

$i(x) = \frac{1}{x}f(\ln x) - 3f(3x)$ ⟶ $I(x) = \int_{3x}^{\ln x} f(t)\,dt + C$

$i(x) = \frac{2f(x^2)}{x} + \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$ ⟶ $I(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{f(t)}{t}\,dt + C$

$i(x) = 2f(2x) + f(-x)$ ⟶ $I(x) = \int_{-x}^{2x} f(t)\,dt + C$

$i(x) = (x+1)f(x) - xf(x+1) = \frac{(x+1)}{x}$ ⟶ 식변형 (양변 $x(x+1)$로 나눔) $\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x+1)}{x+1} = \frac{1}{x^2}$

↓

$\int_{x}^{x+1} f(t)\,dt = \frac{1}{x} + C$

$i(x) = \frac{3f(x^3)}{x} - \frac{f(x)}{x}$ ⟶ $I(x) = \int_{x}^{x^3} \frac{f(t)}{t}\,dt + C$

2 곱의 미분꼴 & e^{-x} 미분, e^{x} 미분꼴

$$(e^{x}f(x))' = e^{x}(f(x)+f'(x))$$

$$(e^{-x}f(x))' = e^{-x}(f'(x)-f(x))$$

임을 이용해서 적분하는 것.

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

사설 29번에 자주 나온다.

Point : 원함수와 도함수가 빼기로 섞여 있으면 의심해보기

ex

$$f'(x)-3f(x) = e^{3x}g'(x) \rightarrow e^{-3x}(f'(x)-3f(x)) = g'(x) \xrightarrow{\int} e^{-3x}f(x) = g(x)+C$$

$$-xf'(x)+f(x) = e^{-x}\cdot x^3 \rightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = -xe^{-x}$$

$$xf'(x)-f(x) = x^2\ln x \rightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \ln x \xrightarrow{\int} \frac{f(x)}{x} = x\ln x - x + C$$

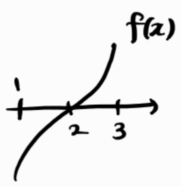
$$\rightarrow f(x) = x^2\ln x - x^2 + Cx$$

3 $\int_0^x |f(t)|\,dt = F(x)$ 꼴.

→ 최종 발문에 $\int_a^b f(x)F(x)\,dx$ 인 경우가 많다.

ex

$f(x) =$



이면,

$F'(x) = |f(x)|$ 이므로

$$F'(x) = \begin{cases} -f(x) & (1 \le x \le 2) \\ f(x) & (2 \le x \le 3) \end{cases}$$

이고,

$\int_1^2 -f(x)F(x)\,dx + \int_2^3 f(x)F(x)\,dx$ 로 귀결된다!

수학 I 개념

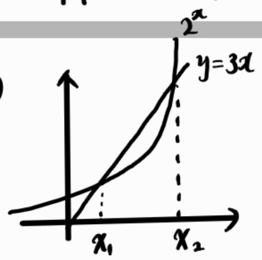
기본

① 의미(길이, $x \cdot y$좌표 · 기울기 · 넓이) 질문 ⟶ "동일 의미" 비교

② 교점 관계식은 꼭 적기.

↳ 지수·로그의 성질을 통해 풀도록 만들어진 문제에서 강함

ex)



$\begin{bmatrix} y_1 = 3x_1 = 2^{x_1} \\ y_2 = 3x_2 = 2^{x_2} \end{bmatrix}$ ← 교점 관계식.

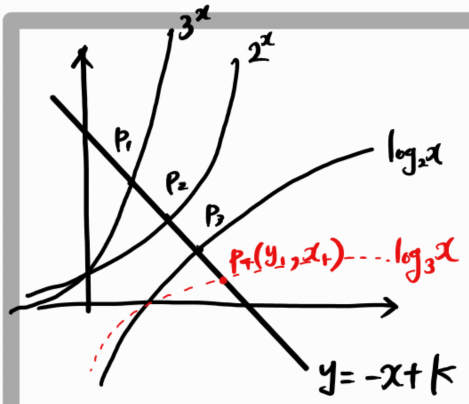
문제에서 $y_1 y_2$, $\log_2 \frac{y_1}{y_2}$ 같은 풀이 나올 때 유용하다.

③ 기울기가 ±1인 직선

i) x좌표, y좌표의 합이 일정함을 이용

ii) 45°의 이용 (그래프 상에서 기하적으로)

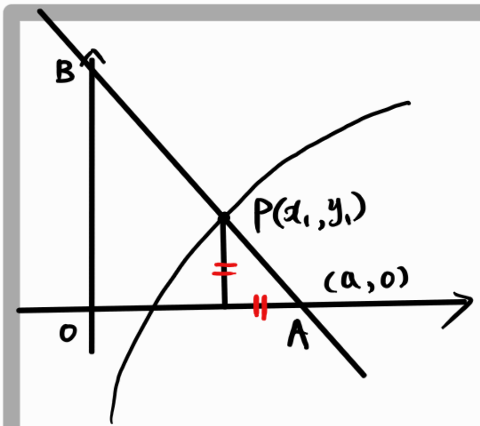
iii) (y_1, x_1)의 좌표 등장 → 기울기의 의미 확장 ($\frac{x_1}{y_1}$ 꼴을 기울기로 해석!)



$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$

일 때, $\frac{x_1}{y_1} \square \frac{y_3}{x_3}$ 을 풀어야 하면,

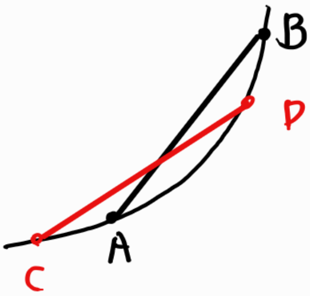
$\frac{x_1}{y_1}$을 P_4의 기울기로 봐줄수 있다!



$x_1 + y_1 = a$ (∵ i), ii))

특수

• 볼록곡선 위의 세 점 / 네 점 상황



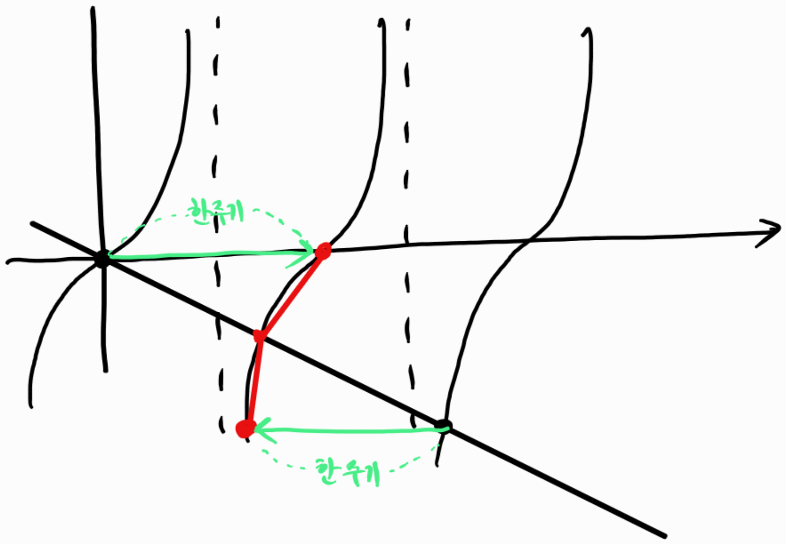
$\overrightarrow{CD} < \overrightarrow{AB}$.

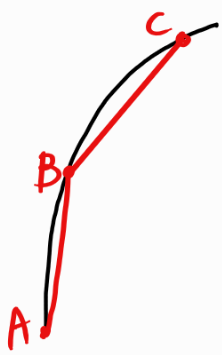
보통 $\overline{AB}$는 그래프에 그려져있고.

C or D를 ㄱ.선지를 풀때 제시하며

나머지 하나를 스스로 찾게하여 ㄷ에서 묻는다.

• 주기함수는 한 곡선에 몰아넣고 비교하면 직관으로 뚫기 좋은 경우가 많다.



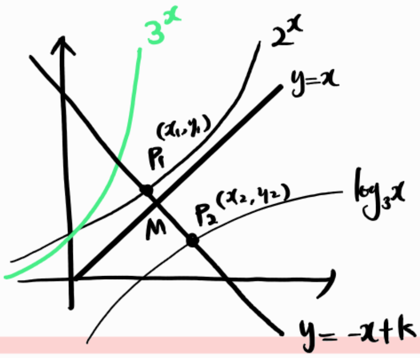


볼록곡선 위의 세 점 상황이 쉽게 인지됨!

$\overrightarrow{AB} < \overrightarrow{BC}$

• 지수·로그 함수는 밑이 달라도 역함수를 그리고 시작한다. 비교가 편해짐!

밑이 다르면 보통, 기울기가 (-1) 인 직선과의 교점을 통해 기울기·넓이 등을 비교시키는 경우 多.



$\overline{P_1M}$ vs $\overline{P_2M}$

$\frac{y_1}{x_1}$ vs $\frac{x_2}{y_2}$ ... ect.

• 더하기로 되어있어도 기울기로 해석 가능!

↳ $\frac{f(a)+f(b)}{a+b} = \frac{f(a)-(-f(b))}{a-(-b)}$ $(b, f(b))$를 원점대칭 시킨 점과의 기울기로 해석 가능!