$-1 \le a \le 1$인 상수 a와 10 이하의 자연수 b에 대하여 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = a + \cos bx$가

다음 조건을 만족한다.

방정식 $f(x) = f(x)\tan x$의 모든 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것은 등차수열을 이룬다.

가능한 모든 b의 값의 합을 구하시오.

방정식 $f(x)=f(x)\tan x$의 모든 실근에 대해서 고려해보자. 우선적으로, $\tan x=1$인 x들은 모두 포함된다. $f(x)=0$인 x들은 모두 포함될까? 이때 $f(x)=0$인 x에서 $\tan x$가 정의되지 않는다면 방정식의 실근이 될 수 없음을 인지하자. 즉, $\cos x=0$일 때 $\tan x$가 정의가 되지 않음을 유의하자! 이때 '방정식 $f(x)=0$의 실근의 집합' $-$ '방정식 $\cos x=0$의 실근의 집합'에서 차집합을 교집합을 이용하여 나타내면 '방정식 $f(x)=0$의 실근의 집합' $\cap$ '방정식 $\cos x=0$의 실근의 집합'^{C}이다.

즉, 방정식 $f(x)=f(x)\tan x$의 모든 실근의 집합을 집합의 연산기호를 통해 나타내면 다음과 같다.

$$(\{x|f(x)=0\}\cap\{x|\cos x=0\}^C)\cup\{x|\tan x=1\}$$

집합의 연산에서 분배법칙이 성립하므로 이는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$(\{x|f(x)=0\}\cup\{x|\tan x=1\})\cap(\{x|\cos x=0\}^C\cup\{x|\tan x=1\})$$

이 때 방정식 $\tan x=1$의 실근의 집합은 $\tan x$의 정의역의 부분집합이므로

$\{x|\cos x=0\}^C\cup\{x|\tan x=1\}=\{x|\cos x=0\}^C$이다. $\therefore$ $(\{x|f(x)=0\}\cup\{x|\tan x=1\})\cap\{x|\cos x=0\}^C$

조건을 만족하는지 여부를 따질 때 집합 $\{x|f(x)=0\}\cap\{x|\cos x=0\}^C$에 대해서 고려하는 것보다 집합 $\{x|f(x)=0\}\cup\{x|\tan x=1\})$에 대해서 고려하는 것이 쉬울 것이므로 연산법칙을 사용했다.

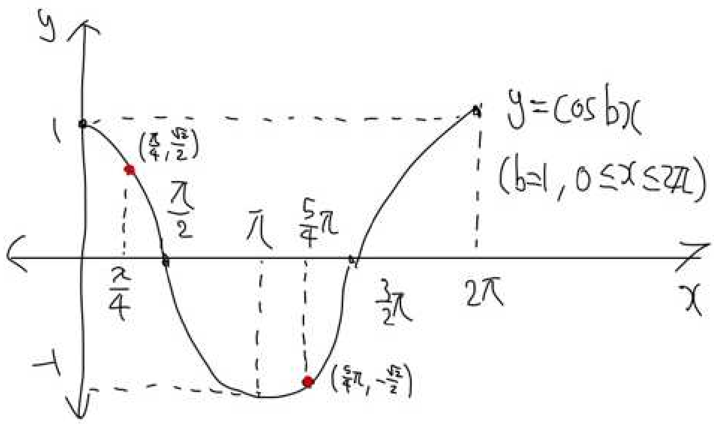
구간 $[0,\ 2\pi]$에서 방정식 $\tan x=1$의 실근의 집합은 $\left\{\frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi\right\}$이다. 구간 역시 집합이고

$x=\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$에서 $\cos x=0$이므로 구간 $[0,\ 2\pi]$에서 $\tan x$가 정의가 될 때는

$[0,\ 2\pi]-\left\{\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right\}=[0,\ 2\pi]\cap\left\{\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right\}^C=[0,\ 2\pi]\cap\left(\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\pi\right)\cup\left(\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right)\cup\left(\frac{3}{2}\pi,\ \infty\right)\right)$이다.

즉 세 구간 $\left[0,\ \frac{1}{2}\pi\right)$, $\left(\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right]$의 합집합과 방정식 $f(x)=0$의 실근의 집합의 교집합을 A라 할 때 방정식 $f(x)=f(x)\tan x$의 실근의 집합을 B라 하면 $B=A\cup\left\{\frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi\right\}$이다. 방정식

$f(x)=a+\cos bx=0$의 실근을 관찰할 때 곡선 $y=\cos bx$와 직선 $y=-a$의 교점을 관찰하는 것이 쉬운 방향의 접근일 것이므로, $b=1$일 때 구간 $[0,\ 2\pi]$에서 곡선 $y=\cos bx$는 다음과 같다.



$a=1$일 때 구간 $\left[\frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi\right]$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근은 오직 $x=\pi$뿐이며 이때 세 수 $\frac{1}{4}\pi,\ \pi,\ \frac{5}{4}\pi$는 등차수열을 이루지 않는다.

$\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1$일 때 구간 $\left[\frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi\right]$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 2이며 두 실근의 등차중항은 π이다. 따라서 두 실근과 $\frac{5}{4}\pi$가 등차수열을 이룰 때 두 실근은 $\frac{11}{12}\pi$와 $\frac{13}{12}\pi$이다. 이때, $\frac{11}{12}\pi-\left(\frac{13}{12}\pi-\frac{11}{12}\pi\right)=\frac{3}{4}\pi$는 $a+\cos\frac{3}{4}\pi=a-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 아니므로 성립하지 않는다.

$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 구간 $\left[\frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi\right]$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근은 $x=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$이므로 집합 B의 원소는 $\frac{1}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$이므로 등차수열을 이룬다. 즉, $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=1$일 때 조건을 만족한다.

$-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 간 $\left[\frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi\right]$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 1이며 그 실근은 $\frac{3}{4}\pi$보다 작다. $\frac{1}{4}\pi$와 $\frac{5}{4}\pi$의 등차중항은 $\frac{3}{4}\pi$이므로 등차수열을 이루지 않는다.

$-1 \le a < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$일 때 구간 $\left[\dfrac{1}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi\right]$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근은 존재하지 않는다.

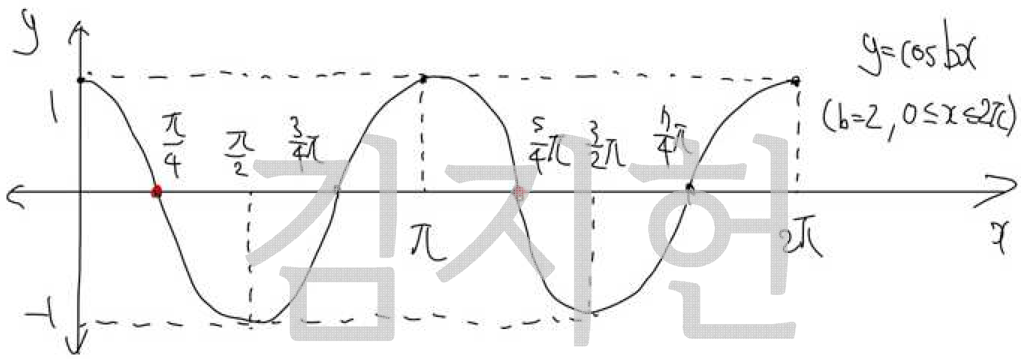
따라서 방정식 $f(x)=f(x)\tan x$의 모든 실근이 주어진 조건을 만족한다면 공차는 π이다.

$\dfrac{1}{4}\pi-\pi<0$이고 $\dfrac{5}{4}\pi+\pi>2\pi$에서 구간 $[0,\ 2\pi]$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근은 존재하지 않는다.

즉, $b=1$일 때 주어진 조건을 만족하는 a는 구간 $\left[-1,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$에서 존재하지 않는다.

$\therefore\ a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이고 $b=1$일 때 주어진 조건을 만족한다.

$b=2$일 때 구간 $[0,\ 2\pi]$에서 곡선 $y=\cos bx$는 다음과 같다.



$a=1$일 때 구간 $[0,\ 2\pi]$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근은 $x=\dfrac{1}{2}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$이므로 방정식 $f(x)=f(x)\tan x$의 실근은 $x=\dfrac{1}{4}\pi,\ \dfrac{1}{2}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$이므로 등차수열을 이루지 않는다.

$0<a<1$일 때 구간 $\left[\dfrac{1}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi\right]$에서 방정식 $f(x)=0$은 오직 구간 $\left(\dfrac{1}{4}\pi,\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$에서만 두 실근을 가진다. 이때 등차는 반드시 $\dfrac{1}{2}\pi$보다 작으므로 $\dfrac{1}{4}\pi$와 두 실근, 그리고 $\dfrac{5}{4}\pi$는 등차수열을 이루지 않는다.

$a=0$일 때 방정식 $f(x)=f(x)\tan x$의 실근은 $x=\dfrac{1}{4}\pi,\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$이므로 등차수열을 이룬다.

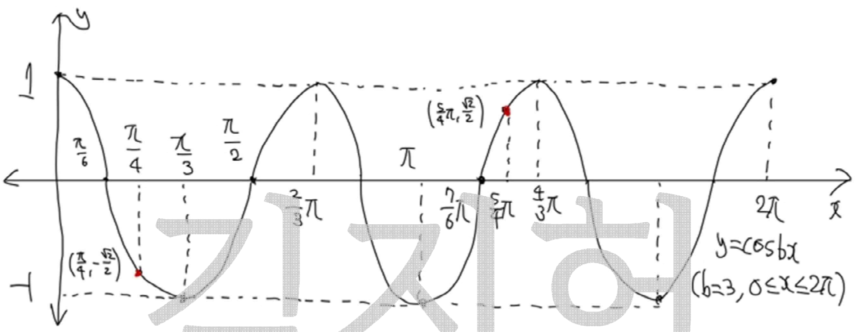
$-1<a<0$일 때 구간 $\left[\dfrac{1}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi\right]$에서 방정식 $f(x)=0$은 오직 구간 $\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi\right)$에서만 두 실근을

가진다. 이때 등차는 반드시 $\frac{1}{2}\pi$보다 작으므로 $\frac{1}{4}\pi$와 두 실근, 그리고 $\frac{5}{4}\pi$는 등차수열을 이루지 않는다.

$a=-1$일 때 구간 $\left[\frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi\right]$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근은 오직 $x=\pi$뿐이며 이때 세 수 $\frac{1}{4}\pi,\ \pi,\ \frac{5}{4}\pi$는 등차수열을 이루지 않는다.

$\therefore\ a=0$이고 $b=2$일 때 주어진 조건을 만족한다.

$b=3$일 때 구간 $[0,\ 2\pi]$에서 곡선 $y=\cos bx$는 다음과 같다.



$b=3$이고 $a=+1$일 때 구간 $\left[\frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi\right]$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근은 $x=\frac{1}{3}\pi,\ \pi$이므로 방정식 $f(x)=f(x)\tan x$의 실근은 $x=\frac{1}{4}\pi,\ \frac{1}{3}\pi,\ \pi,\ \frac{5}{4}\pi$이다. 따라서 주어진 조건을 만족하지 않는다.

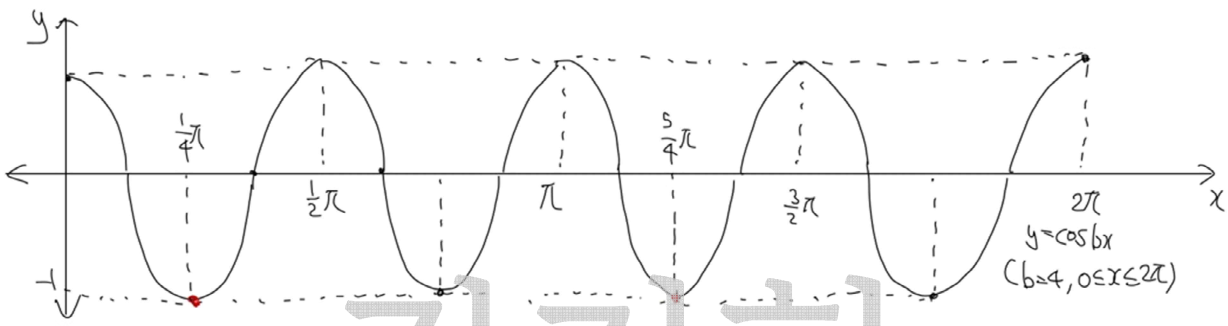
$\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1$일 때 구간 $\left[\frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi\right]$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근의 네 실근은 등차수열을 이루지 않는다. 따라서 주어진 조건을 만족하지 않는다.

$-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 구간 $\left[\frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi\right]$에서 방정식 $f(x)=0$은 세 실근을 가진다. 오직 $a=0$일 때 방정식 $f(x)=0$의 세 실근 $x=\frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi$이 등차수열을 이룬다. 이때 $\frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$는 이 등차수열의 항이 될 수 없으므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

$-1 \le a \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 구간 $\left[\frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi\right]$에서 방정식 $f(x)=0$은 구간 $\left[\frac{7}{12}\pi,\ \frac{3}{4}\pi\right]$에서 두 실근만을 가진다. $\left(\because f\left(\frac{7}{12}\pi\right)=f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이때 $\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{6}\pi<\frac{5}{4}\pi$이고 $\frac{1}{4}\pi<\frac{7}{12}\pi-\frac{1}{6}\pi$이므로 등차수열을 이루지 않는다.

$-1 \le a \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 역시 조건을 만족하지 않으므로 $b=3$일 때 주어진 조건을 만족하지 않는다.

$b=4$일 때 구간 $[0,\ 2\pi]$에서 곡선 $y=\cos bx$는 다음과 같다.



$b=4$이고 $a=1$일 때 방정식 $f(x)=f(x)\tan x$의 실근은 $\frac{1}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$로 등차수열을 이룬다.

즉, $a=1$이고 $b=4$일 때 주어진 조건을 만족한다.

$-1<a<1$일 때 구간 $\left[\frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi\right]$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 4이며 오직 $a=0$일 때 네 실근이 등차수열을 이룬다. $a=0$일 때 네 실근은 $x=\frac{3}{8}\pi,\ \frac{5}{8}\pi,\ \frac{7}{8}\pi,\ \frac{9}{8}\pi$이다. 하지만 $\frac{1}{4}\pi,\ \frac{3}{8}\pi,\ \frac{5}{8}\pi,\ \frac{7}{8}\pi,\ \frac{9}{8}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$가 등차수열을 이루지 않으므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

$a=-1$일 때 구간 $\left[\frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi\right]$에서 방정식 $f(x)=0$은 두 실근 $x=\frac{1}{2}\pi,\ \pi$만을 가진다.

이때 $\frac{1}{4}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \frac{5}{4}\pi$는 등차수열을 이루지 않으므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

$b \geq 5$인 케이스에 대해서 천천히 관찰해보자.

$a=-1,\ 0,\ 1$이 아닐 때 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근은 등차수열을 이루지 않는다. 즉, 주어진 조건을 만족하는 a는 $b>1$일 때 반드시 $a=-1,\ 0,\ 1$이다. 이때, $\frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$가 그 등차수열의 항이 되려면 $f\left(\frac{1}{4}\pi\right)=f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=0$이다. 즉, b가 짝수일 때 $b=2b'$이라 한다면 $f\left(\frac{1}{4}\pi\right)=a+\cos\frac{b'}{2}\pi=0$에서 b' 또한 자연수이므로 $a=-1,\ 0,\ 1$중 하나의 값을 가지게 된다.

이 때, 등차수열의 항이 $\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$를 포함하는 경우는 제외해야한다. ($\tan x$가 정의되지 않으므로 등차수열의 항 중에서 $\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$가 포함이 되는 경우, $\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$를 빼게 될 때 등차수열이 되지 않기 때문이다.) $a=0$일 때 공차는 $f(x)$의 주기의 절반이 되므로 $\frac{1}{b}\pi$이고, $a=-1$ 또는 $a=1$일 때 공차는 $f(x)$의 주기가 되므로 $\frac{2}{b}\pi$이다. $f\left(\frac{1}{4}\pi\right)=f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=0$에서 $\frac{1}{4}\pi$가 $\frac{1}{b}\pi$의 정수배라면 b는 4의 배수이며, 이때 $f\left(\frac{1}{4}\pi\right)=a+\cos\frac{b}{4}\pi=a\pm 1 \neq 0$이므로 $a=0$과 모순된다. $\frac{1}{4}\pi$가 $\frac{2}{b}\pi$의 정수배라면 b는 8의 배수이며, 이때 $f\left(\frac{1}{4}\pi\right)=a+\cos\frac{b}{4}\pi=a+1=0$이므로 $a=-1$이고 b가 8의 배수일 때 등차수열을 이루지 않음을 확인할 수 있다. 즉, 가능한 b는 1, 2, 4, 6, 10으로 정답은 23이다.