제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\left(2^{\sqrt{3}} \times 4\right)^{\sqrt{3}-2}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

$=\left(2^{\sqrt{3}+2}\right)^{\sqrt{3}-2} = 2^{-1}$

2. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

$f'(x)=3x^2+6x+1 \Rightarrow f'(1)=10$

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2=6, \quad a_4+a_6=36$$

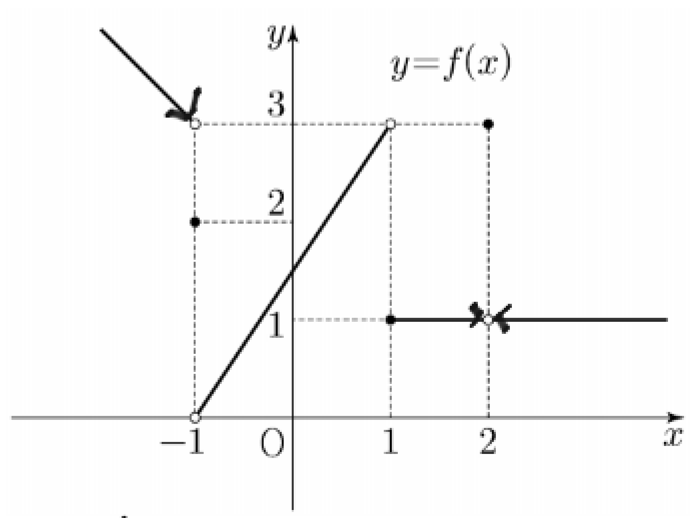
일 때, a_{10} 의 값은? [3점]

① 30　② 32　③ 34　④ 36　⑤ 38

$a_2=6 \quad a_5=18 \Rightarrow a_{10}=a_5+5d$

$3d=12 \qquad\qquad = 38$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



3　　1

$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 2} f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

5. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (a_n<7) \\ a_n-7 & (a_n\geq 7) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	1	2	4	8	1	2	4	8

$\underbrace{1 \quad 2 \quad 4 \quad 8}_{15}$

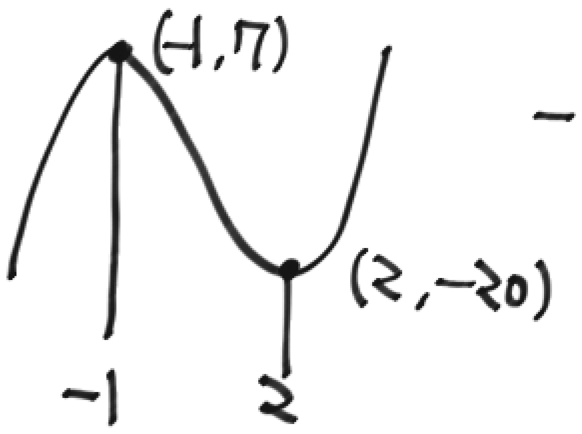
6. 방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는? [3점]

① 20 ② 23 ③ 26 ④ 29 ⑤ 32

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$=6(x+1)(x-2)$



$-20<-k<7$

$k=-6,\cdots,19$

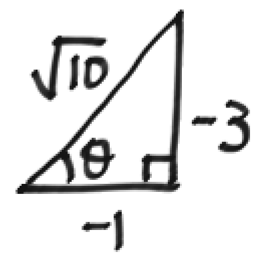
7. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

$\tan^2\theta-\tan\theta-6$

$=(\tan\theta+2)(\tan\theta-3)=0$

$\Rightarrow \tan\theta=3$

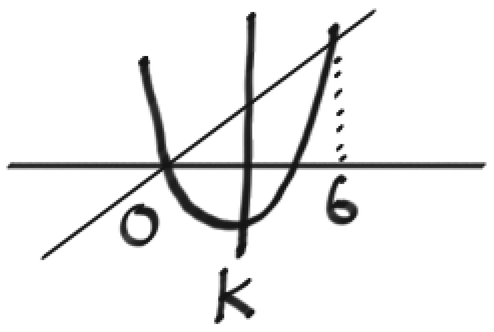


$\Rightarrow \sin\theta+\cos\theta$

$=\frac{-4}{\sqrt{10}}=-\frac{2}{5}\sqrt{10}$

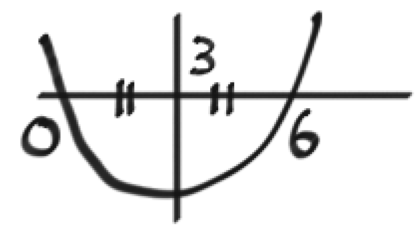
8. 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4



$\int_0^6 (-x^2+6x)dx$

$= \int_0^k (-x^2+6x)dx$

⇒ 

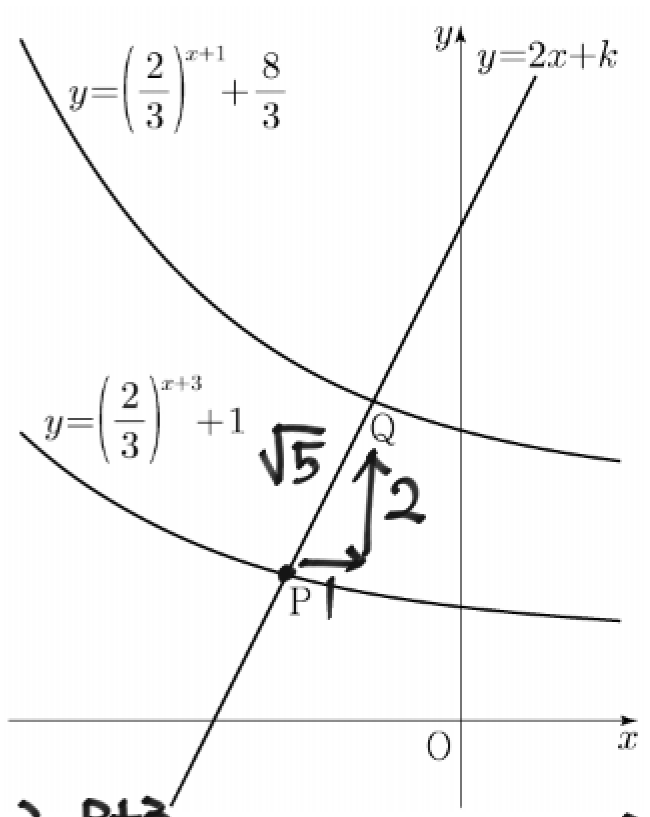
⇒ $k=3$

9. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$



$P\left(p, \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+1\right) \Rightarrow Q\left(p+1, \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+3\right)$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow p=-2$ 즉 $P\left(-2, \frac{5}{3}\right)$

$\Rightarrow \frac{5}{3} = -4+k$ 즉 $k=\frac{17}{3}$

10. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? [4점]

① -18 ② -17 ③ -16 ④ -15 ⑤ -14

① $f(0)=0$, $f(1)=2$

② $\begin{cases} y=f'(0)x+f(0) \\ y=(f(1)+f'(1))(x-1)+f(1) \end{cases}$

$= (2+f'(1))x-f'(1)$

$\Rightarrow f'(1)=0,\ f'(0)=2$

③ $f(x)=ax^3+bx^2+2x$

$f'(x)=3ax^2+2bx+2$

$x=1$ $\Rightarrow \begin{cases} a+b+2=2 \\ 3a+2b+2=0 \end{cases}$

$\Rightarrow a=-2,\ b=2$

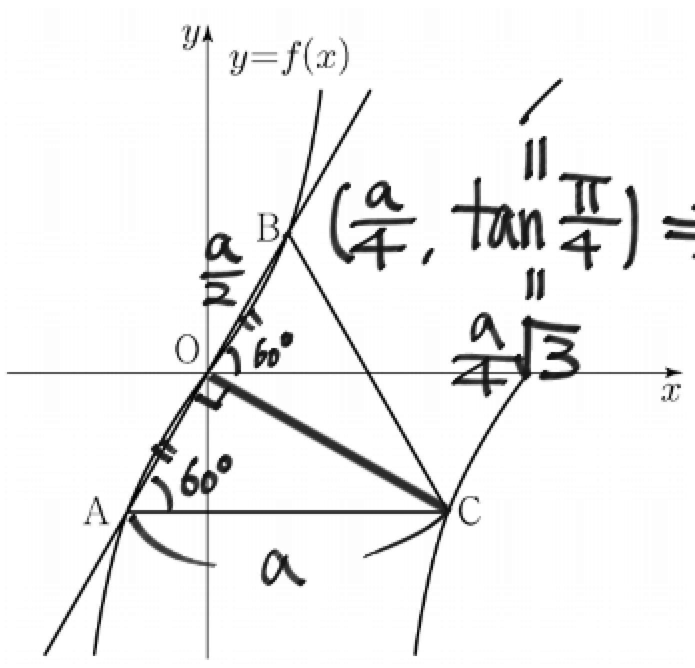
$\Rightarrow f'(2)=-24+8+2=-14$

11. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{a}{2} < x \le a,\ x \ne \frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$$

주기 : a

가 있다. 그림과 같이 함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y = f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



$\left(\frac{a}{4}, \tan\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{3}}$

① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$　③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$　⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

$\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{16}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3 - \{f(x)\}^2 - x^2 f(x) + x^2 = 0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

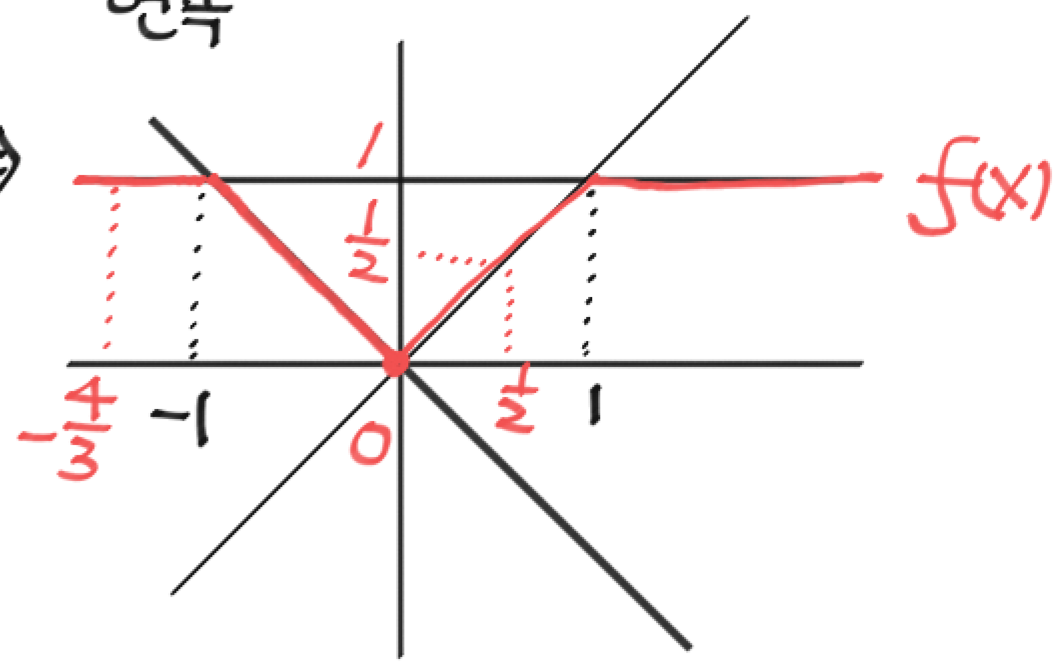
① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

$f^2(f-1) = x^2(f-1)$

$\Rightarrow f(x) = 1$ or x or $-x$

연속

$\Rightarrow$



13. 두 상수 a, $b\,(1 < a < b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x) = a^{bx} + b^{ax}$에 대하여 $f(1) = 40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920

① $\begin{cases} y = \dfrac{\log_2 b - \log_2 a}{b-a}(x-a) + \log_2 a \\ y = \dfrac{\log_2 b - \log_2 a}{2(b-a)}(x-a) + \dfrac{1}{2}\log_2 a \end{cases}$

$\xrightarrow{x=0}$ $\dfrac{-a\log_2 b + b\log_2 a}{b-a} = \dfrac{1}{2}(\ 〃\ )$

$\Rightarrow b\log_2 a = a\log_2 b$

$\Rightarrow a^b = b^a$

② $40 = f(1) = a^b + b^a$

$\Rightarrow a^b = 20$

$\Rightarrow f(2) = a^{2b} + b^{2a}$

$= 400 + 400 = 800$

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t) = t(t-1)(at+b) \quad (a \neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\displaystyle\int_0^1 |v(t)|\,dt = 2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\displaystyle\int_0^1 v(t)\,dt = 0$

ㄴ. $|x(t_1)| > 1$인 t_1이 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

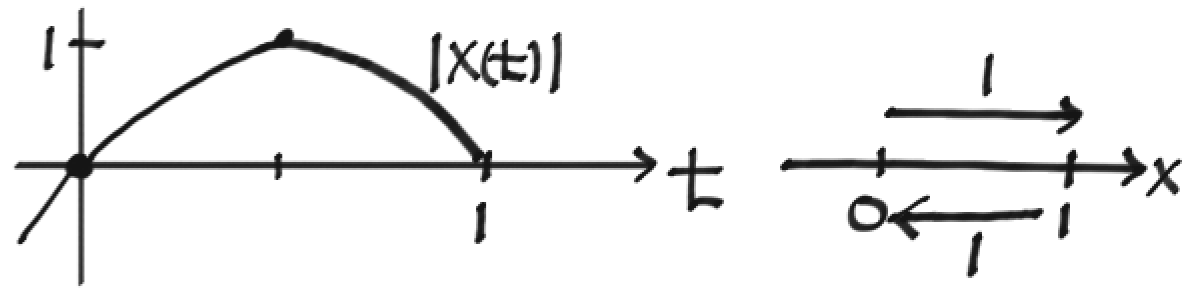
ㄷ. $0 \le t \le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)| < 1$이면 $x(t_2) = 0$인 t_2가 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

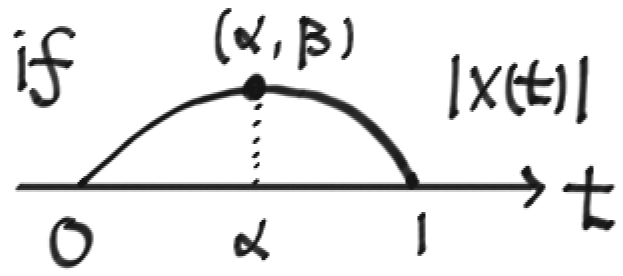
ㄱ. $\int_0^1 v(t)dt = x(1) - x(0) = 0$ (O)

ㄴ. $t = 0 \sim 1$ 실제로 움직인 거리 : 2 (X)

$\Rightarrow$



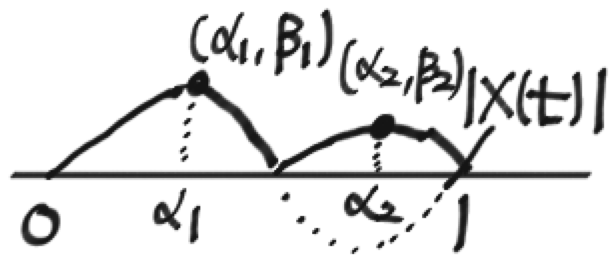
ㄷ. if



$\beta < 1$

$\Rightarrow \int_0^1 |v(t)|dt = 2\beta < 2$ (모순)

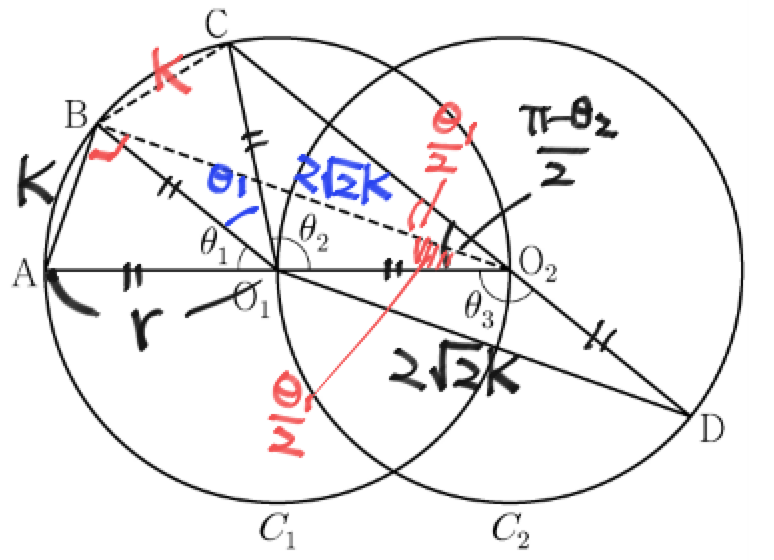
$\Rightarrow$



$\beta_1 < 1$
$\beta_2 < 1$

$\int_0^1 |v(t)|dt = 2\beta_1 + 2\beta_2 = 2$ (O)
가능

15. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다.
이때 $\angle BO_1A = \theta_1$, $\angle O_2O_1C = \theta_2$, $\angle O_1O_2D = \theta_3$이라 하자.

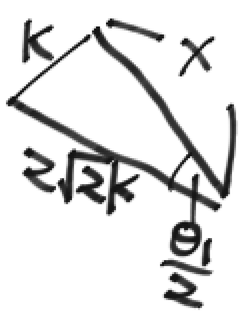


다음은 $\overline{AB} : \overline{O_1D} = 1 : 2\sqrt{2}$이고 $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle CO_2O_1 + \angle O_1O_2D = \pi$이므로 $\theta_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$에서 $2\theta_1 + \theta_2 = \pi$이므로 $\angle CO_1B = \theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\overline{AB} = k$라 할 때 2r="3k"
> $\overline{BO_2} = \overline{O_1D} = 2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2} = \boxed{(가)}$이고,
> $\angle BO_2A = \frac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\frac{\theta_1}{2} = \boxed{(나)}$이다. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
> 삼각형 O_2BC에서
> $\overline{BC} = k$, $\overline{BO_2} = 2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B = \frac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C} = \boxed{(다)}$이다.
> $\overline{CD} = \overline{O_2D} + \overline{O_2C} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2C}$이므로
> $\overline{AB} : \overline{CD} = k : \left(\frac{\boxed{(가)}}{2} + \boxed{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p) \times g(p)$의 값은? [4점]

① $\frac{169}{27}$ ② $\frac{56}{9}$ ③ $\frac{167}{27}$ ④ $\frac{166}{27}$ ⑤ $\frac{55}{9}$



$\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{x^2+7k^2}{2\cdot 2\sqrt{2}k\cdot x}$ $(x<2\sqrt{2}k)$
$\Rightarrow 3x^2-16kx+21k^2$
$=(3x-7k)(x-3k)=0$
$\Rightarrow x=\frac{7}{3}k$
$\rightarrow f(p)\cdot g(p) = 7p^2 = \frac{56}{9}$

단답형

16. $\log_2 120 - \frac{1}{\log_{15} 2}$의 값을 구하시오. [3점] 3

$= \log_2 120 - \log_2 15$
$= \log_2 8 = 3$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 3x^2 + 2x$이고 $f(0) = 2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점] 4

$f(x) = x^3 + x^2 + 2 \xrightarrow{x=1} 4$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{2} = 56, \quad \sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{8} a_k = 100$$

일 때, a_8의 값을 구하시오. [3점] 12

$$2\sum_{1}^{10} a_k - \sum_{1}^{7} a_k = 112$$

$$2\sum_{1}^{10} a_k - \sum_{1}^{8} a_k = 100$$

$$a_8 = 12$$

19. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - (a^2 - 8a)x + 3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오. [3점] 6

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - a^2 + 8a$$

$$D/4 = a^2 + 3a^2 - 24a$$

$$= 4(a^2 - 6a) \le 0$$

$$\Rightarrow 0 \le a \le 6$$

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x) = x$이다.
>
> (나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 $f(x+1) - xf(x) = ax + b$이다.

$60 \times \int_1^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점] 110

① (가), (나) : $[0, 1]$에서

$$f(x+1) - x^2 = ax + b$$

$$\Rightarrow f(x+1) = x^2 + ax + b$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)^2 + a(x-1) + b \quad [1, 2]$$

② f: 연속 $\Rightarrow x=1 : 1 = b$

f: 미가 $\Rightarrow x=1 : 1 = a$

$$\Rightarrow 60 \cdot \int_1^2 \{(x-1)^2 + (x-1) + 1\} dx$$

$$= 60 \int_0^1 (x^2 + x + 1) dx$$

$$= 60 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) = 110$$

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|a_1|=2$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_{n+1}|=2|a_n|$이다.
>
> (다) $\sum_{n=1}^{10} a_n=-14$

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값을 구하시오. [4점] 678

① (가), (나) : $|a_n|=2^n$

② (다) : $\sum_{n=1}^{10} a_n=-14$

그런데, $\sum_{k=1}^{n} 2^k=2^{n+1}-2$

즉, $\{a_n\}$: $\underbrace{2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^9}_{=\,2^{10}-2},\ -2^{10}$ 이면 $\sum_{n=1}^{10} a_n=-2$

-12 필요

$6=2^1+2^2$이므로

$\{a_n\}$: $-2,\ -4,\ 8,\ 16,\ \cdots,\ 2^9,\ -2^{10}$

$\Rightarrow a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$

$=\underbrace{-2+8+32}_{38}+\underbrace{128+512}_{640}$

$=678$

22. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

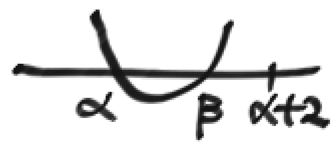
> (가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t\to a+} g(t)+\lim_{t\to a-} g(t)\le 2$이다.
>
> (나) $g(f(1))=g(f(4))=2,\ g(f(0))=1$

9

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

① $f(x)=\frac{1}{2}x^3+\cdots$, $f'(x)=\frac{3}{2}x^2+\cdots$

② (나) : $f'(x)=0$ 실근 2개 $(\alpha<\beta)$

③ (가) : $\beta-\alpha<2$ 이면 

$a=\alpha$일 때 모순

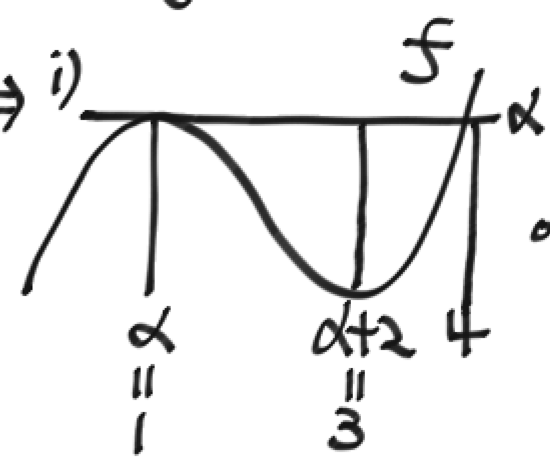
$\beta-\alpha\ge 2$ 이면 

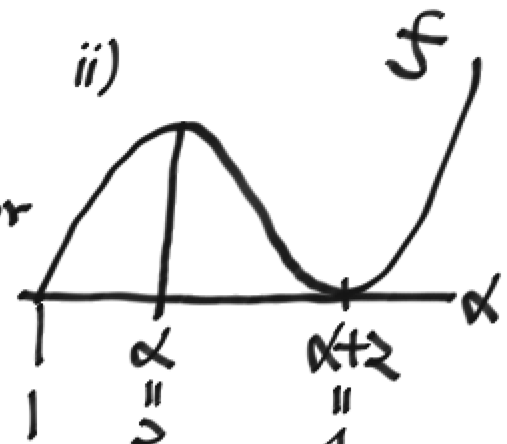
(OK)

④ (나) : $\beta-\alpha>2$ 이면 모순

$\Rightarrow \beta=\alpha+2,\ f(1)=f(4)=\alpha$

$\alpha-2\le f(0)<\alpha$ or $\alpha<f(0)\le\alpha+2$

$\Rightarrow$ i) 

or ii) 

i) $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)+1 \Rightarrow f(0)=-1$ (O)

ii) $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-4)^2+2 \Rightarrow f(0)=-6$ (X)

$\Rightarrow f(5)=\frac{1}{2}\cdot 16+1=9$

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. 다항식 $(x+2)^7$의 전개식에서 x^5의 계수는? [2점]

① 42 ② 56 ③ 70 ④ 84 ⑤ 98

$_7C_5 \cdot 2^2 = 84$

24. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르고 $\mathrm{V}(2X)=40$일 때, n의 값은? [3점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

$40 = 4V(X) = 4 \cdot n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$

$\Rightarrow n = 45$

25. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는? [3점]

> (가) $a+b+c+d+e=12$
>
> (나) $|a^2-b^2|=5$

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

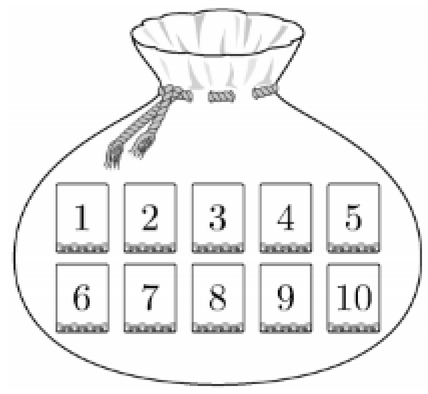
(나) : $|(a+b)(a-b)|=5$

i) $\begin{cases} a+b=5 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow {}_3H_4=15$

ii) $\begin{cases} a+b=5 \\ a-b=-1 \end{cases} \Rightarrow {}_3H_4=15$

26. 1부터 10까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 카드 3장을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4 이하이거나 7 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{13}{15}$ ④ $\frac{9}{10}$ ⑤ $\frac{14}{15}$



$a<b<c$

$\begin{cases} \text{Want} : a \le 4 \text{ or } a \ge 7 \\ \text{not} : a=5 \text{ or } 6 \end{cases}$

$a=5 : {}_5C_2=10$

$a=6 : {}_4C_2=6$

$\Rightarrow \text{not}: \frac{16}{{}_{10}C_3} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}$

$\Rightarrow \text{want}: \frac{13}{15}$

27. 어느 자동차 회사에서 생산하는 전기 자동차의 1회 충전 주행 거리는 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다.
이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 100대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다.
이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 400대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다.
$\overline{x_1} - \overline{x_2} = 1.34$이고 $a = c$일 때, $b - a$의 값은? (단, 주행 거리의 단위는 km이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 5.88 ② 7.84 ③ 9.80 ④ 11.76 ⑤ 13.72

$X \sim N(m, \sigma^2)$

$n=100 : b-a = 2 \cdot \frac{196}{100} \cdot \frac{\sigma}{10}$

$n=400 : c = \overline{X_2} - \frac{258}{100} \cdot \frac{\sigma}{20}$

$a = \overline{X_1} - \frac{196}{100} \cdot \frac{\sigma}{10}$

$0 = \frac{134}{100} - \frac{67\sigma}{1000}$

$\Rightarrow \frac{\sigma}{10} = 2$

$\Rightarrow b-a = \frac{784}{100}$

28. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는? [4점]

(가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \ge \sqrt{x}$이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128 ② 138 ③ 148 ④ 158 ⑤ 168

① (가) : $f(1) \geq 1$

$f(2), f(3), f(4) \geq 2$

$f(5) \geq 3$

② (나)

i) $1, 2, 3 : f(1)=1, f(5)=3$

$\Rightarrow 2^3 - \underset{\text{all } 3}{1} = 7$

ii) $1, 2, 4 : f(1)=1, f(5)=4 \Rightarrow 7$

iii) $1, 3, 4 : f(1)=1, f(5)=3$ or 4

$\Rightarrow 2 \times (2^3-1) = 14$

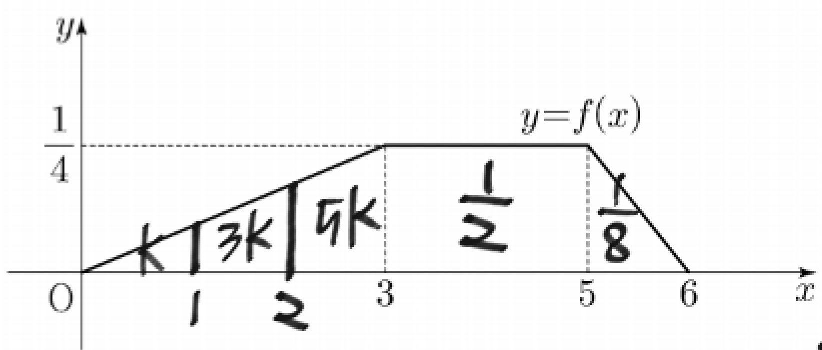
iv) $2, 3, 4 : f(5)=3$ or 4

$\Rightarrow \underset{f(5)=3}{2 \times} \begin{cases} 3 : 0\text{개} \Rightarrow 2^4 - 2 = 14 \\ 3 : 1\text{개} \Rightarrow 4 \times (2^3-2) = 24 \\ 3 : 2\text{개} \Rightarrow {}_4C_2 \times 2 = 12 \end{cases}$

$= 100$

단답형

29. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 6$, $0 \le Y \le 6$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0 \le f \le \frac{1}{4}$

$0 \le x \le 6$인 모든 x에 대하여

$$f(x)+g(x)=k \ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킬 때, $\mathrm{P}(6k \le Y \le 15k)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 31

$$\int_0^6 f(x)dx+\int_0^6 g(x)dX=6K$$

$$\underset{1}{\|} \qquad \underset{1}{\|}$$

$\Rightarrow K=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow P(2 \le Y \le 5)$

$= \int_2^5 g(x)dX = \int_2^5 \left(\frac{1}{3}-f(x)\right)dX$

$= 1-\frac{3}{8}\times\frac{5}{9}-\frac{1}{2}$

$= \frac{7}{24}$

30. 흰 공과 검은 공이 각각 10개 이상 들어 있는 바구니와 비어 있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 $\frac{1}{3}$
> 나온 눈의 수가 5 이상이면
> 바구니에 있는 흰 공 2개를 주머니에 넣고, aa
> 나온 눈의 수가 4 이하이면 $\frac{2}{3}$
> 바구니에 있는 검은 공 1개를 주머니에 넣는다. b

위의 시행을 5번 반복할 때, $n(1 \le n \le 5)$번째 시행 후 주머니에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 a_n, b_n이라 하자. $a_5+b_5 \ge 7$일 때, $a_k=b_k$인 자연수 $k(1 \le k \le 5)$가 존재할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. 191

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

all: 2 2 2 2 2 → 1
2 2 2 2 1 → 5×2=10
want(2 2 2 1 1 → $10\cdot2^2=40$
2 2 1 1 1 → $10\cdot2^3=80$

↑ $\frac{131}{243}$

i) 1 1 2 2 2
2 1 1 2 2
1 2 1 2 2
$3\times2^2 = 12$

ii) 1 1 2 _ _
2 1 1 _ _
1 2 1 _ _
$6\times2^3 = 48$

$\frac{60}{243}$

$\Rightarrow \frac{60}{131}$

> ＊ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\boxed{\frac{5}{n}}+\frac{3}{n^2}}{\boxed{\frac{1}{n}}-\frac{2}{n^3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x^3+x)=e^x$$

을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은? [3점]

① e ② $\frac{e}{2}$ ③ $\frac{e}{3}$ ④ $\frac{e}{4}$ ⑤ $\frac{e}{5}$

$f'(x^3+x)\cdot(3x^2+1)=e^x$

$\xrightarrow{x=1} f'(2)=\frac{e}{4}$

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3, \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\,2}=6$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$a_n = a \cdot r^{n-1}$

$$\begin{cases} \dfrac{a(1-r)}{1-r^2} = \dfrac{a}{1+r} = 3 \\ \dfrac{a^2}{1-r^2} = 6 = \dfrac{9(1+r)}{1-r} \end{cases}$$

$\Rightarrow 6-6r = 9+9r$

$\Rightarrow r = -\frac{1}{5}, \; a = \frac{12}{5}$

$\Rightarrow \dfrac{a}{1-r} = 2$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$ 의 값은? [3점]

① $\ln 5$ ② $\dfrac{\ln 5}{2}$ ③ $\dfrac{\ln 5}{3}$ ④ $\dfrac{\ln 5}{4}$ ⑤ $\dfrac{\ln 5}{5}$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\,\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\left(\frac{k}{n}\right)}{\left(\frac{k}{n}\right)^3+3\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}\ln(x^3+3x^2+1)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\ln 5$$

27. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치가 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$ ② $\frac{e^4}{2}-\frac{5}{16}$ ③ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{8}$

$x^2-t^2x+\frac{\ln t}{8}=0$

근 : α, β $\begin{cases}\alpha+\beta=t^2\\ \alpha\beta=\frac{\ln t}{8}\end{cases}$

$P\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$

$=P\left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^4-\frac{\ln t}{4}}{2}\right)$

$\Rightarrow \vec{v}(t)=\left(t, 2t^3-\frac{1}{8t}\right)$

$\Rightarrow |\vec{v}(t)|=2t^3+\frac{1}{8t}$

$\Rightarrow \int_1^e \left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{8}\ln t\right]_1^e$

$=\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$

28. 함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$$

라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x)=12\pi(x-1),\ f''(x)=12\pi$

$g'(x)=\{3-4\sin f(x)\}\cdot f'(x)$

$g''(x)=-4\cos f(x)\cdot\{f'(x)\}^2$

$+\{3-4\sin f(x)\}f''(x)>0$

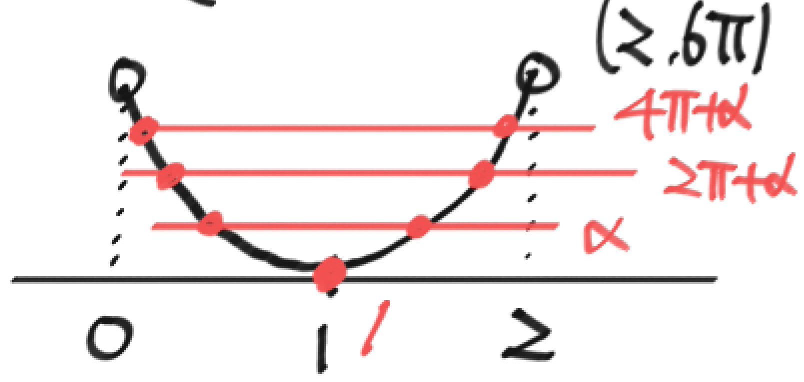
i) $x=1$: $g''(1)=36\pi>0$ (O)

ii) $\sin f(x)=\frac{3}{4}$, $\cos f(x)=-\frac{\sqrt{7}}{4}$: $g''>0$ (O)

iii) $\sin f(x)=\frac{3}{4}$, $\cos f(x)=\frac{\sqrt{7}}{4}$: $g''<0$ (X)

$f(x)=\alpha,\ 2\pi+\alpha,\ 4\pi+\alpha,\ 6\pi+\alpha, \cdots$

$\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$



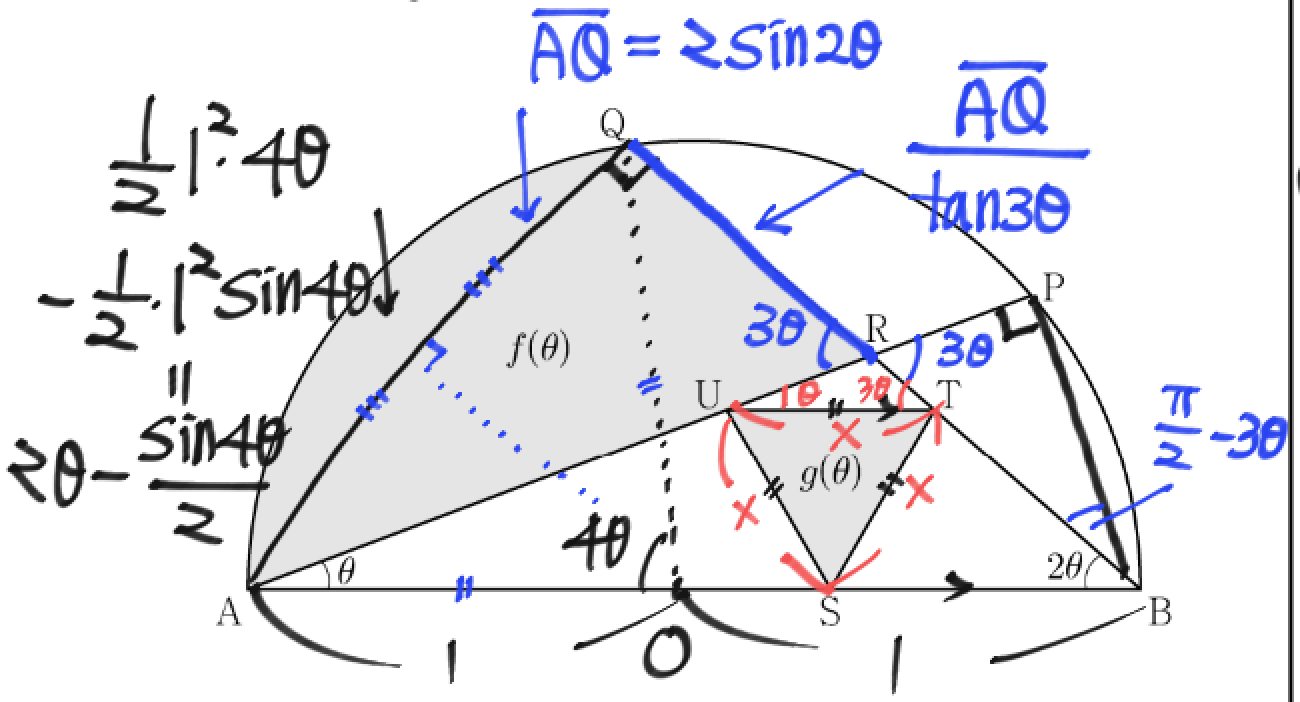
7개

단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB=\theta$, $\angle QBA=2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자.
선분 AB 위의 점 S, 선분 BR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 선분 UT가 선분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,
$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. 11

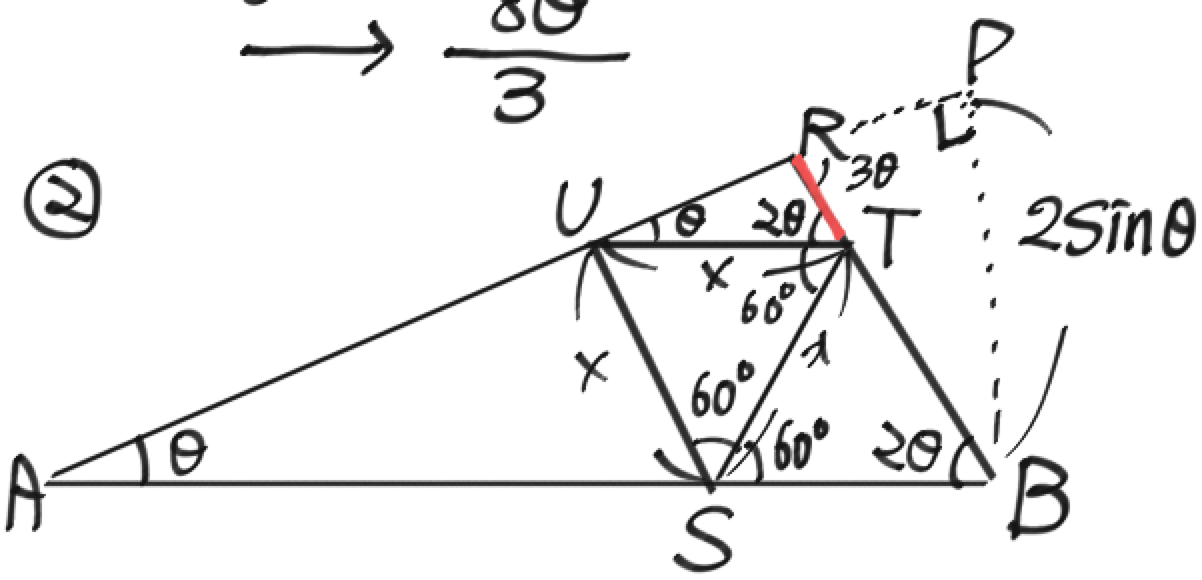
(단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\overline{AQ}=2\sin2\theta$



①
$$\Rightarrow f(\theta)=2\theta-\frac{\sin4\theta}{2}+\frac{1}{2}2\sin2\theta\,\frac{2\sin2\theta}{\tan3\theta}$$
$$=2\theta-\frac{\sin4\theta}{2}+\frac{2\sin^2 2\theta}{\tan3\theta}\xrightarrow{\theta\to0+}\frac{8\theta}{3}$$

②



$\overline{RB}=\frac{2\sin\theta}{\sin3\theta}$ $\overline{RT}=\frac{x\sin\theta}{\sin3\theta}$

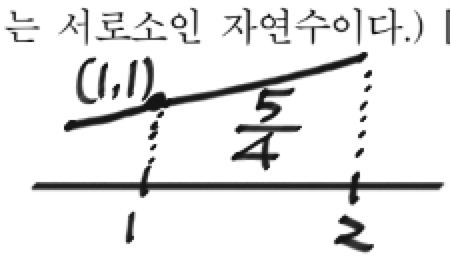
$$\Rightarrow\frac{x}{\sin2\theta}=\frac{\overline{BT}}{\sin60°}=\frac{(2-x)\sin\theta}{\frac{\sqrt3}{2}\sin3\theta}$$
$$\Rightarrow\frac{\sqrt3}{2}\sin3\theta\,x=2\sin\theta\sin2\theta-x\sin\theta\sin2\theta$$
$$\Rightarrow x=\frac{2\sin\theta\sin2\theta}{\frac{\sqrt3}{2}\sin3\theta+\sin\theta\sin2\theta}\xrightarrow{\theta\to0}\frac{8\theta}{3\sqrt3}\Rightarrow g(\theta)=\frac{\sqrt3}{4}\cdot\frac{64}{27}\theta^2=\frac{16\theta^2}{27}\Rightarrow\frac{q}{p}=\frac{2}{9}$$

30. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=1$, $\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{5}{4}$
>
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x\geq1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\int_1^8 xf'(x)\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. 143

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

① (가):  $x\geq1$: $f(x)\geq1$

② (나): $x=1\Rightarrow g(2)=2\Rightarrow f(2)=2$
$x=2\Rightarrow g(4)=2f(2)=4\Rightarrow f(4)=4$
$x=4\Rightarrow f(8)=8$

$$\int_1^8 xf'(x)dx=\int_{f(1)}^{f(8)}g(x)dx=\int_1^8 g(x)dx$$
$$=\int_1^2 g(x)dx+\int_2^4 g(x)dx+\int_4^8 g(x)dx$$
i) ii) iii)

i) $2f(2)-f(1)-\int_1^2 f(x)dx=\frac{7}{4}$

ii) $x=2t$, $2dx=dt$: $\int_1^2 g(2t)2dt=4\int_1^2 f(t)dt=5$

iii) $x=2t$, $2dx=dt$: $\int_2^4 g(2t)\cdot2dt=4\int_2^4 f(t)dt$
$$=4\left(4f(4)-2f(2)-\int_2^4 g(t)dt\right)$$
$$=4(16-4-5)=28\quad\therefore\frac{139}{4}$$

* 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

23. 좌표공간의 점 A$(2, 1, 3)$을 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 P라 하고, 점 A를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는? [2점]

① $5\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $3\sqrt{6}$
④ $2\sqrt{14}$ ⑤ $2\sqrt{15}$

$P(2, 1, -3)$ $Q(-2, 1, 3)$

$\Rightarrow \overline{PQ} = 2\sqrt{13}$

24. 한 초점의 좌표가 $(3\sqrt{2}, 0)$인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{6} = 1$의 주축의 길이는? (단, a는 양수이다.) [3점]

① $3\sqrt{3}$ ② $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ ③ $4\sqrt{3}$
④ $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

$a^2 + 6 = 18 \Rightarrow 2a = 4\sqrt{3}$

25. 좌표평면에서 두 직선

$$\frac{x+1}{2}=y-3,\quad x-2=\frac{y-5}{3}$$

가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

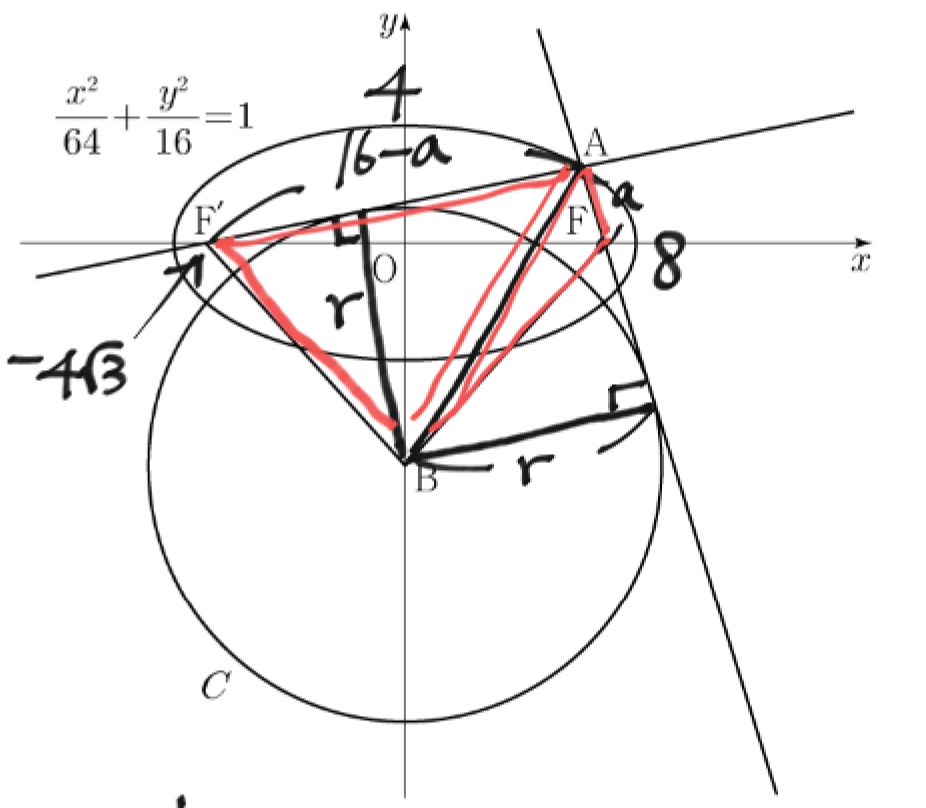
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\vec{d_1}=(2,1)\quad \vec{d_2}=(1,3)$

$\cos\theta=\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

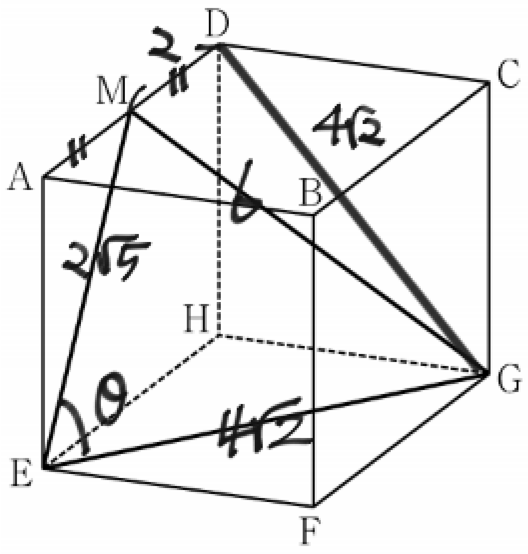
26. 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A가 있다. 두 직선 AF, AF′에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 중 중심의 y좌표가 음수인 것을 C라 하자. 원 C의 중심을 B라 할 때 사각형 AFBF′의 넓이가 72이다. 원 C의 반지름의 길이는? [3점]

① $\frac{17}{2}$ ② 9 ③ $\frac{19}{2}$ ④ 10 ⑤ $\frac{21}{2}$



$72=\frac{1}{2}r\cdot(16-a+a)=8r$

27. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4 인 정육면체 ABCD-EFGH 가 있다. 선분 AD 의 중점을 M 이라 할 때, 삼각형 MEG 의 넓이는? [3점]



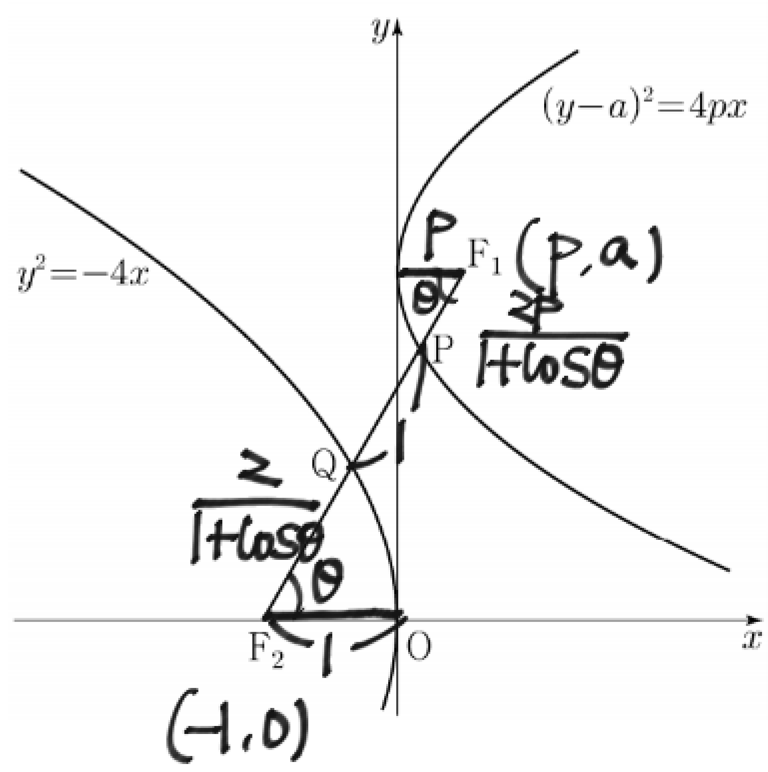
① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

$$\cos\theta = \frac{20+32-36}{2\cdot 2\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 4\sqrt{2}\times \frac{3}{\sqrt{10}} = 12$$

28. 두 양수 a, p에 대하여 포물선 $(y-a)^2=4px$의 초점을 F_1이라 하고, 포물선 $y^2=-4x$의 초점을 F_2라 하자. 선분 F_1F_2가 두 포물선과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{F_1F_2}=3$, $\overline{PQ}=1$이다. a^2+p^2의 값은? [4점]

① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7



$$\frac{2(1+p)}{1+\cos\theta} = 2 \Rightarrow p = \cos\theta$$

$$= \frac{\overrightarrow{F_2O}\cdot\overrightarrow{F_2F_1}}{|\overrightarrow{F_2O}||\overrightarrow{F_2F_1}|}$$

$$= \frac{p+1}{3}$$

$$\Rightarrow p=\frac{1}{2},\ (p+1)^2+a^2=9$$

$$\frac{9}{4} = 2+p^2$$

$$\Rightarrow p^2+a^2=7$$

단답형

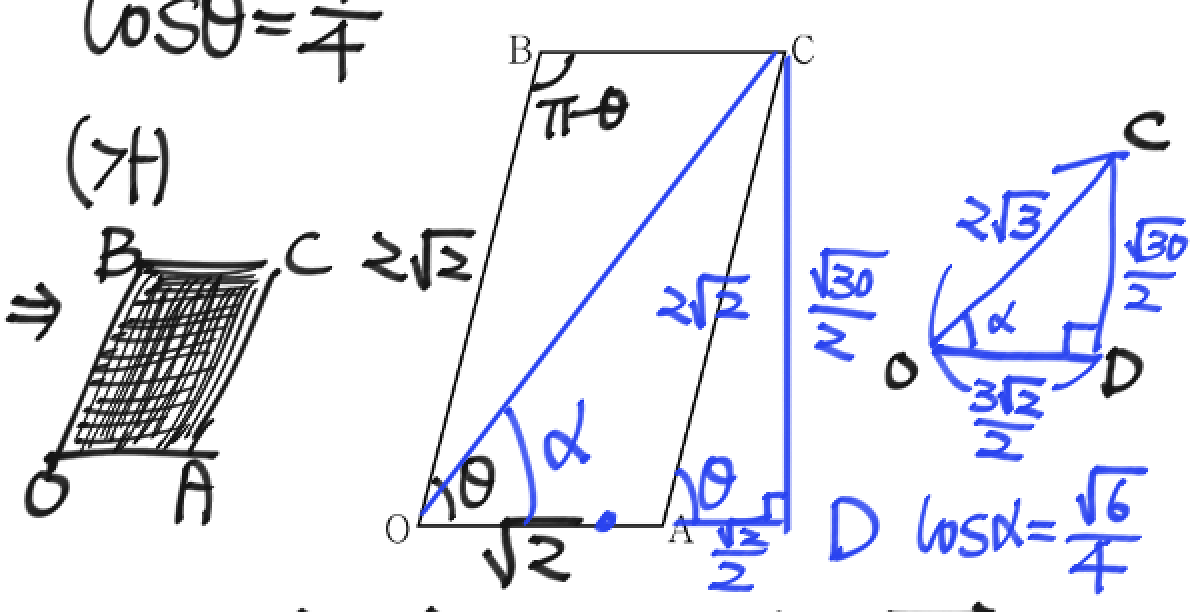
29. 좌표평면에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OB}}=2\sqrt{2}$ 이고 $\cos(\angle\mathrm{AOB})=\frac{1}{4}$ 인 평행사변형 OACB에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1)$
>
> (나) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2$

점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M\times m=a\sqrt{6}+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점] 100

$\cos\theta=\frac{1}{4}$

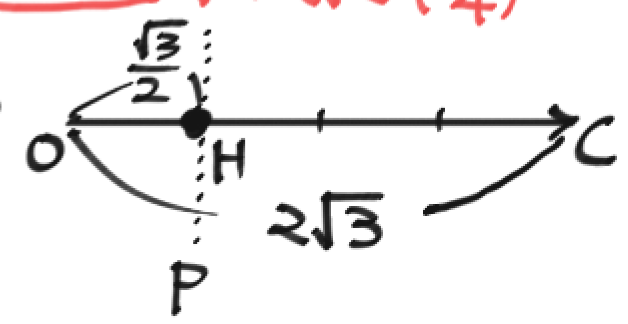
(가) ⇒



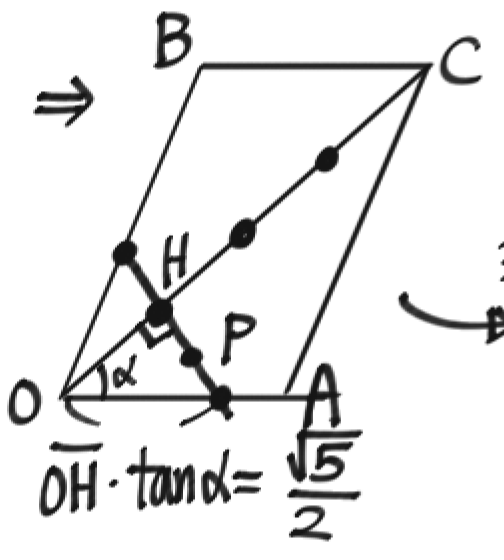
(나) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{BC}$

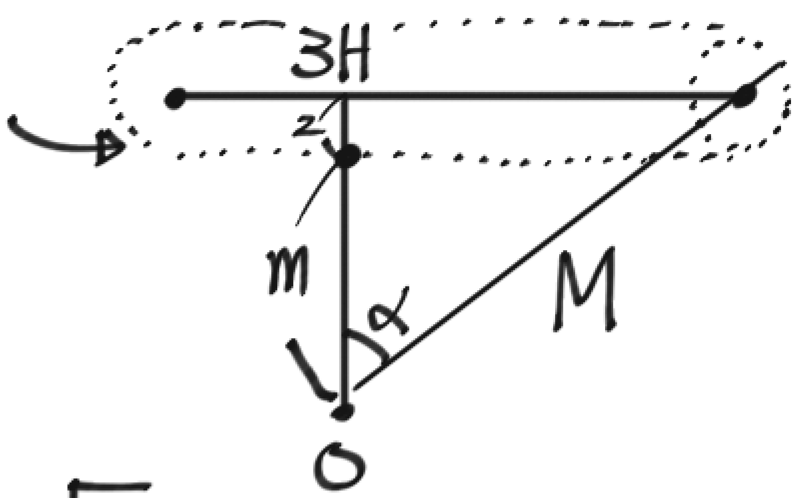
$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}$ $\sqrt2\cdot2\sqrt2\cdot(-\frac14)$

⇒ $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=3$



⇒





$M=\frac{3\overline{OH}}{\cos\alpha}+\sqrt2$

$=\frac{3\sqrt3}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt6}+\sqrt2=4\sqrt2$

$m=3\overline{OH}-\sqrt2=\frac{3\sqrt3}{2}-\sqrt2$

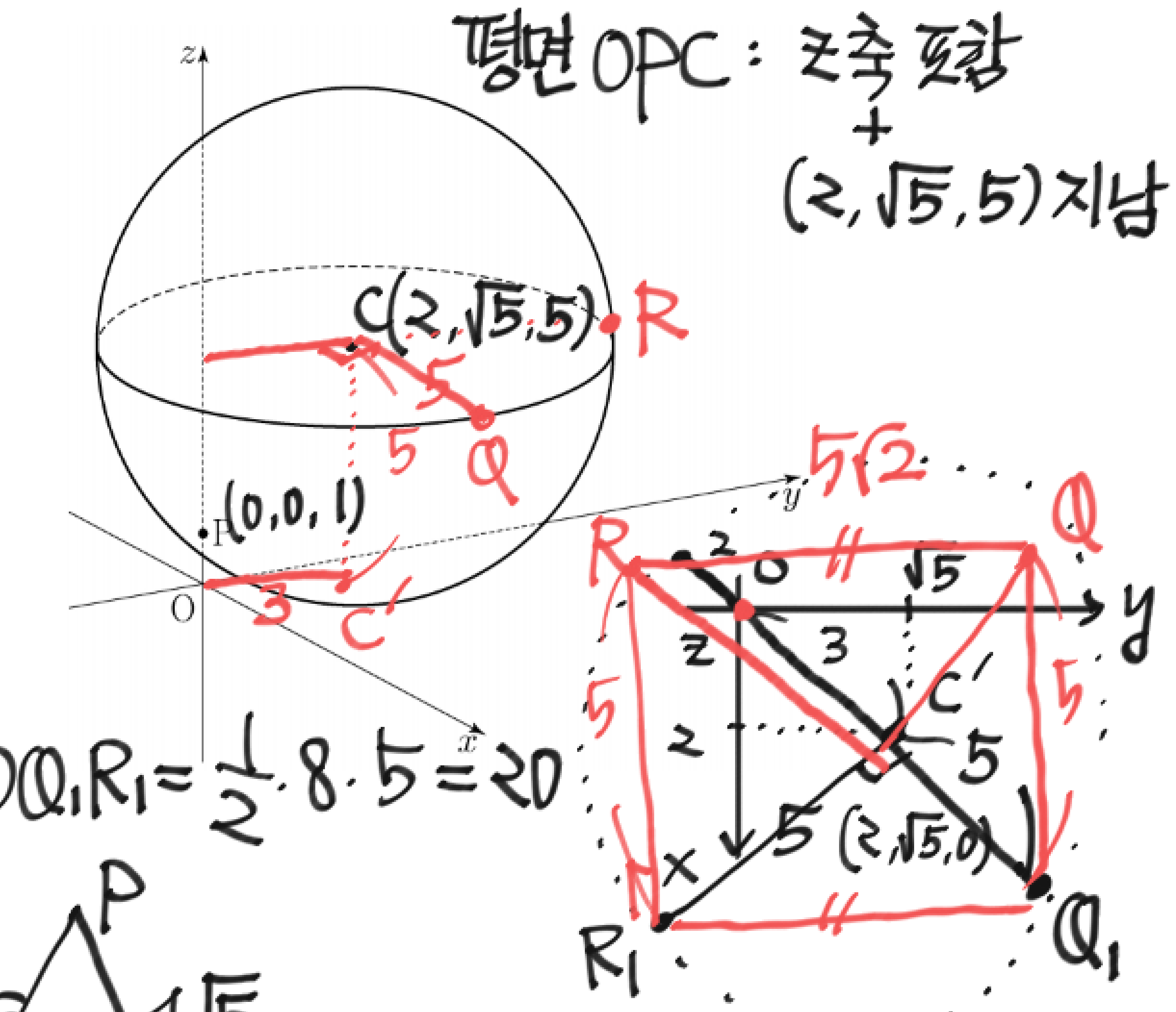
⇒ $Mm=6\sqrt6-8$

30. 좌표공간에 중심이 $\mathrm{C}(2,\ \sqrt{5},\ 5)$이고 점 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$을 지나는 구

$$S:(x-2)^2+(y-\sqrt{5})^2+(z-5)^2=25$$

가 있다. 구 S가 평면 OPC와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 Q, 구 S 위를 움직이는 점 R에 대하여 두 점 Q, R의 xy평면 위로의 정사영을 각각 Q_1, R_1이라 하자.
삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 Q, R에 대하여 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고 세 점 O, Q_1, R_1은 한 직선 위에 있지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 23

평면 OPC : z축 포함
+
$(2,\sqrt5,5)$ 지남



$\triangle OQ_1R_1=\frac12\cdot8\cdot5=20$

⇒ $\triangle PQR=\frac12\cdot4\sqrt5\cdot\sqrt{30}$

$=10\sqrt6$

⇒ $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt6}$

⇒ Want: $20\times\frac{2}{\sqrt6}=\frac{20\sqrt6}{3}$

> ∗ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.