제 2 교시

2022학년도 EBS 수능완성 실모 액기스 Final

수학 영역

홀수형

성명			수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

무료배포자료

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

본 자료 활용 방법)

1. xxxxx-xxxx 로 구성된 숫자는 교재의 문항번호입니다.
   오타가 있을 수 있으니, 해당 문제를 찾아 교재에서 푸는 것이 제일 Best합니다.

2. 문항번호 옆의 별(중요도)은 '수능출제 확률이 높은 문제'를 의미하기 보다는 '출제할 맛이 나는 문제'라는 의미입니다. 어차피 수능에서 EBS의 연계율이 낮아졌을뿐더러 체감적으로 최대 1~2문제 밖에 안느껴지는 수학에서의 연계성 때문에 똑같은 문제가 나오길 기대한다면 어리석은 행동입니다. 여러분들의 수능을 위한 학습에 최적화된 문제를 골랐다고 생각하고, 본 자료에 있는 EBS 문제들은 반드시 다 보고 수능장에 들어갑시다.
   (총 5개의 파일이 배포될텐데, 다 해봤자 100문제도 안되고 이미 EBS 전체를 1회독 한 친구들은 이 5개 파일 하루컷 가능합니다.)

3. 출제자의 입장에서, 본 문항들이 각색되어 비슷한 난이도로 수능에서 출제된다면 몇 번쯤 배치될 것인지를 문제 말미에 적어두었습니다. 이 표시를 통해 문제의 객관적 난이도를 가늠해보실 수 있을 겁니다.

4. 기대T의 Comment는 채점 후 피드백할 때 읽어보시면 됩니다~

5. 문제/해설에 대한 오타제보는 kidae6150@gmail.com으로 보내주시면 감사히 시정하겠습니다.

특강!

1. '21년' 한양대 모의 적중+이화여대 모의논술 수석, '20년' 시립대 수석, '19년' 한양대 모범답안자 배출 등등 보여지는 지표로도 항상 증명하는 참된 Final

21년 한양대 모의논술 적중

2. 극한값 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]$와 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]$을 구하시오.

3. 극한값 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 - n\int_0^1 x^5 dx\right]$을 구하시오.

2021년 한양대 모의논술

[제시문 1]

함수 $f(x)=e^{x^2}$과 $t\in[\alpha,\beta]$ (단, α, β는 상수) 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

[문제 1-1] $f'(\alpha)\times(\beta-t)\le f(\beta)-f(t)\le f'(\beta)\times(\beta-t)$임을 보이시오. [5점]

[문제 1-2] $\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-n\int_0^1 f(x)dx\right\}$의 값을 구하시오. [15점]

2020년 기대T 수능 후 Final

이미 예견됐던 적중의 이유 -1

1. 양의 실수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 어떤 자연수 k에 대하여 $\sum_{n=1}^{k}a_n=\sum_{n=1}^{k}b_n$을 만족한다고 하자. 양의 실수 x에 대하여 $x\ln x\ge x-1$이 성립함을 보이고, 부등식 $\sum_{n=1}^{k}a_n\ln b_n\le\sum_{n=1}^{k}a_n\ln a_n$을 보이시오.

19 한양대 의예과 문제

$\boxed{3}$ 正の実数 p_i, q_i $(i=1,2,\cdots,n)$が $\sum_{i=1}^{n}p_i=\sum_{i=1}^{n}q_i=1$ を満たすとき，次の問いに答えなさい。

(1) 不等式 $\log x\le x-1$ が成り立つことを証明しなさい。

(2) 不等式 $\sum_{i=1}^{n}p_i\log p_i\ge\sum_{i=1}^{n}p_i\log q_i$ が成り立つことを証明しなさい。

(3) $F=\sum_{i=1}^{n}p_i\log p_i$ の最小値を求めなさい。

(4) 正の実数 a_i $(i=1,2,\cdots,n)$に対して，$G=\sum_{i=1}^{n}a_i\log a_i$ の最小値を求めなさい。

일본대학 본고사 문제 (15학년도)

초고난도로 알려져있는 한양대 의예과 문제 중 소문제 하나가 일본 본고사 소문제 (2)와 완벽한 판박이!
(일본수학 및 대학교 학부수학에선 $\ln x$를 $\log x$로 씀.)

이토록 일본문제와 유사한 문제를 자주 내니, 한양대 Final의 Base는 일본본고사여야함이 당연하다. 이를 위해 본고사 3천여문제를 검토 및 선별할 정도로, Final에 쏟은 정성은 무한하다.

21년 이화여대 모의논술 수석

점수

구분	문제1	문제2	문제3	총점
내 점수	34	30	35	99
응시자평균	15.5	16.1	10.5	42.1
응시자최고	35	30	35	99
전체석차 (이상석차)	1	1	1	1
표준편차	9.5	10.1	10.5	23.2
순위분포	2.6%	15.1%	6.1%	0.2%

※ 순위분포 : 등수 / 전체응시생수 * 100%
예) 100명중 10등을 한 경우 상위누적은 10%
순위분포는 "채점응시 인원수"에 대한 본인 순위의 비율이며, 숫자가 낮을수록 우수한 성적입니다.

2. 압도적 첨삭 시스템!! 비대면 수강생들도 1:1 첨삭 제공!!

첨삭시스템 비교

	일반적 Final	기대T Final
비대면 첨삭제공	첨삭 X	조교와 오픈카톡 매칭으로 1:1 첨삭 시스템 제공
답안 추가작성시간 제공 여부	제공 X → 문제풀기 급급 → 빈 답안지 제출 → 첨삭효율 ↓	제공 O → 추후 빈 답안지 보강 후 제출가능(혹은 못 풀었을시 해설강의 기반으로 답안작성) → 첨삭 받을 내용이 풍부해져 첨삭 효율 ↑
첨삭진 구성	일반 대학 알바생, 작년 합격 제자	Only 수학과/수교과 출신으로 구성된10인 최강 첨삭팀(업계최고수준! 박사과정 3인, 석사 및 학부졸업 5인 포함)

첨삭진이 부실하면 많은 양의 답안지를 첨삭해낼 수 없습니다. 그래서 지금까지의 Final들이 여러분에게 충분한 답안을 쓸 시간을 주지 않았던 거죠.

과거 3년 동안의 수험생활 중 제가 직접 겪었던 Final 첨삭의 불편한 진실을,최강 첨삭진들이 바로 잡아드립니다.

2022 EBS 수능완성 실모 액기스

제 2 교시 수학 영역

5지선다형

1. 21054 - 1010 / ★★☆☆☆

양수 k에 대하여 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(k)$의 값은? [10번]

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=k$

(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)f(x-1)}{(x-1)^2}=4$

① 11
② 12
③ 13
④ 14
⑤ 15

기대T Comment
극한에서의 인수정리를 적용하는 무난한 문제로 수완 실전편 문제코멘트를 시작한다. 삼차함수에서 정보가 2개이상 주어졌을 땐 문자를 두는 것을 두려워하지 말자.

2. 21054 - 1015 / ★★★★☆

실수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3ax+a^2+a$라 하자. 닫힌구간 [-1, 1] 에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값을 각각 $g(a)$, $h(a)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [14번]

< 보 기 >

ㄱ. $g(2)=11$

ㄴ. 함수 $g(a)$의 최솟값은 $\frac{9}{16}$이다.

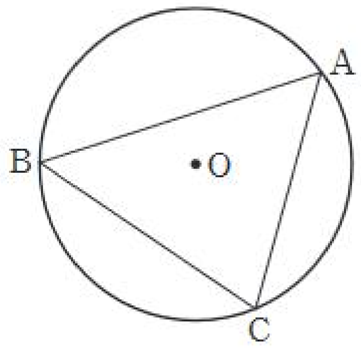
ㄷ. $h\left(-\frac{1}{2}\right)+h(1)=\frac{25}{4}$

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

기대T Comment
문자로 가려져있는 f(x)의 정해진 구간 내에서의 최댓값에 대한 문제. 본 문제의 보기에서는 구체적인 a값을 주고 h(x)을 물어봐서 풀만했지만, 일반적인 a에 대한 물음일 때 a의 구간을 어떻게 나누어 h(x)를 구할지 고민해볼 것.

3. 21054 - 1019 / ★★★★☆

그림과 같이 중심이 O인 원 위에 삼각형 ABC의 세 꼭짓점이 놓여 있고, 점 O와 변 AB 사이의 거리와 점 O와 변 AC 사이의 거리의 비는 1 : 2이다. $\overline{\text{AB}}=8\sqrt{2}$, $\sin C=\frac{2\sqrt{2}}{3}$일 때, $\sin^2 B=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 O는 삼각형 ABC의 내부에 있고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [20번]



기대T Comment
각 ABC를 t라 하면 원주각인 AOC는 2t이다. 또한 삼각형 AOC는 이등변삼각형이므로 점 O에서 선분 AC에 내린 수선의 발 H를 작도하면, 각 AOH 역시 t이다. 즉, 각ABC=각AOH이다. 이를 이용한 문제가 나올 가능성이 매우 높다. 흔한 상황이지만, 아직 낯설다면 이번 문제를 기점삼아 확실히 알아둘 것.

4. 21054 - 1022 / ★★★☆☆

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 0을 갖는다. (나) $g'(x)=f(x)+(x-2)f'(x)$ (다) 함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{3}{4}$을 갖는다.

$f(1)+g(1)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. [11번]

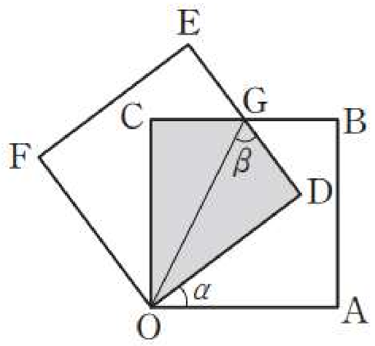
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

기대T Comment
(나)를 통해 g(x)=(x-2)f'(x)+C 꼴임을 알 수 있으면 충분한 문제. 이 문제에선 눈치채기 쉬웠지만, (ax+b)f(x)의 도함수가 af(x)+(ax+b)f'(x) 꼴임을 인지해두자.

5. 21055 - 1029 **미적분** / ★★★★☆

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 두 정사각형 OABC, ODEF가 있고 선분 BC와 선분 DE의 교점은 G이다. 정사각형 OABC의 내부와 정사각형 ODEF의 내부의 공통부분의 넓이가 $\frac{1}{2}$이고 $\angle \mathrm{DOA}=\alpha, \angle \mathrm{OGD}=\beta$일 때, $\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$의 값을 구하시오. (단, 점 D는 사각형 OABC의 내부에 있다.) [미적 27번]



기대T Comment
삼각형 GDO와 GCO가 합동임을 알아차렸다면 $\frac{\alpha}{2}$를 만들어낼 방법을 찾아냈을 것이다.

6. 21055 - 1030 **미적분** / ★★★☆☆

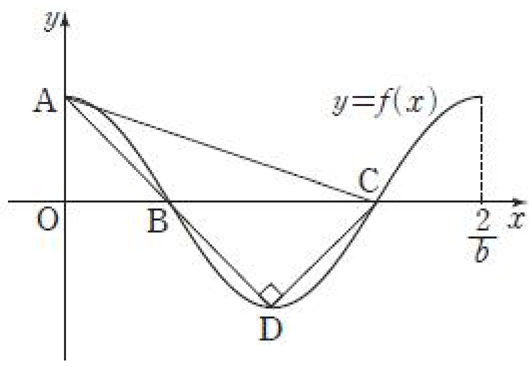
실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 등식

$\int_{1}^{x}(x-t+1)\ f(t)\ dt=(2ax+b)e^{-2x+2}+bx+a$를 만족시킨다. 함수 $g(x)=e^{x}f(x)$에 대하여 $g(2)=9e-c$일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 유리수이다.) [미적 29번]

기대T Comment
퀄리티는 개나 준 단순 연산 문제. 하지만 틀리면 안된다는 신중하 마음가짐으로 계산을 끝까지 해보도록 하자.

7. 20154 - 1044 / ★★★★☆

그림과 같이 두 상수 a, $b(a>0, b>0)$에 대하여 함수 $f(x)=a\cos b\pi x\left(0 \le x \le \frac{2}{b}\right)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A, x축과 만나는 점 중 x좌표가 작은 점부터 차례로 B, C, 직선 AB와 만나는 점 중 두 점 A, B가 아닌 점을 D라 하자.
$\angle\mathrm{ADC}=90^\circ$이고, 삼각형 ADC의 넓이가 18일 때, $a+b$의 값은? [11번]



① $\frac{8}{3}$
② $\frac{17}{6}$
③ 3
④ $\frac{19}{6}$
⑤ $\frac{10}{3}$

기대T Comment
삼각함수는 선대칭성과 점대칭성이 모두 있음을 인지하자. 점 B에 대한 점대칭함수이므로, 선분 AB=BD 이다. 따라서 삼각형 BDC의 넓이가 9임을 알 수 있다. 이제 직각이등변삼각형 BDC에서 각 변의 길이관계를 이용하고 넓이가 9임을 이용하여 마무리하면 되는 문제. 출제자 입장에서 외적와꾸가 나쁘지 않기 때문에 눈여겨볼만한 문제가 되겠다.

8. 21054 - 1045 / ★★★★☆

실수 t에 대하여 함수 $f(x)=x^2(x-t)^2$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{2}$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [13번]

< 보 기 >

ㄱ. $t \ne 0$이면 함수 $f(x)$는 $x=\frac{t}{2}$에서 극댓값을 가진다.
ㄴ. $\lim_{t\to a-} g(t) < \lim_{t\to a+} g(t)$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은 2이다.
ㄷ. 방정식 $t+1-g(t)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

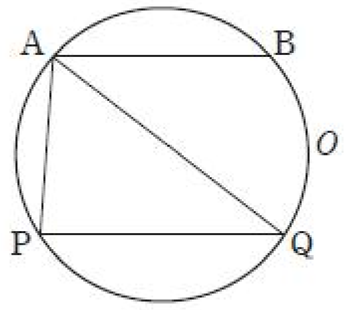
① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

기대T Comment
안전하게 t가 양수일 때와 음수일 때로 나누어 푸는 것을 추천한다.

9. 21054 - 1050 / ★★★★☆

그림과 같이 반지름의 길이가 3인 원 O에서 현 AB의 길이는 $2\sqrt{5}$이다. 직선 AB와 평행한 직선이 원 O와 두 점에서 만날 때 만나는 두 점을 P, Q라 하면 삼각형 APQ의 넓이는 $\overline{\mathrm{PQ}}=a$에서 최댓값을 가진다. $a^2=m+2\sqrt{n}$일 때, 두 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오. [21번]

(단, 직선 PQ는 직선 AB가 아니다.)



기대T Comment
사인-코사인법칙 문제인 척을 하지만 결국 수학2 문제인 카멜레온 문제다. 처음 시도하는 풀이가 수학1적 접근이었다고 자책할 필요 없다. 나도 그랬으니까,,

10. 20154 - 1051 / ★★★★★

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

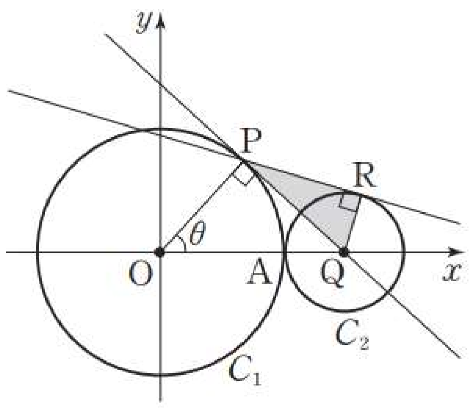
(가) 수열 $\{a_n+a_{n+1}\}$은 공차가 3인 등차수열이다. (나) $a_{20}=32$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오. [20번]

기대T Comment
$\{a_n+a_{n+1}\}$**이 등차수열이면** $\{a_n\}$ **등차수열이다. (X)** $\{a_n\}$**이 등차수열이면** $\{a_n+a_{n+1}\}$**등차수열이다. (O)** **두 명제의 차이를 확인해보도록 하자.**

11. 21055 - 1059 **미적분** / ★★★☆☆

그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C_1 위의 제 1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q를 중심으로 하고 점 A(1, 0)을 지나는 원을 C_2라 하고 점 P에서 원 C_2에 그은 접선의 접점 중 제 1사분면에 있는 점을 R라 하자. $\angle \mathrm{POA} = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $60 \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값을 구하시오. [미적 28번]



기대T Comment
알아낼 수 있는 각과 길이들을 따복따복 표현하다보면 나오는 문제. 직각삼각형이 나오면 그 삼각형의 각/변 6요소 중 2요소를 어떻게든 구해내면 풀 수 있다는 마인드로 문제를 접근하자.

12. 21054 - 1075 / ★★★★☆

자연수 n과 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} n^2 - 2n + 2 & (n \le 20) \\ 3n & (n \ge 21) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{6} a_{3k-2} + \sum_{k=7}^{15} k a_{3k}$의 값은? [13번]

① -1727
② -1729
③ -1731
④ -1733
⑤ -1735

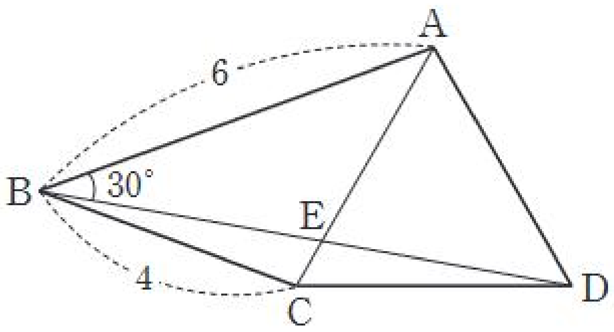
기대T Comment
n의 범위를 잘 나눠서 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 공식을 적용시키는 연습문제. 숫자가 지저분하지만, 딱 한 번쯤 풀어볼만한 문제이다.

13. 21054 - 1081 / ★★★★★★★★★★

그림과 같이 사각형 ABCD의 두 대각선이 만나는 점을 E라 하자. $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=4$, $\angle ABE=30^\circ$ 이고 삼각형 ACD가 정삼각형일 때, 삼각형 AED의 외접원의 지름의 길이는

$\frac{q(\sqrt{21}-3)}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. [21번]

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



기대T Comment

점 C가 삼각형 ABD의 외심이 되는 이유는 BC가 4였기 때문이다.
단순히 각 ACD가 각 ABD의 두배여서가 아님을 명심하자.
만약 후자의 각조건만 나오고 BC가 4가 아니었을 때에는, 삼각형 ACD의 외접원 위의 모든 점 중 직선 AD 기준 왼쪽에 있는 점들이 삼각형 ABD의 외심 후보이며, 이 점들 중 선분 AB의 수직이등분선 위에 있는 점들이 외심 최종후보가 될 것이다. 그림을 그려보면서 이해해놓으면 좋을 것 같다.

14. 21054 - 1082 / ★★★★☆

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점에서 만난다.
(나) 방정식 $f(x)=-k\,(5<k<6)$은 중근을 가진다.

자연수 n에 대하여 집합 S_n을

$S_n=\{\alpha \mid \alpha$는 함수 $|f(x)+n|$ 의 극댓값$\}$의 극댓값

이라 하자. 집합 $S_1 \cup S_2 \cup S_6$의 모든 원소의 합이 17이 되도록 하는 상수 k에 대하여 $100k$의 값을 구하시오. [14번, 21번]

기대T Comment

n=1, 2, 6 일 때 S_n을 구해서 정답을 내도 되지만, 일반적으로 S_n을 표현하는 쪽으로 생각을 해볼 것. (해설지 참고)

15. 21054 - 1104 / ★★★★☆

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(4)=0$이고 방정식 $f'(x)=0$의 두 근의 차는 5 이상이다.
(나) $0<h<5$인 임의의 h에 대하여

$$\int_{4-h}^{4} f'(x)dx \times \int_{4}^{4+h} f'(x)dx < 0$$

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근의 차의 최솟값은? [13번]

① $\frac{11}{2}$
② 6
③ $\frac{13}{2}$
④ 7
⑤ $\frac{15}{2}$

기대T Comment
(나)조건에 당황하지 말 것. 각각 정적분을 한 후 부호판단만 해주면 되는 문제다. 지금 문제에선 정적분이 됐지만, 정적분이 되지 않는 가려진 함수로 나왔을 때에는 정적분을 넓이 관점에서 생각하여 $f(x)$에 대한 정보를 알아챌 수 있어야 한다.

16. 21054 - 1105 / ★★★☆☆

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=1$
(나) $f'(0)=f'(1)=-3$
(다) $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 가지며 $|f(\alpha)-f(\beta)|=|\alpha-\beta|$이다.

$f(2)$의 값은? [13번]

① -21
② -19
③ -17
④ -15
⑤ -13

기대T Comment
(다)조건으로부터 최고차항의 계수 k와 $\alpha-\beta$의 관계를 구해내는 공식인 $|f(\alpha)-f(\beta)|=\frac{\lvert k \rvert}{2}|\alpha-\beta|^3$ 공식을 꼭 챙겨두자.

17. 21054 - 1135 / ★★★★★

삼차함수 $f(x)=x^3+kx$에 대하여 다항함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 0이 아닌 임의의 실수 a에 대하여

$$f'(a)=\frac{f(a)-f(g(a))}{a-g(a)}$$

(나) 방정식 $f'(x)\times f'(g(x))=k^2$의 실근 중 0이 아닌 두 실근의 곱은 $-\frac{5}{4}$이다.

0이 아닌 실수 x에 대하여 $g(x)\neq x$일 때, $g(k)$의 값은? [13번]
(단, k는 음의 상수이다.)

① 2
② 4
③ 6
④ 8
⑤ 10

기대T Comment

(가)의 우변을 평균변화율로 해석할 수 있어야겠다. 좌변은 $x=a$에서의 접선의 기울기이므로 그거와 같은 기울기로 평균변화율을 잡으려면 $g(a)$를 어떻게 잡아야할까?를 고민하면 정답이 풀린다.

18. 21054 - 1130 / ★★★☆☆

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $F(x)$를

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

라 할 때, 다음이 성립한다.

(가) $F(x)$는 $x=0$에서만 극값을 갖는다.
(나) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$F(1)-F(-1)=-4$일 때, $F(2)$의 값은? [12번]

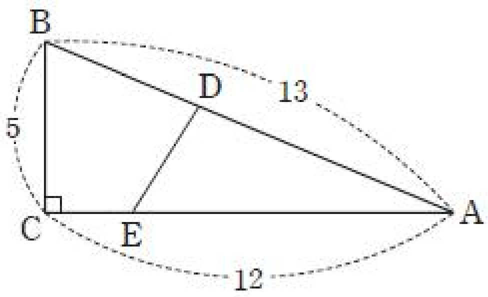
① 2
② 4
③ 6
④ 8
⑤ 10

기대T Comment

모든 조건을 $f(x)$로 해석해낼건지, 거꾸로 $F(x)$로 재해석해낼건지를 선택만 잘 한다면 문제자체는 어렵지 않은 문제다.

19. 21054 - 1141 / ★★★★☆

그림과 같이 $\overline{AB}=13$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CA}=12$인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AB 위의 한 점 D와 변 AC 위의 한 점 E에 대하여 선분 DE가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, 선분 DE의 길이의 최솟값을 m이라 하자. m^2의 값을 구하시오. [19번]



기대T Comment
넓이 이등분 관련 문제는 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$가 쓰이면서 a, b, θ 중 하나를 공유할 가능성이 높다.

수완 실전모의고사편 빠른 정답			
1.	2	11.	15
2.	3	12.	3
3.	14	13.	11
4.	31	14.	550
5.	7	15.	5
6.	57	16.	3
7.	4	17.	3
8.	5	18.	3
9.	35	19.	12
10.	330		

2021년 추가 무료 컨텐츠

EBS 수완, 수특 선별문항목록/변형문항 및 각종 자료글은
orbi.kr/profile/416016 에서 확인할 수 있습니다.

!!수리논술 Final 신청링크 QR코드!!

1주차 (Live/비대면)	채점 or 첨삭	소개 (1주차 수업은 오직 네이버 Band 비대면으로만 진행, 2,3주차는 대면+비대면 동시진행)
가톨릭 의예과반 (2회)	O	1. 모의고사 1회분 응시 이후 해설강의 수강 + 재출제 가능성 높은 기출 요소 정리 2. 채점 or 첨삭 O
건국대 (이과+수의예과) (2회)	O	1. '기하'가 빠졌지만 기하학 문제는 60% 이상 내왔던 건대 특성 맞춤 모의 2회 응시 및 해설강의 2. 채점 or 첨삭 O
서강대 (1회)	X	1. 수학적 의미가 적으나 복잡한 계산이나 증명을 주로 내는 서강대 타겟 모의고사 1회분 및 재출제 가능성 높은 기출 요소 정리 2. 컴팩트한 수업으로 경향예측 및 실전전략수립
숭실대/항공대 (1회)	X	1. 모의고사 1회분 및 재출제 가능성 높은 기출 요소 정리 2. 컴팩트한 수업으로 경향예측 및 실전전략 수립
경희대A반 (이과전체) -토요일 시험반- (2회)	O (금 제출)	1. 시험일정에 맞춰 반 선택 (모의고사 각각 2, 3회 진행 및 주요 기출 요소 정리) 2. 채점 or 첨삭 O
경희대B반 (이과+약대) -일요일 시험반- (3회)	O (토 제출)	
성균관대 (이과전체+약대) (2회)	O	1. 하나의 제시문에 관련된 소문항을 차근차근 풀어가는 연습이 필요한 학교. 난이도 자체는 높지 않으므로 2번의 특강으로 수리논술 워밍업 후 시험보러가면 큰 소득이 있기에 좋은 학교! 2. 채점 or 첨삭 O
서울과기대 (월요일 시험반)(3회)	O	1. 시험일정에 맞춰 반 선택 (모의고사 각각 2, 3회 진행 및 주요 기출 요소 정리) 2. 채점 or 첨삭 O
서울과기대 (화요일 시험반) (4회)	O	

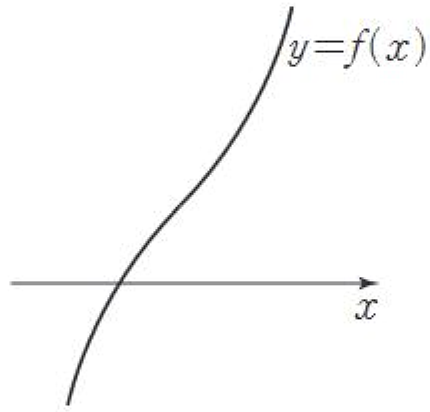
2주차 (대면+비대면)	소개
한양대 (이과전체)	1. 한양대 모범답안자 배출, 22학년도 모의논술 문항 적중 등 기대T의 시그니쳐 강의 중 하나 2. 철저히 한양대 스러운 문제들로 구성한 모의고사 문제들에 곁들여지는 'Smart, But simple'을 강조하는 해설강의가 핵심 3. 출제스타일이 매우 유사한 이화여대 지원자도 수강 추천
중앙대 (이과+의예+약학)	1. 무난한 난이도로 대부분 출제되나 몇몇 킬러문제에 의해 당락이 결정되는 만큼 충분한 문풀 준비가 필요한 학교 2. 과와 관련없이 비슷한 난이도일 뿐더러 공통된 시험지형식으로 출제되는 학교이므로 의예과나 약학과, 또는 안성캠 지원자들도 상관없이 수강 가능
세종대+광운대 연합반	1. 제시문이 있냐(광운) 없냐(세종)로 난이도가 결정될 뿐 유사한 문제스타일을 가진 두 학교를 분석하면서 기출대비(=지원학교문제)와 예상문제대비(=상대학교문제)를 동시에 할 수 있는 강좌 2. 두 학교 사이의 미묘한 출제경향차이 또한 강조해주기 때문에 둘 중 한 학교에 지원했더라도 수강 추천 (과년도 [세종:광운:둘다지원] 수강생비율 [3:4:3]) 3. 해설지만 봐서는 억지였던 풀이들이 수업을 들은 후 자연스럽게 익혀지는 신기한 경험 가능!
고려대 세종캠 약대	1. 고려대 본캠 수리논술 합격 출신 강사의 믿을 수 있는 출제예상 문항선별 안목 2. 논술을 처음 시행하는 약대인 만큼 모의논술에서도 무난한 난이도, 유명한 소재들 위주로 출제됐고 실제시험도 그럴 예정. 다른 학교 수리논술을 준비할 때에도 Base가 돼줄 필수주제 위주로 단기간 정리!
경북+부산 연합반 (Only Live + 비대면)	1. 수능형 스타일을 출제하는 학교들의 연합 Final. (의치약 지원자는 전용 Final 수강할 것!) 2. 고려 세종, 한국외대 지원자 수강 추천 (연세 미래캠 지원자도 수강은 가능하나 확통특강 추가하여 들을 것) 3. 1~3회차는 주로 출제될 수학Ⅰ, Ⅱ 위주 진행, 4~5회차 강의는 각 학교별 맞춤문제로 진행함으로써 학교별 개성까지 챙겨갈 수 있는 Final (경북, 외대 : 수학Ⅰ,Ⅱ / 부산, 고려:미적)
비고	* 전부 5회 수업 * 모든반 첨삭 제공 * 수업장소 : 대치오르비학원 (대면+비대면 전부 진행)

1)
[정답/모범답안]
2

[해설]
$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=k$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로
(분자)$\to0$이어야 한다.
또한 $f(x)$는 다항함수로 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$
마찬가지로 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=k$에서 $\lim_{x\to0}f(x)=f(1)=0$이다.
그러므로 $f(x)$는 x, $x-1$을 인수로 가진다.
$f(x)=x(x-1)(ax-b)$ (a, b는 상수, $a\neq0$)이라 하면
$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\{(x-1)(ax+b)\}=-b$
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\{x(ax+b)\}=a+b$
이므로 $k=-b=a+b$
이때 k는 양수이므로
$a=-2b$, $a>0$, $b<0$ …… ㉠
$f(x-1)=(x-1)(x-1-1)(ax-a+b)$
$\quad=(x-1)(x-2)(ax-a+b)$
$f(x)f(x-1)=x(x-1)^2(x-2)(ax+b)(ax-a+b)$
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)f(x-1)}{(x-1)^2}=4$에서
$\lim_{x\to1}\{x(x-2)(ax+b)(ax-a+b)\}=-(a+b)b=4$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$a=4$, $b=-2$, $k=2$
따라서 $f(x)=x(x-1)(4x-2)$이므로
$f(k)=f(2)=2\times1\times6=12$

2)
[정답/모범답안]
3

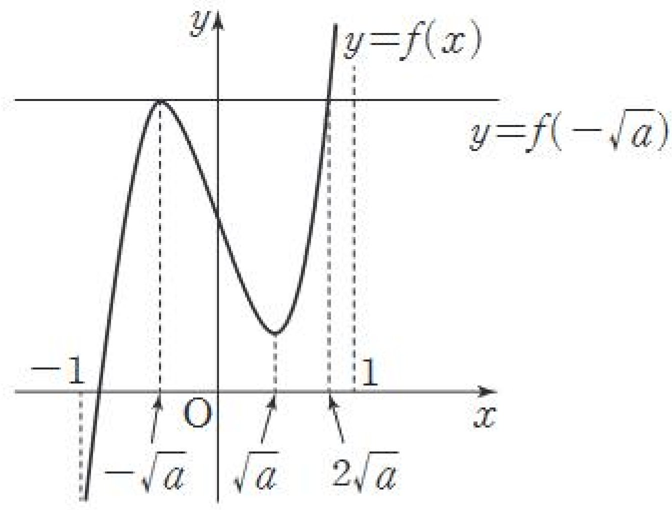
[해설]
$f(x)=x^3-3ax+a^2+a$에서
$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$
(ⅰ) $a\le0$일 때
$f'(x)\ge0$에서 $f(x)$는 증가하는 함수이므로 닫힌구간 [-1, 1]에서
함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)$이다.
$g(a)=f(1)=1-3a+a^2+a=a^2-2a+1=(a-1)^2$



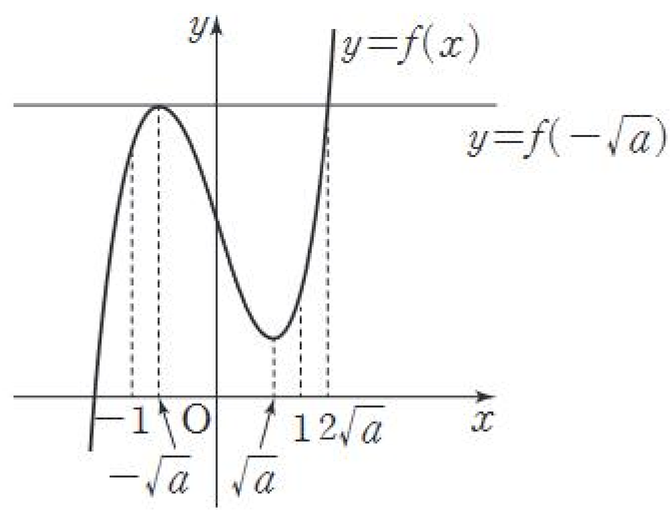
(ⅱ) $a>0$일 때
$f'(x)=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})=0$에서 $x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$
$f'(x)$	+	0	−	0
$f(x)$	↗	극대	↘	극소

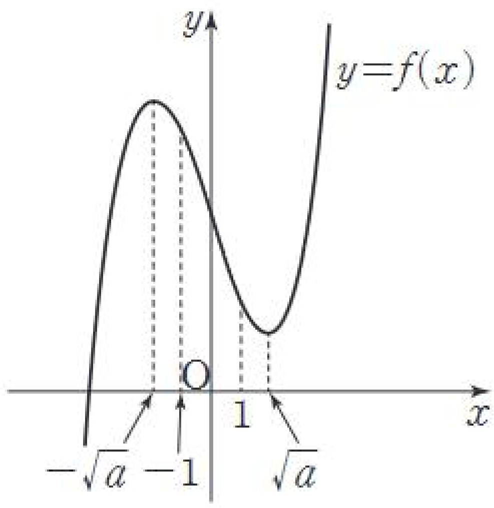
$f(-\sqrt{a})=-a\sqrt{a}+3a\sqrt{a}+a^2+a=2a\sqrt{a}+a^2+a$이고
$f(x)-f(-\sqrt{a})=x^3-3ax-2a\sqrt{a}=(x+\sqrt{a})^2(x-2\sqrt{a})$
이므로 $f(-\sqrt{a})=f(2\sqrt{a})$
(가) $0<2\sqrt{a}\le1$, 즉 $0<a\le\frac{1}{4}$일 때



$g(a)=f(1)=a^2-2a+1=(a-1)^2$
(나) $\sqrt{a}\le1\le2\sqrt{a}$, 즉 $\frac{1}{4}<a\le1$일 때



$g(a)=f(-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+a^2+a=a(\sqrt{a}+1)^2$
(다) $1<\sqrt{a}$일 때, 즉 $a>1$일 때



$$g(a)=f(-1)=-1+3a+a^2+a=a^2+4a-1$$

그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에서 $g(a)=\begin{cases}(a-1)^2 & \left(a \le \frac{1}{4}\right)\\ a(\sqrt{a}+1)^2 & \left(\frac{1}{4}<a\le 1\right)\\ a^2+4a-1 & (a>1)\end{cases}$

ㄱ. $g(2)=4+8-1=11$ (참)

ㄴ. 함수 $g(a)$는 $a<\frac{1}{4}$일 때 감소하고 $a>\frac{1}{4}$일 때 증가하므로

$a=\frac{1}{4}$일 때 극소이면서 최소가 된다. 따라서 최솟값은

$g\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}-1\right)^2=\frac{9}{16}$ (참)

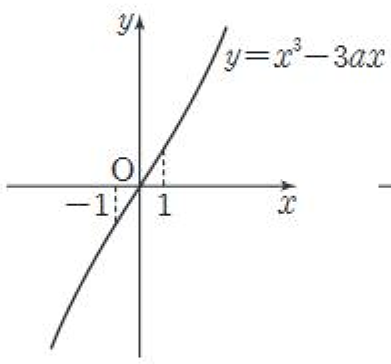
ㄷ. 함수 $f(x)=x^3-3ax+a^2+a$의 그래프는 함수 $y=x^3-3ax$의 그래프를 y축의 방향으로 a^2+a만큼 평행이동한 것이고, 함수

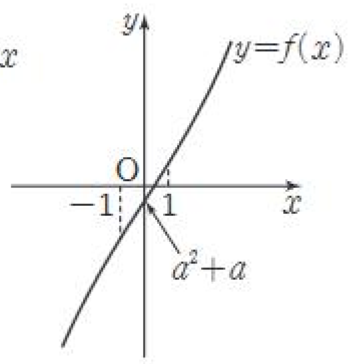
$y=x^3-3ax$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 닫힌구간 [-1, 1]에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은

$a^2+a\ge 0$, 즉 $a\le -1$ 또는 $a\ge 0$일 때

$h(a)=g(a)$

$-1<a<0$일 때 $f(x)$는 증가하는 함수이므로





$h(a)=|f(-1)|=|a^2+4a-1|$이므로

$$h(a)=\begin{cases}(a-1)^2 & (a\le -1)\\ |a^2+4a-1| & (-1<a<0)\\ (a-1)^2 & \left(0\le a\le \frac{1}{4}\right)\\ a(\sqrt{a}+1)^2 & \left(\frac{1}{4}<a\le 1\right)\\ a^2+4a-1 & (a>1)\end{cases}$$

에서 $h\left(-\frac{1}{2}\right)=\left|\frac{1}{4}-2-1\right|=\frac{11}{4}$, $h(1)=1\times 4=4$

그러므로 $h\left(-\frac{1}{2}\right)+h(1)=\frac{27}{4}$(거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

3)

[정답/모범답안]

14

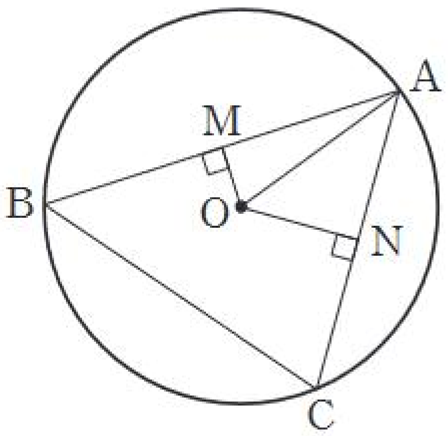
[해설]

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에서

$\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$

$R=\frac{\overline{AB}}{2\sin C}=\frac{8\sqrt{2}}{2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}}=6$

원의 중심 O에서 두현 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라하자.



직각삼각형 OAM에서

$\overline{OM}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{6^2-(4\sqrt{2})^2}=2$

$\overline{OM}:\overline{ON}=1:2$이므로 $\overline{ON}=4$

직각삼각형 OAN에서

$\overline{AN}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{ON}^2}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AC}=2\overline{AN}=2\times 2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

이므로 사인법칙에서 $\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2R$

$\sin B=\frac{\overline{AC}}{2R}=\frac{4\sqrt{5}}{12}=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin^2 B=\frac{5}{9}$

$p=9$, $q=5$이므로 $p+q=9+5=14$

4)

[정답/모범답안]

31

[해설]

조건 (가)에서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $x=2$에서

극솟값 0을 가지므로 $a<2$인 상수 a에 대하여

$f(x)=(x-2)^2(x-a)$

로 나타낼 수 있다.

$\{(x-2)f(x)\}'=f(x)+(x-2)f'(x)$이므로 조건 (나)에서

$$g(x) = \int \{f(x) + (x-2)f'(x)\}\,dx$$
$$= \int \{(x-2)f(x)\}'\,dx$$
$$= (x-2)f(x) + C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

즉, $g(x) = (x-2)^3(x-a) + C$
$$= (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)(x-a) + C$$

$$g'(x) = (3x^2 - 12x + 12)(x-a) + (x-2)^3$$
$$= 3(x-2)^2(x-a) + (x-2)^3$$
$$= (x-2)^2\{3(x-a) + x - 2\}$$
$$= (x-2)^2(4x - 3a - 2)$$

$g'(x) = 0$에서 $x = 2$ 또는 $x = \frac{3a+2}{4}$

$a < 2$에서 $x = \frac{3a+2}{4} < 2$이므로

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{3a+2}{4}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$

함수 $g(x)$는 $x = \frac{3a+2}{4}$에서 극소이면서 최소이므로

조건 (다)에서

$x = \frac{3a+2}{4} = \frac{1}{2}$에서 $a = 0$

$f(x) = x(x-2)^2$

$g(x) = x(x-2)^3 + C$

이고

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{27}{8}\right) + C = -\frac{27}{16} + C = -\frac{3}{4}$

에서 $C = \frac{15}{16}$

$g(x) = x(x-2)^3 + \frac{15}{16}$

따라서 $f(1) + g(1) = 1 + \left(-1 + \frac{15}{16}\right) = \frac{15}{16}$

이므로 $p = 16$, $q = 15$이고

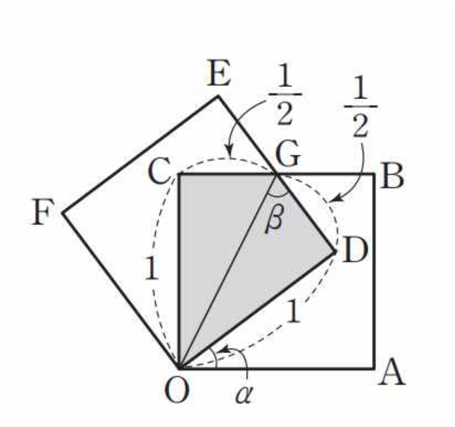
$p + q = 16 + 15 = 31$

5)

[정답/모범답안]

7

[해설]



$\angle \mathrm{DOA} = \alpha$이므로 $\angle \mathrm{COD} = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$\overline{OC} = \overline{OD} = 1$, $\angle GCO = \angle ODG = \frac{\pi}{2}$, $\overline{OG}$는 공통이므로

삼각형 OCG와 삼각형 ODG는 합동인 삼각형이다.

$\angle GOD = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$

$$\overline{DG} = \overline{OD} \times \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \tan\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan\frac{\alpha}{2}}$$

두 정사각형의 공통부분인 사각형 ODGC의 넓이는

$$2 \times \frac{1}{2} \times \overline{OD} \times \overline{DG} = \frac{1 - \tan\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan\frac{\alpha}{2}}$$

$\frac{1 + \tan\frac{\alpha}{2}}{1 - \tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2}$에서

$$2 - 2\tan\frac{\alpha}{2} = 1 + \tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$$

또한 $\overline{DG} = \frac{1}{2}$, $\overline{OD} = 1$이므로 $\tan\beta = 2$

따라서

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) = \frac{\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\beta}{1 - \tan\frac{\alpha}{2}\tan\beta} = \frac{\frac{1}{3} + 2}{1 - \frac{1}{3} \times 2} = 7$$

6)

[정답/모범답안]

57

[해설]

등식

$$\int_1^x (x - t + 1)\ f(t)\ dt = (2ax + b)e^{-2x+2} + bx + a \cdots\cdots ㉠$$

의 양변에 $x = 1$을 대입하면

$0 = (2a + b) + b + a = 3a + 2b$

$b = -\frac{3}{2}a \cdots\cdots ㉡$

$$\int_1^x (x - t + 1)f(t)dt = x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)\ dt + \int_1^x f(t)dt$$

이므로 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) + f(x)$$
$$= 2ae^{-2x+2} + (2ax + b) \times (-2e^{-2x+2}) + b$$
$$\int_1^x f(t)dt + f(x) = (-4ax + 2a - 2b)e^{-2x+2} + b \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉢의 양변에 x=1을 대입하면

$f(1) = (-4a + 2a - 2b) + b$
$= -2a - b$
$= -2a + \frac{3}{2}a$(㉡에 의하여)

$=-\frac{1}{2}a$ …… ㉣

㉢의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+f'(x)=-4ae^{-2x+2}+(-4ax+2a-2b)\times(-2e^{-2x+2})$

$=(8ax-8a+4b)e^{-2x+2}$

$=a(8x-14)e^{-2x+2}$ (㉡에 의하여)

함수 $g(x)=e^{x}f(x)$에서 $g'(x)=e^{x}f(x)+e^{x}f'(x)$이므로

위의 등식의 양변에 e^{x}을 곱하면

$e^{x}f(x)+e^{x}f'(x)=a(8x-14)e^{-x+2}$

즉, $g'(x)=a(8x-14)e^{-x+2}$이므로

$g(x)=\int a(8x-14)e^{-x+2}dx$

$=a\int(8x-14)e^{-x+2}dx$

$=a\{-(8x-14)e^{-x+2}\}-a\int(-8e^{-x+2})dx$

$=a(-8x+14)e^{-x+2}-8ae^{-x+2}+C$

$=a(-8x+6)e^{-x+2}+C$ (단, C는 적분상수) …… ㉤

㉤의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g(1)=-2ae+C$

이고 ㉣에서 $g(1)=e\ f(1)=-\frac{1}{2}ae$이므로

$-2ae+C=-\frac{1}{2}ae$

$C=\frac{3}{2}ae$ ㉤의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g(2)=-10a+C=-10a+\frac{3}{2}ae$

$g(2)=9e-c$이므로

$-10a+\frac{3}{2}ae=9e-c$

a,c는 유리수이고 e는 무리수이므로 $\frac{3}{2}a=9, 10a=c$에서

$a=6, c=60$

㉡에서

$b=-\frac{3}{2}a=-9$

따라서 $a+b+c=6+(-9)+60=57$

7)

[정답/모범답안]

4

[해설]

함수 $f(x)=a\cos b\pi x$의 그래프는 주기가 $\frac{2}{b}$이다.

$f(0)=a$이므로 네 점 A, B, C, D의 좌표는

$A(0,a)$, $B\left(\frac{1}{2b},0\right)$, $C\left(\frac{3}{2b},0\right)$, $D\left(\frac{1}{b},-a\right)$

$\overline{BD}=\overline{DC}$이고 $\angle BDC=90^{\circ}$이므로 삼각형 BDC는 직각이등변삼각형이다. 이때 원점 O에 대하여 $\angle ABO=\angle DBC=\angle BAO$이므로 삼각형 AOB는 직각이등변삼각형이다.

그러므로 $a=\frac{1}{2b}$ …… ㉠

$\overline{AB}=\overline{BD}$에서 두 삼각형 ABC, BDC의 넓이는 같다.

즉,

(삼각형 ADC의 넓이)

=(삼각형 ABC의 넓이)+(삼각형 BDC의 넓이)

$=2\times$(삼각형 ABC의 넓이)

$=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{b}\times a$

$=\frac{a}{b}=18$

㉠에서 $\frac{1}{2b^2}=18$, $b^2=\frac{1}{36}$

$b>0$이므로 $b=\frac{1}{6}$

$b=\frac{1}{6}$을 ㉠에 대입하면 $a=3$

따라서 $a+b=3+\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$

8)

[정답/모범답안]

5

[해설]

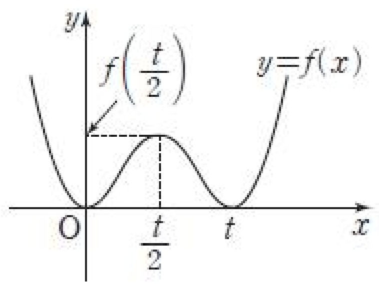
ㄱ. $f(x)=x^2(x-t)^2$에서

$f'(x)=2x(x-t)^2+2x^2(x-t)$
$=2x(x-t)\{(x-t)+x\}$
$=2x(x-t)(2x-t)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=t$ 또는 $x=\frac{t}{2}$

$t\neq0$일 때 $x=\frac{t}{2}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{t}{2}$에서 극댓값을 가진다. (참)

ㄴ. $t>0$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f\left(\frac{t}{2}\right)=\left(\frac{t}{2}\right)^2\left(\frac{t}{2}-t\right)^2=\left(\frac{t}{2}\right)^4$이므로

$\left(\frac{t}{2}\right)^4=\frac{t}{2}$에서 $t=2$

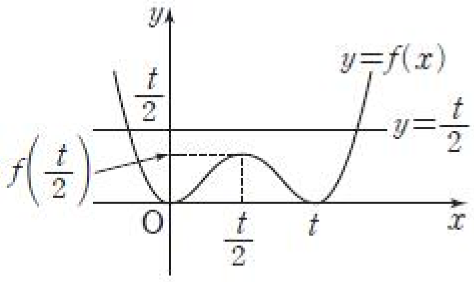
따라서

(i) $0<t<2$일 때

$\left(\frac{t}{2}\right)^4<\frac{t}{2}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{2}$는 서로 다른 두

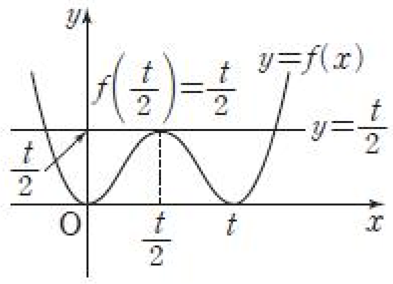
점에서 만나므로 $g(t)=2$



(ii) $t=2$일 때

$\left(\frac{t}{2}\right)^4=\frac{t}{2}$

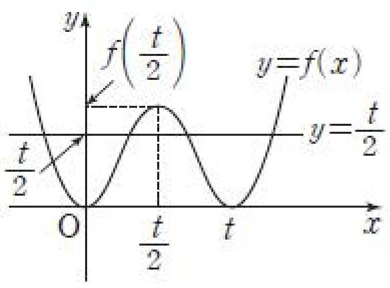
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{2}$는 서로 다른 세 점에서 만나므로 $g(t)=3$



(iii) $t>2$일 때

$\left(\frac{t}{2}\right)^4>\frac{t}{2}$

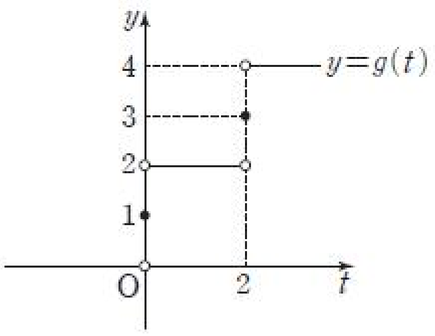
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{2}$는 서로 다른 네 점에서 만나므로 $g(t)=4$



또한 $t=0$일 때 함수 $f(x)=x^4$의 그래프와 직선 $y=0$은 한 점에서 만나므로 $g(t)=1$이고 $t<0$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{2}$는 만나지 않으므로 $g(t)=0$이다.

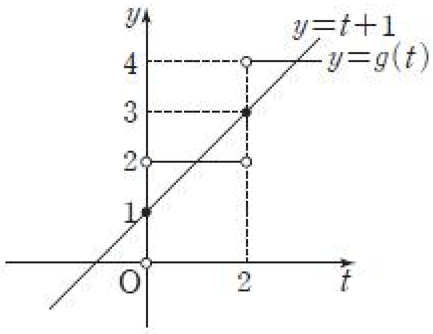
따라서 부등식 $\lim\limits_{t\to a-}g(t)<\lim\limits_{t\to a+}g(t)$를 만족시키는 모든 실수 a는 0, 2이므로 그 합은 2이다. (참)

ㄷ. 함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $t+1-g(t)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=t+1$, $y=g(t)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

그림과 같이 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=t+1$은 5개의 점에서 만나므로 방정식 $t+1-g(t)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다. (참)



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

9)

[정답/모범답안]

35

[해설]

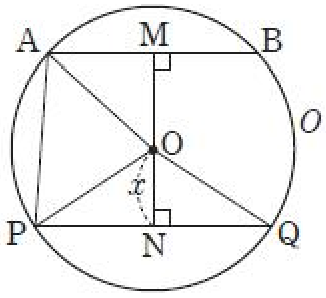
원 O의 중심을 O라 하고 점 O에서 두 선분 AB, PQ에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하고 $\overline{\mathrm{ON}}=x(0\le x<3)$이라 하자. 이때 0이 아닌 x의 값에 대하여 점 N은 그림과 같이 점 O의 위쪽 또는 아래쪽에 생기지만 삼각형 APQ의 넓이의 최댓값을 구하므로 점 N은 점 O의 아래쪽에 놓인다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PN}}=2\sqrt{3^2-x^2}=2\sqrt{9-x^2}$ ……㉠

$\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{9-(\sqrt{5})^2}=2$

$\overline{\mathrm{MN}}=\overline{\mathrm{OM}}+\overline{\mathrm{ON}}=2+x$이므로 삼각형 APQ의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times2\sqrt{9-x^2}\times(2+x)$$
$$=\sqrt{9-x^2}\times(2+x)$$



이때

$$f(x)=S^2=(9-x^2)(x^2+4x+4)$$
$$=-x^4-4x^3+5x^2+36x+36$$

으로 놓으면

$$f'(x)=-(4x^3+12x^2-10x-36)$$
$$=-2(2x^3+6x^2-5x-18)$$
$$=-2(x+2)(2x^2+2x-9)$$

$f'(x)=0$에서 $0\le x<3$이므로 $x=\frac{-1+\sqrt{19}}{2}$

따라서 $x=\frac{-1+\sqrt{19}}{2}$에서 $f(x)$는 극대이면서 최대이다.

$S>0$이므로 S^2이 $x=\frac{-1+\sqrt{19}}{2}$에서 최대이면 S도 $x=\frac{-1+\sqrt{19}}{2}$에서 최대이다.

$x^2=\frac{10-\sqrt{19}}{2}$이므로 ㉠에서

$a^2=4(9-x^2)=4\left(9-\frac{10-\sqrt{19}}{2}\right)=16+2\sqrt{19}$

따라서 $m=16$, $n=19$이므로

$m+n=16+19=35$

10)
[정답/모범답안]

330

[해설]

$a_2=a$라 하면 조건 (가)에서 수열 $\{a_n+a_{n+1}\}$은 공차가 3인 등차수열이므로

$a_1+a_2=1+a$

$a_2+a_3=4+a$에서 $a_3=4$

$a_3+a_4=7+a$에서 $a_4=3+a$

$a_4+a_5=10+a$에서 $a_5=7$

$a_5+a_6=13+a$에서 $a_6=6+a$

$a_6+a_7=16+a$에서 $a_7=10$

⋮

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_{2n-1}=3n-2$ ……㉠

수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 a이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_{2n}=3n+a-3$

조건 (나)에서 $a_{20}=32$이므로

$a_{20}=30+a-3=27+a=32$에서

$a=5$이므로

$a_{2n}=3n+5-3=3n+2$ ……㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}a_k&=\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{10}a_{2k}\\&=\sum_{k=1}^{10}(3k-2)+\sum_{k=1}^{10}(3k+2)\\&=\sum_{k=1}^{10}6k\\&=6\times\frac{10\times11}{2}\\&=330\end{aligned}$$

{다른 풀이}

조건 (가)에서 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}+a_{n+2}=a_n+a_{n+1}+3$

즉, $a_{n+2}=a_n+3$이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이고, 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 a_2이고 공차가 3인 등차수열이다.

조건 (나)에서 $a_{20}=a_2+9\times3=32$이므로 $a_2=5$이다.

이때 수열 $\{a_{2n-1}+a_{2n}\}$은 첫째항이 6, 공차가 6인 등차수열이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}a_k&=\sum_{k=1}^{10}(a_{2n-1}+a_{2n})\\&=\frac{10\times(2\times6+9\times6)}{2}\\&=330\end{aligned}$$

11)
[정답/모범답안]

15

[해설]

$\overline{PQ}=\tan\theta, \overline{OQ}=\frac{1}{\cos\theta}, \overline{AQ}=\overline{QR}=\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}$

$$\begin{aligned}\overline{PR}&=\sqrt{\overline{PQ}^2-\overline{QR}^2}=\sqrt{\tan^2\theta-\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos^2\theta}}=\frac{\sqrt{\sin^2\theta-(1-\cos\theta)^2}}{\cos\theta}\end{aligned}$$

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{QR}\times\overline{PR}=\frac{1}{2}\times\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\times\frac{\sqrt{\sin^2\theta-(1-\cos\theta)^2}}{\cos\theta}$

$$\begin{aligned}&\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\times\frac{\sqrt{\sin^2\theta-(1-\cos\theta)^2}}{\cos\theta}}{\theta^3}\\&=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2\cos^2\theta}\times\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\times\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}-\frac{(1-\cos\theta)^2}{\theta^2}}\right\}\\&=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2\cos^2\theta}\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}\times\sqrt{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2-\frac{\sin^4\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)^2}}\right\}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{1^2-0}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

따라서 $60\times\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=60\times\frac{1}{4}=15$

12)
[정답/모범답안]

3

[해설]

$\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$이라 하면 $S_n=\begin{cases}n^2-2n+2 & (n\le20)\\ 3n & (n\ge21)\end{cases}$ …… ㉠

$n\le20$일 때 $S_n=n^2-2n+2$이므로

$2\le n\le20$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2-2n+2)-\{(n-1)^2-2(n-1)+2\}=2n-3$

$n=1$일 때, ㉠에서 $a_1=S_1=1$

$a=\begin{cases}1 & (n=1)\\ 2n-3 & (2\le n\le20)\end{cases}$ …… ㉡

$n=21$일 때, ㉠에서 $S_{21}=3\times21=63$이므로

$a_{21}=S_{21}-S_{20}=60-(20^2-2\times20+2)=-299$ …… ㉢

$n\ge22$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=3n-3(n-1)=3$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣에서 $a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ 2n-3 & (2\le n\le 20)\\ -299 & (n=21)\\ 3 & (n\ge 22)\end{cases}$

$\sum_{k=1}^{6} a_{3k-2}$에서

(i) $k=1$일 때

$a_1=1$

(ii) $2\le k\le 6$일 때

$a_k=2k-3$에서

$$\sum_{k=2}^{6} a_{3k-2}=-1+\sum_{k=2}^{6} a_{3k-2}-(-1)=\sum_{k=1}^{6}(6k-7)-(-1)$$
$$=6\sum_{k=1}^{6}k-7\times 6-(-1)$$
$$=6\times\left(\frac{6\times 7}{2}\right)-42-(-1)=85$$

$\sum_{k=7}^{15} ka_{3k}$에서

(iii) $k=7$일 때

$7a_{21}=7\times(-299)=-2093$

(iv) $8\le k\le 15$일 때

$a_k=3$이므로

$$\sum_{k=8}^{15} ka_{3k}=\sum_{k=8}^{15}(k\times 3)=3\sum_{k=8}^{15}k$$
$$=3\left(\sum_{k=1}^{15}k-\sum_{k=1}^{7}k\right)=3\left(\frac{15\times 16}{2}-\frac{7\times 8}{2}\right)=276$$

(i)~(iv)에서

$$\sum_{k=1}^{6} a_{3k-2}+\sum_{k=7}^{15} ka_{3k}=1+85+(-2093)+276=-1731$$

13)

[정답/모범답안]

11

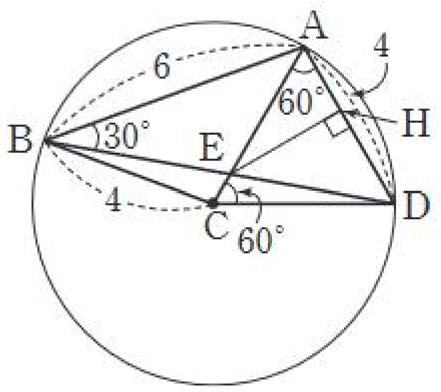
[해설]

삼각형 ABD에서 $\angle \mathrm{ABE}=30^\circ$이고 정삼각형 ACD에서 $\angle \mathrm{ACD}=60^\circ$이므로 원주각과 중심각의 관계에 의하여 점 C는 삼각형
ABD의 외접원의 중심이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AD}}=4$이고 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle \mathrm{ADB})},\quad \frac{4}{\frac{1}{2}}=\frac{6}{\sin(\angle \mathrm{ADB})}$$

$$\sin(\angle \mathrm{ADB})=6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$



$\overline{\mathrm{AE}}=k(k>0)$이라 하고 꼭짓점 E에서 변 AD에 내린 수선의 발을
H라 하면

직각삼각형 AEH에서 $\overline{\mathrm{AH}}=k\cos 60^\circ=\frac{k}{2}$

$\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{AD}}-\overline{\mathrm{AH}}=4-\frac{k}{2}$

$\sin(\angle \mathrm{ADE})=\frac{3}{4}$이므로

$\cos(\angle \mathrm{ADE})=\sqrt{1-\sin^2(\angle \mathrm{ADE})}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan(\angle \mathrm{ADE})=\frac{\sin(\angle \mathrm{ADE})}{\cos(\angle \mathrm{ADE})}=\frac{3}{\sqrt{7}}$ …… ㉠

한편, 직각삼각형 EHA에서

$\overline{\mathrm{EH}}=\sin 60^\circ\times\overline{\mathrm{AE}}=\frac{\sqrt{3}}{2}k$

직각삼각형 EDH에서

$\tan(\angle \mathrm{EDH})=\frac{\overline{\mathrm{EH}}}{\overline{\mathrm{DH}}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}k}{4-\frac{k}{2}}$ …… ㉡

$\angle \mathrm{ADE}=\angle \mathrm{EDH}$이므로 ㉠과 ㉡에서

$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}k}{4-\frac{k}{2}}=\frac{3}{\sqrt{7}}$, 즉 $k=\frac{24}{\sqrt{21}+3}=2(\sqrt{21}-3)=\overline{\mathrm{AE}}$

삼각형 AED의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면
삼각형 AED에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{AE}}}{\sin(\angle \mathrm{ADE})}=2R$에서 $\frac{2(\sqrt{21}-3)}{\frac{3}{4}}=2R$

따라서 $2R=\frac{8(\sqrt{21}-3)}{3}$에서 $p=3$, $q=8$이므로

$p+q=11$

14)

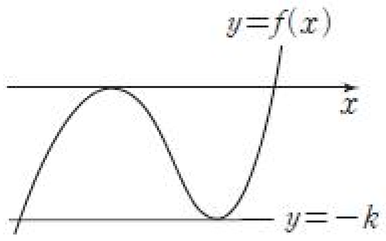
[정답/모범답안]

550

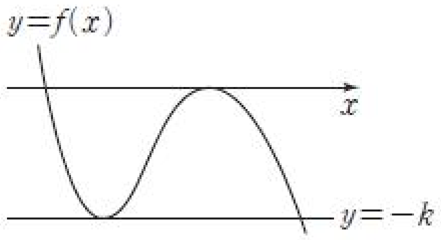
[해설]

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접하고,
조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=-k$에 접한다.
따라서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 2가지 경우이다.

① 최고차항의 계수가 양수인 경우



② 최고차항의 계수가 음수인 경우

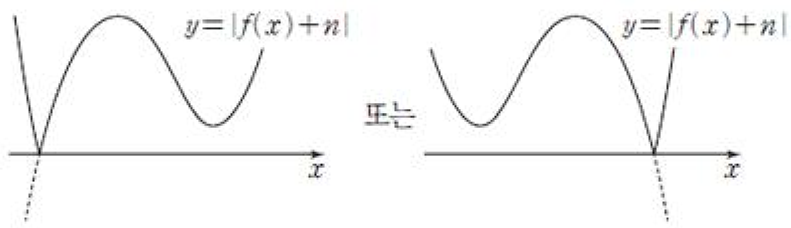


①, ②에서 삼차함수 $y=f(x)$의 극댓값은 0이고, 극솟값은 $-k$이다.

따라서 함수 $y=f(x)+n$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프이므로 함수 $y=f(x)+n$의 극댓값은 n, 극솟값은 $n-k$이다.

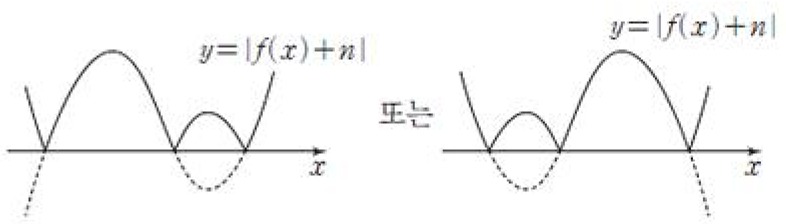
(i) $n-k\geq 0$일 때, 즉 $n\geq k$

함수 $|f(x)+n|$의 극댓값은 n이다.



(ii) $n-k<0$일 때, 즉 $n<k$

함수 $|f(x)+n|$의 극댓값은 n, $-n+k$이다.



(i), (ii)에서

$n=1$일 때, $S_1=\{1,\ -1+k\}$

$n=2$일 때, $S_2=\{2,\ -2+k\}$

$n=6$일 때, 조건 (나)에 의하여 $S_6=\{6\}$

이므로

$S_1\cup S_2\cup S_6=\{1,\ -1+k,\ 2,\ -2+k,\ 6\}$

이때 $S_1\cup S_2\cup S_6$의 모든 원소의 합이 $2k+6$이므로

$2k+6=17$, $k=\dfrac{11}{2}$

따라서 $100k=550$

15)

[정답/모범답안]

5

[해설]

조건 (가)와 (나)에서 $0<h<5$인 임의의 h에 대하여

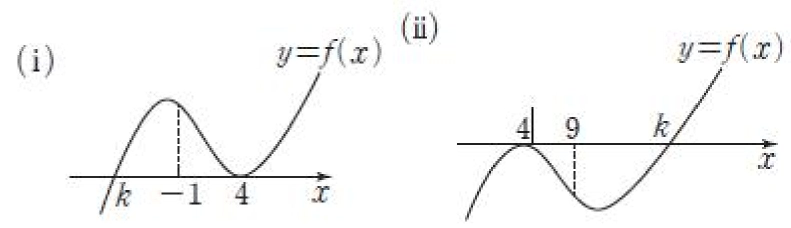
$\displaystyle\int_{4-h}^{4}f'(x)dx\times\int_{4}^{4+h}f'(x)dx<0$이므로

$\displaystyle\int_{4-h}^{4}f'(x)dx>0$이고 $\displaystyle\int_{4}^{4+h}f'(x)dx<0$ 또는

$\displaystyle\int_{4-h}^{4}f'(x)dx<0$이고 $\displaystyle\int_{4}^{4+h}f'(x)dx>0$이어야 한다.

그러므로 $f'(x)$의 부호가 $x=4$의 좌우에서 바뀌고 $f(4)=0$이다.

즉, $f(4)=f'(4)=0$이므로 삼차함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(x)=(x-4)^2(x-k)\,(k\neq 4)$라 하면

$$\begin{aligned}f'(x)&=2(x-4)(x-k)+(x-4)^2\\&=(x-4)\{2(x-k)+(x-4)\}\\&=(x-4)\{3x-(2k+4)\}=0\end{aligned}$$

에서 $x=4$ 또는 $x=\dfrac{2k+4}{3}$

방정식 $f'(x)=0$의 두 근의 차는 5 이상이므로

$\left|4-\dfrac{2k+4}{3}\right|\geq 5$ ……㉠

(i)의 경우

㉠에서 $4-\dfrac{2k+4}{3}\geq 5$, $k\leq -\dfrac{7}{2}$

그러므로 방정식 $f(x)=(x-4)^2(x-k)=0$의 두 근의 차를 d_1이라 하면

$d_1\geq 4-\left(-\dfrac{7}{2}\right)=\dfrac{15}{2}$

(ii)의 경우

㉠에서 $\dfrac{2k+4}{3}-4\geq 5$, $k\geq\dfrac{23}{2}$

그러므로 방정식 $f(x)=(x-4)^2(x-k)=0$의 두 근의 차를 d_2라 하면

$d_2\geq\dfrac{23}{2}-4=\dfrac{15}{2}$

(i), (ii)로부터 방정식 $f(x)=0$의 두 근의 차의 최솟값은 $\dfrac{15}{2}$

16)

[정답/모범답안]

3

[해설]

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d$는 상수이고, $a\neq 0)$으로 놓으면

조건 (가)에서 $f(0)=1$이므로 $d=1$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로

조건 (나)에서

$f'(0)=-3$, $c=-3$

$f'(1)=-3$, $3a+2b+c=-3$

$c=-3$이므로 $3a+2b=0$

따라서 $b=-\frac{2}{3}a$ ……㉠

조건 (다)에서 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 가지므로 α, β는 방정식 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$의 서로 다른 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}$ 이고, ㉠에서 $b=-\frac{3}{2}a$이므로 $\alpha+\beta=1$

$\alpha\beta=\frac{c}{3a}$이고, $c=-3$이므로 $\alpha\beta=-\frac{1}{a}$

또

$$\begin{aligned}|f(\alpha)-f(\beta)|&=\left|a(\alpha^3-\beta^3)-\frac{3}{2}a(\alpha^2-\beta^2)-3(\alpha-\beta)\right|\\&=|\alpha-\beta|\left|a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\frac{3}{2}a(\alpha+\beta)-3\right|\end{aligned}$$

이고, 조건 (다)에서 $|f(\alpha)-f(\beta)|=|\alpha-\beta|$이므로

$$|\alpha-\beta|\left|a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\frac{3}{2}a(\alpha+\beta)-3\right|=|\alpha-\beta|$$

$$\left|a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\frac{3}{2}a(\alpha+\beta)-3\right|=1$$

$$\left|a\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}-\frac{3}{2}a(\alpha+\beta)-3\right|=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-\frac{1}{a}$을 ㉡에 대입하여 정리하면

$\left|a\left(1+\frac{1}{a}\right)-\frac{3}{2}a-3\right|=1$, $\left|-\frac{1}{2}a-2\right|=1$

$|a+4|=2$

에서 $a=-2$ 또는 $a=-6$ ……㉢

한편, 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 가지므로 $D>0$이어야 한다.

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=b^2-3ac=\left(-\frac{3}{2}a\right)^2+9a\\&=\frac{9}{4}a(a+4)>0\end{aligned}$$

따라서 $a<-4$ 또는 $a>0$ ……㉣

㉢, ㉣에서 $a=-6$이고, ㉠에서 $b=9$

따라서 $f(x)=-6x^3+9x^2-3x+1$이므로

$f(2)=-48+36-6+1=-17$

{다른 풀이}

조건 (나)에서 $f'(0)=f'(1)=-3$이므로

$f'(x)=kx(x-1)-3=kx^2-kx-3\,(k\neq 0)$으로 놓을 수 있다.

이때 $f(x)=\frac{k}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2-3x+C$(단, C는 적분상수)

조건 (가)에서 $f(0)=1$이므로 $f(0)=C=1$

따라서 $f(x)=\frac{k}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2-3x+1$

조건 (다)에서 삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 가지므로 α, β는 방정식 $f'(x)=kx^2-kx-3=0$의 서로 다른 두 실근이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-\frac{3}{k}$ ……㉠

한편,

$$\begin{aligned}|f(\alpha)-f(\beta)|&=\left|\frac{k}{3}(\alpha^3-\beta^3)-\frac{k}{2}(\alpha^2-\beta^2)-3(\alpha-\beta)\right|\\&=|\alpha-\beta|\left|\frac{k}{3}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\frac{k}{2}(\alpha+\beta)-3\right|\end{aligned}$$

이고, 조건 (다)에서 $|f(\alpha)-f(\beta)|=|\alpha-\beta|$이므로

$$|\alpha-\beta|\left|\frac{k}{3}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\frac{k}{2}(\alpha+\beta)-3\right|=|\alpha-\beta|$$

$$\left|\frac{k}{3}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\frac{k}{2}(\alpha+\beta)-3\right|=1$$

$$\left|\frac{k}{3}\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}-\frac{k}{2}(\alpha+\beta)-3\right|=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$\left|\frac{k}{3}\left(1+\frac{1}{k}\right)-\frac{k}{2}-3\right|=1$, $\left|-\frac{k}{6}-2\right|=1$

$|k+12|=6$

이므로 $k=-6$ 또는 $k=-18$ ……㉢

한편, 이차방정식 $f'(x)=kx^2-kx-3=0$의 판별식을 D라 하면 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 가지므로 $D>0$이어야 한다.

$$\begin{aligned}D&=(-k)^2+12k=k^2+12k\\&=k(k+12)>0\end{aligned}$$

이므로 $k>0$ 또는 $k<-12$ ……㉣

㉢, ㉣에서 $k=-18$이므로

$f(x)=-6x^3+9x^2-3x+1$

따라서 $f(2)=-48+36-6+1=-17$

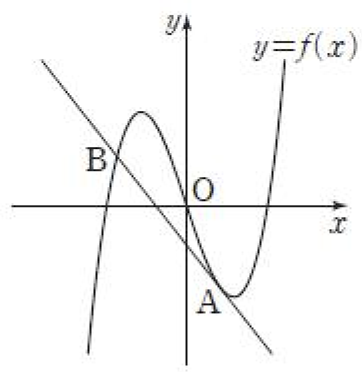
17)

[정답/모범답안]

3

[해설]

$a\neq 0$일 때 $\mathrm{A}(a, f(a))$, $\mathrm{B}(g(a), f(g(a)))$라 하면 두 점 A, B는 수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이고, $\frac{f(a)-f(g(a))}{a-g(a)}$는 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기이다.



$f'(x)=3x^3+k$이므로 직선 AB의 방정식은

$y=(3a^2+k)(x-a)+a^3+ka$

이고, 두 점 A, B의 x좌표는 방정식

$x^3+kx=(3a^2+k)(x-a)+a^3+ka$ ……㉠

의 실근이다. ㉠을 정리하면

$x^3-3a^2x+2a^3=0$

$(x+2a)(x-a)^2=0$

$x=-2a$ 또는 $x=a$

즉, $g(a)=-2a$ 또는 $g(a)=a$

이때 0이 아닌 실수 a에 대하여 $g(a)\neq a$이므로

$g(a)=-2a$, 즉 $g(x)=-2x$ ……㉡

$f'(g(x))=f'(-2x)=12x^2+k$

$f'(x)\times f'(g(x))=k^2$에서

$(3x^2+k)\times(12x^2+k)=k^2$

$36x^4+15kx^2=0$, $3x^2(12x^2+5k)=0$

이차방정식 $12x^2+5k=0$의 두 근의 곱이 $-\frac{4}{5}$이므로

$\frac{5k}{12}=-\frac{5}{4}$, $k=-3$ ……㉢

㉡, ㉢에서

$g(-3)=-2\times(-3)=6$

18)

[정답/모범답안]

3

[해설]

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $F'(x)=f(x)$이고

조건 (가)에서 $F(x)$는 $x=0$에서 극값을 가지므로 $F'(0)=f(0)=0$ 이다.

조건 (나)에서 $f(x)=0$인 x가 0 이외에 하나 존재하고 조건 (가)에서 $F(x)$는 $x=0$에서만 극값을 가지므로

$f(x)=x(x-a)^2(a\neq 0)$

$$\begin{aligned}F(1)-F(-1)&=\int_0^1 f(t)dt-\int_0^{-1} f(t)dt\\&=\int_{-1}^1 f(t)dt\\&=\int_{-1}^1 t(t-a)^2dt\\&=\int_{-1}^1 (t^3-2at^2+a^2t)dt\\&=\int_{-1}^1 (-2at^2)dt\\&=2\times\int_0^1(-2at^2)dt\\&=2\times\left[-\frac{2}{3}at^3\right]_0^1\\&=-\frac{4}{3}a=-4\end{aligned}$$

에서 $a=3$이므로

$f(x)=x(x-3)^2=x^3-6x^2+9x$

따라서

$$\begin{aligned}F(2)&=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2(t^3-6t^2+9t)dt\\&=\left[\frac{1}{4}t^4-2t^3+\frac{9}{2}t^2\right]_0^2\\&=4-16+18=6\end{aligned}$$

19)

[정답/모범답안]

12

[해설]

삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2}\times12\times5=30$이므로 삼각형 ADE의 넓이는 15이다.

(삼각형 ADE의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{AE}\times\sin A=15$ ……㉠

또한 삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DE}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{AE}\times\cos A$ ……㉡

한편, 삼각형 ABC에서 $\sin A=\frac{5}{13}$, $\cos A=\frac{12}{13}$이다.

㉠에서 $\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{AE}\times\frac{5}{13}=15$이므로

$\overline{AD}\times\overline{AE}=78$ ……㉢

㉡에서

$$\begin{aligned}\overline{DE}^2&=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{AE}\times\frac{12}{13}\\&=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-144\\&=(\overline{AD}-\overline{AE})^2+2\times\overline{AD}\times\overline{AE}-144\\&=(\overline{AD}-\overline{AE})^2+12\ (\text{㉢에 의하여})\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AD}=\overline{AE}$일 때, $\overline{DE}$는 최솟값 $2\sqrt{3}$을 갖는다.

$m=2\sqrt{3}$이므로 $m^2=12$