로피탈의 정리

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모두 c를 포함하는 열린구간 I 에서 연속이고 미분가능하며,

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$ 또는 $\pm\infty$이고 $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$가 존재하며 c를 제외한 열린구간 I 의 모든

점 x에서 $g'(x)\neq 0$이면 $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$이다.

예시) 2021학년도 수능 나형 17번

17. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+g(x)}{x}=3$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+3}{xg(x)}=2$를 만족시킨다.

함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(0)$의 값은?

풀이) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+g(x)}{x}=3$에서 분모가 0으로 수렴하는데 식 전체의 극한값이 존재하므로 분자 역시 0으로 수렴한다. 또한 $f(x)$와 $g(x)$가 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이고, 따라서 극한값과 함숫값이 일치한다. 즉, $f(0)+g(0)=0$이다.

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)-\{f(0)+g(0)\}}{x-0}=f'(0)+g'(0)=3 \ *$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+3}{xg(x)}=2$에서 동일하게 분자가 0으로 수렴한다. $\therefore f(0)=-3$, $g(0)=3$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\times\frac{1}{g(x)}=\frac{f'(0)}{3}=2,\ \ \therefore f'(0)=6,\ g'(0)=-3 \ *$$

본 문제의 풀이중 *은 로피탈의 정리를 사용하면 다음과 같이 서술할 수 있다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+g'(x)}{1}=f'(0)+g'(0)=3,\ \ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g(x)+xg'(x)}=\frac{f'(0)}{g(0)}=2$$

극한값 $\lim\limits_{x \to t} \dfrac{f(x)}{g(x)}$을 계산하는 경우 중 $g'(t)$가 0이 아닌 경우 교육과정 내에서 증명 가능하다.

두 미분가능한 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(t)=0$, $g(t)=0$이고 $\lim\limits_{x \to t} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$가 존재하며 $g'(t)$가 0

이 아닌 경우 $\lim\limits_{x \to t} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to t} \dfrac{f(x)-f(t)}{g(x)-g(t)} = \lim\limits_{x \to t} \dfrac{\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t}}{\dfrac{g(x)-g(t)}{x-t}} = \dfrac{\lim\limits_{x \to t} \dfrac{f(x)-f(t)}{x-t}}{\lim\limits_{x \to t} \dfrac{g(x)-g(t)}{x-t}} = \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$가 성립한다.

이 외의 경우에서 논술의 풀이과정에서 로피탈의 정리를 이용한 경우 틀린 것으로 간주된다.

또한, 수능 문제에서도 로피탈의 정리를 이용한 경우 계산 과정이 더욱 복잡해질 수 있다.

예시) 2010학년도 6월 평가원 (가형) 27번 미분과 적분

27. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{1-\sin x} - e^{1-\tan x}}{\tan x - \sin x}$의 값은?

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{1-\sin x} - e^{1-\tan x}}{\tan x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e\left(e^{\tan x} - e^{\sin x}\cos^3 x\right)\sec^3 x}{\sec^2 x - \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\sin x - \tan x + 1}\cos^2 x\left(e^{\tan x} - e^{\sin x}\sec^6 x + e^{\tan x}\tan x \sec x + 2e^{\sin x}\tan x \sec^4 x\right)}{2\tan x \sec^2 x + \sin x}$$

이 문제의 경우 테일러 정리를 이용하여 풀 면 계산 과정을 줄일 수 있다.

테일러 정리

함수를 정의역의 특정 점의 미분계수들을 계수로 하는 다항식의 극한으로 표현할 수 있다.

고등교육과정에서 다루는 대부분의 함수는 무한히 미분가능하므로 사용에 문제가 없다.

논술에서 근사를 사용하는 경우, 접선의 방정식의 정의가 다음과 같았음을 이용하여 서술하자.

접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이다.

예를 들어, 다음과 같이 서술할 수 있다.

곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식이 $y=x+1$이므로~

곡선 $y=\ln(1+x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식이 $y=x$이므로~

특히, $\frac{0}{0}$ 형태의 삼각함수의 극한은 다음과 같은 근사를 사용하여 그 값을 계산할 수 있다.

$x\to 0$일 때, $\sin x \approx x-h$, $\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}$, $\tan x \approx x+2h$이다. (이때, $\lim_{x\to 0}\frac{h}{x^3}=\frac{1}{6}$이 성립한다.)

예시) 2010학년도 6월 평가원 (가형) 27번 미분과 적분

27. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}$의 값은?

해설)

$\frac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}=\frac{e^{1-\tan x}\left(e^{\tan x-\sin x}-1\right)}{\tan x-\sin x}$에서 $\tan x-\sin x=t$라 하자.

$x\to 0$에서 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\tan x}\left(e^{\tan x-\sin x}-1\right)}{\tan x-\sin x}=e\times\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x}=e\times\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=e$$이다.

이때, 근사를 이용하면 다음과 같이 해설 할 수 있다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-(x-h)}-e^{1-(x+2h)}}{(x+2h)-(x-h)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-(x+2h)}\left(e^{3h}-1\right)}{3h}=e\times\lim_{h\to 0}\frac{e^{3h}-1}{3h}=e$$