

# [권구승/한성은 모의고사]

| 대학수학능력시험 수학 연습 (3/4) |

## | 권구승 (서울대)

이강학원(대치, 분당), 미래탐구(목동), 이투스앤써.

네 손으로 푼만큼 점수 나온다.

## | 한성은 (POSTECH 수학과)

5A ACADEMY, 일산종로학원

사실 푼만큼은 아니고 맞힌만큼 나오죠.

[hansungeun.com/texta.html](http://hansungeun.com/texta.html) - 공개 모의고사 페이지

써밋 N제(미적분), 써밋 N제(수학2) 출간 - 책 사주세요.

## | CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

# 수학 영역

1

5지선다형

1.  $\sqrt[3]{3} \times 3^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1                      ② 2                      ③ 3  
④ 4                      ⑤ 5

2. 함수  $f(x) = x^3 - 2x - 2$ 에 대하여  $f'(1)$ 의 값은? [2점]

- ① 1                      ② 2                      ③ 3  
④ 4                      ⑤ 5

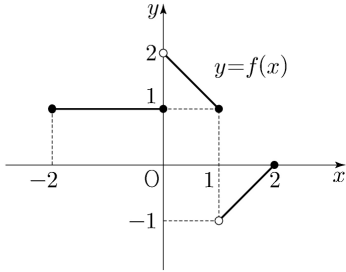
3.  $\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \tan^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 의 값은? [2점]

- ①  $\frac{5}{2}$                       ②  $\frac{11}{4}$                       ③ 3  
④  $\frac{13}{4}$                       ⑤  $\frac{7}{2}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$ 의 값은? [3점]

- ① 1                      ② 2                      ③ 3  
④ 4                      ⑤ 5

5. 닫힌구간  $[-2, 2]$ 에서 정의된 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① -1                      ② 0                      ③ 1
- ④ 2                        ⑤ 3

6. 공차가  $-3$ 인 등차수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3 a_7 = 64, \quad a_8 < 0$$

일 때,  $a_5$ 의 값은? [3점]

- ① -10                    ② -8                    ③ -6
- ④ -4                     ⑤ -2

7.  $\overline{AB}=8$ 이고  $\angle A=45^\circ$ ,  $\angle B=75^\circ$ 인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 길이는? [3점]

- ①  $2\sqrt{6}$                 ②  $\frac{7\sqrt{6}}{3}$                 ③  $\frac{8\sqrt{6}}{3}$
- ④  $3\sqrt{6}$                 ⑤  $\frac{10\sqrt{6}}{3}$

8. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & (x \leq 2) \\ -x^2 + 6x & (x > 2) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때,  $a+b$ 의 값은?  
(단,  $a, b$ 는 상수이다.) [3점]

- ① 2                      ② 3                      ③ 4  
④ 5                      ⑤ 6

9. 자연수  $n$ 에 대하여  $x$ 에 대한 이차방정식

$$x^2 - nx - n = 0$$

의 두 근을  $\alpha_n, \beta_n$ 이라 할 때,  $\sum_{k=1}^6 (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$ 의 값은?

[4점]

- ① 117                      ② 122                      ③ 127  
④ 133                      ⑤ 138

10. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t(t \geq 0)$ 에서의 속도  $v(t)$ 가

$$v(t) = 30 - 2t$$

이다. 점 P가 시각  $t=0$ 일 때부터 움직이는 방향이 바뀔 때까지 움직인 거리는? [4점]

- ① 210                      ② 215                      ③ 220  
④ 225                      ⑤ 230

11. 직선  $y = -x + b (b > 0)$ 이  $y$ 축, 함수  $f(x) = a^x (a > 1)$ 의 그래프, 직선  $y = x$ 와 만나는 점을 각각 A, B, C라 할 때,  $\overline{AB} = \overline{BC}$ 이다.  $\overline{OB} = \sqrt{10}$ 일 때,  $a + b$ 의 값은?

[4점]

- ① 3                      ② 4                      ③ 5  
 ④ 6                      ⑤ 7

12. 최고차항의 계수가  $a$ 인 이차함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) f(1-x) = f(1+x)$$

$$(나) |f'(x)| \leq x^2 - 4x + 7$$

실수  $a$ 의 최댓값은? [4점]

- ①  $\frac{1}{3}$                       ②  $\frac{2}{3}$                       ③ 1  
 ④  $\frac{4}{3}$                       ⑤  $\frac{5}{3}$

13. 수열  $\{a_n\}$ 은  $a_1 = 10$ 이고, 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} + a_n = (-1)^{n+1} \times n$$

을 만족시킨다.  $a_k > a_1$ 인 자연수  $k$ 의 최솟값은? [4점]

- ① 2                      ② 4                      ③ 6  
 ④ 8                      ⑤ 10

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속인 함수  $g(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $(x-3)g(x) \leq 0$   
 (나)  $\{g(x)-2\}^2 = \{f(x)\}^2$   
 (다) 함수  $g(x)$ 가  $x=a$ 에서 미분가능하지 않은  $a$ 의 값은 0과 1 뿐이다.

$g(-1) - g(2)$ 의 값은? [4점]

- ① 14                      ② 12                      ③ 10  
 ④ 8                      ⑤ 6

15. 수열  $\{a_n\}$ 은 상수  $a$ 와 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + a & (a_n \leq n) \\ a_n - n & (a_n > n) \end{cases}$$

을 만족시킨다.  $a_4 = 6$ ,  $a_8 = 8$ 이 되도록 하는 실수  $a$ ,  $a_2$ 의 모든 순서쌍  $(a, a_2)$ 의 개수는? [4점]

- ① 3                      ② 4                      ③ 5  
④ 6                      ⑤ 7

단답형

16.  $\log_5 80 + \log_5 \frac{5}{16}$ 의 값을 구하여라. [3점]

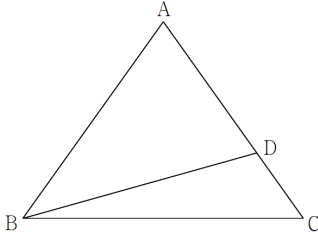
17. 함수  $f(x)$ 가

$$f'(x) = -x^3 + 3, \quad f(2) = 8$$

을 만족시킬 때,  $f(0)$ 의 값을 구하여라. [3점]



18.  $\overline{AB} = \overline{AC} = 6$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를  $\overline{AB} = \overline{BD}$ 가 되도록 잡는다.  $\overline{AD} = 4$ 일 때, 선분 BC의 길이는  $k$ 이다.  $k^2$ 의 값을 구하여라. [3점]



19. 등차수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{3n} a_k = 9n^2$$

- 일 때,  $\sum_{k=1}^6 a_{3k}$ 의 값을 구하여라. [4점]

20. 함수  $f(x) = -x^2 + 4x$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_t^x f(s) ds$$

- 의 그래프가  $x$ 축과 만나는 점의 개수를  $h(t)$ 라 하자. 함수  $h(t)$ 의 치역의 모든 원소의 합을  $S$ , 함수  $h(t)$ 가  $t=k$ 에서 불연속인 실수  $k$ 의 개수를  $m$ 이라 할 때,  $S+m$ 의 값을 구하여라. [4점]

21. 자연수  $k$ 에 대하여 집합  $A_k$ 와  $B_k$ 를

$$A_k = \left\{ \cos \frac{2(l-1)}{k} \pi \mid l \text{은 자연수} \right\},$$

$$B_k = \left\{ \sin \frac{2(m-1)}{k} \pi \mid m \text{은 자연수} \right\}$$

라 하자.  $n(A_k) = 21$ 일 때,  $n(B_k)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라. [4점]

22.  $f(0) = 0$ 이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 와 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

에 대하여 함수  $|g(x)g(x-2)|$ 는 오직  $x=6$ 에서만 미분가능하지 않다.  $f(4)$ 의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

23.  $(1+x)^7$ 의 전개식에서  $x^4$ 의 계수는? [2점]

- ① 14                      ② 21                      ③ 28  
④ 35                      ⑤ 42

24. 두 사건  $A, B$ 에 대하여

$$P(A) = \frac{4}{5}, \quad P(B) = \frac{2}{5}, \quad P(A \cup B) = \frac{9}{10}$$

일 때,  $P(B|A)$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{1}{4}$                       ②  $\frac{3}{8}$                       ③  $\frac{1}{2}$   
④  $\frac{5}{8}$                       ⑤  $\frac{3}{4}$

25. 네 개의 수 1, 3, 5, 7 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를  $a$ , 네 개의 수 2, 4, 6, 8 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를  $b$ 라 하자.  $1 < \frac{b}{a} < 3$ 일 확률은? [3점]

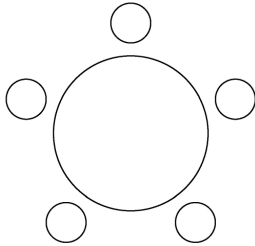
- ①  $\frac{11}{16}$                       ②  $\frac{5}{8}$                               ③  $\frac{9}{16}$
- ④  $\frac{1}{2}$                               ⑤  $\frac{7}{16}$

26. 어느 회사에서 일하는 플랫폼 근로자의 일주일 근무 시간은 평균이  $m$ 시간, 표준편차가 5시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 일하는 플랫폼 근로자 중에서 임의추출한 16명의 일주일 근무 시간의 표본평균이 38시간 이상일 확률을 아래의 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이 0.8413일 때,  $m$ 의 값은? [3점]

$z$	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

- ① 39.25                              ② 39.75                              ③ 40.25
- ④ 40.75                              ⑤ 41.25

27. 다섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 A, B를 포함한 8명의 학생이 있다. 이 8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, A와 B가 이웃하지 않는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



- ① 240                      ② 220                      ③ 200  
 ④ 180                      ⑤ 160

28. 집합  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합 31개 중에서 임의로 서로 다른 두 부분집합을 뽑아 임의로 일렬로 나열하고 나열된 순서대로  $A, B$ 라 할 때,  $A, B$ 가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

$n(A \cap B) = 2$ 이고  $A \cup B = U$ 이다.

- ①  $\frac{2}{31}$                       ②  $\frac{7}{93}$                       ③  $\frac{8}{93}$   
 ④  $\frac{3}{31}$                       ⑤  $\frac{10}{93}$

단답형

29. 확률변수  $X$ 는 다음 시행의 결과에 의해 정해지는 점수이다.

- (가) 0점에서 시작한다.  
 (나) 한 개의 동전을 8번 던져  
 앞면이 나올 때마다 4점을 얻고  
 뒷면이 나올 때마다 2점을 잃는다.

$E(X^2)$ 의 값을 구하여라. [4점]

30. 빨간색, 파란색, 노란색 공 각각 1개씩과 흰 공 7개가 있다. 이 10개의 공을 세 개의 상자 A, B, C에 남김 없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 하는 경우의 수를 구하여라.  
 (단, 흰 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

# 수학 영역(미적분)

5지선다형

23.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(3n-1)(3n+2)}$ 의 값은? [2점]

- ① 1                      ② 2                      ③ 3  
④ 4                      ⑤ 5

24.  $\int_1^e x \ln \frac{1}{x} dx$ 의 값은? [3점]

- ①  $-\frac{e^2+1}{6}$               ②  $-\frac{e^2+1}{5}$               ③  $-\frac{e^2+1}{4}$   
④  $-\frac{e^2+1}{3}$               ⑤  $-\frac{e^2+1}{2}$

25. 매개변수  $t$ 로 나타내어진 함수

$$x = \frac{1-t}{1+t}, \quad y = \frac{t^2}{1-t}$$

에서  $t = -2$ 일 때,  $\frac{dy}{dx}$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{1}{3}$       ②  $\frac{4}{9}$       ③  $\frac{5}{9}$   
 ④  $\frac{2}{3}$       ⑤  $\frac{7}{9}$

26. 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{a_n + 2^n} = 4$ 일 때,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 의 값은? [3점]

- ① 1                      ② 2                      ③ 3  
 ④ 4                      ⑤ 5



27. 역함수  $g(x)$ 를 갖는 함수

$$f(x) = ax + 3\sin x \quad (a > 0)$$

에 대하여 함수  $g(x)$ 가  $x=p$ 에서 미분가능하지 않은 실수  $p$ 가 존재한다. 함수  $g(x)$ 가  $x=p$ 에서 미분가능하지 않은 모든 양수  $g(p)$ 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ 라 할 때,  $a\alpha_3$ 의 값은? [3점]

- ①  $3\pi$                       ②  $6\pi$                       ③  $9\pi$   
 ④  $12\pi$                       ⑤  $15\pi$

28. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $g(x)$ 의 도함수  $g'(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$g'(x) = \int_0^1 x^3 \sqrt{t} \sin(x\sqrt{t}) dt$$

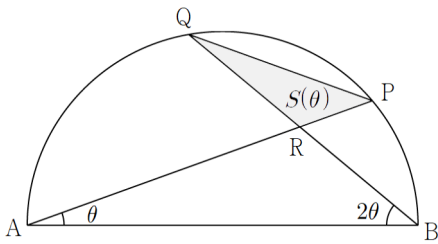
를 만족시킨다. 함수  $g(x)$ 가  $x=a$ 에서 극대인 모든 양수  $a$ 를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때,  $n$ 번째 수를  $a_n$ 이라 하자.  $k\pi < a_6 < (k+1)\pi$ 인

자연수  $k$ 의 값은? [4점]

- ① 11                      ② 14                      ③ 17  
 ④ 20                      ⑤ 23

단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 두 점 P, Q는  $\angle PAB = \theta$ ,  $\angle QBA = 2\theta$ 를 만족시킨다. 두 선분 AP, BQ의 교점을 R, 삼각형 PQR의 넓이를  $S(\theta)$ 라 하자.  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta} = \frac{q}{p}$ 일 때,  $p^2 + q^2$ 의 값을 구하여라. (단,  $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$  이고,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 모든 실수  $x$ 에 대하여 부등식

$$-ke^{-x} \leq l(x) \leq \frac{1}{4}e^x$$

을 만족시키는 일차함수  $l(x)$ 에 대하여 직선  $y=l(x)$ 의 기울기의 최댓값이 1이다. 위 부등식을 만족시키는 일차함수  $l(x)$ 에 대하여 직선  $y=l(x)$ 와  $x$ 축,  $y$ 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이의 최댓값이  $M$ 일 때,  $e^5 \times kM$ 의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

23. 좌표공간의 점  $P(-1, 2, 3)$ 을  $x$ 축에 대하여 대칭이동시킨 점을  $Q$ , 점  $Q$ 를  $yz$ 평면에 대하여 대칭이동시킨 점을  $R$ 라 하자. 점  $R$ 의 좌표가  $(a, b, c)$ 일 때,  $a+b+c$ 의 값은? [2점]
- ① -5                      ② -4                      ③ -3  
④ -2                      ⑤ -1

24. 포물선  $y^2 = 8x$  위의 점  $(4, 4\sqrt{2})$ 에서의 접선을  $l$ 이라 하자. 이 포물선의 준선과 직선  $l$ 의 교점의  $y$ 좌표는? [3점]

- ① -2                      ②  $-\sqrt{2}$                       ③ 0  
④  $\sqrt{2}$                       ⑤ 2

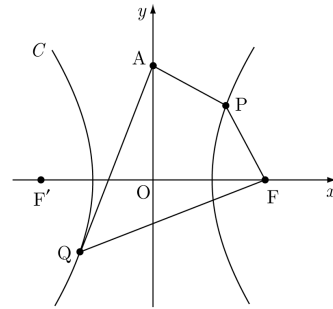
25. 좌표평면에 원  $x^2 + (y-2)^2 = 1$ 이 있다.  
 점  $A(2, 2)$ 에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을  
 각각  $P, Q$ 라 할 때,  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{3}{4}$                       ② 1                      ③  $\frac{5}{4}$
- ④  $\frac{3}{2}$                       ⑤  $\frac{7}{4}$

26. 좌표평면에 두 초점이  $F(c, 0), F'(-c, 0)(c > 0)$ 이고  
 주축의 길이가 4인 쌍곡선  $C$ 가 있다. 점  $A(0, c)$ 에  
 대하여 쌍곡선 위의 두 점  $P$ 와  $Q$ 는

$$\overline{AP} = \overline{FP}, \quad \overline{AQ} = \overline{FQ}$$

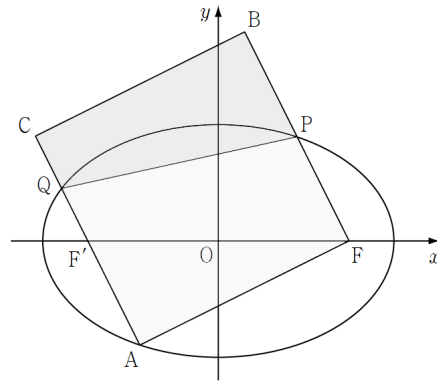
를 만족시킨다. 사각형  $APFQ$ 의 둘레의 길이가 20일 때,  
 $\overline{AP}$ 의 값은? (단,  $\overline{AP} < \overline{AQ}$ ) [3점]



- ① 2                              ②  $\frac{5}{2}$                       ③ 3
- ④  $\frac{7}{2}$                       ⑤ 4

27. 좌표공간에서 중심의  $x$ 좌표,  $y$ 좌표,  $z$ 좌표가 모두 양수인 구  $S$ 가  $x$ 축과  $y$ 축에 각각 접하고,  $z$ 축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 구  $S$ 의 중심  $P$ 에서  $z$ 축,  $xy$ 평면까지의 거리가 각각  $3\sqrt{2}$ , 4일 때, 구  $S$ 가  $z$ 축과 만나는 두 점 사이의 거리는? [3점]
- ①  $2\sqrt{7}$       ②  $2\sqrt{6}$       ③  $2\sqrt{5}$   
 ④ 8            ⑤  $2\sqrt{3}$

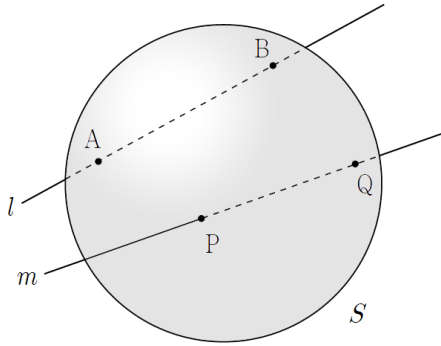
28. 그림과 같이 두 점  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$ ( $c > 0$ )을 초점으로 하는 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 있다. 타원 위의 점  $A$ 와 타원 밖의 두 점  $B, C$ 에 대하여 사각형  $AFBC$ 가 정사각형이고 점  $F'$ 는 선분  $AC$  위의 점이다. 타원이 두 선분  $FB, AC$ 와 만나는 점을 각각  $P, Q$ 라 할 때 두 사각형  $AFPQ, BCQP$ 의 넓이는 각각 10, 6이다.  $b^2$ 의 값은? [4점]



- ① 2                      ② 4                      ③ 6  
 ④ 8                      ⑤ 10

단답형

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 구  $S$ 와 두 직선  $l, m$ 이 있다. 구  $S$ 와 직선  $l$ 이 만나는 두 점을 각각  $A, B$ , 구  $S$ 와 직선  $m$ 이 만나는 두 점을 각각  $P, Q$ 라 하자. 삼각형  $APQ$ 가 한 변의 길이가  $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형이고  $\angle ABQ = \frac{\pi}{2}$ , 사면체  $ABPQ$ 의 부피가  $2\sqrt{2}$ 이다. 삼각형  $BPQ$ 의 세 점  $A, P, Q$ 를 포함하는 평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 할 때,  $Mm$ 의 값을 구하여라. [4점]



30. 좌표평면 위의 두 점  $A(2, 1), B(-1, -2)$ 에 대하여 두 점  $P, Q$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $\vec{OP} = t\vec{OA} + (1-t)\vec{OB} \left( \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \right)$   
 (나)  $|\vec{OQ}| = |\vec{OA}|, \vec{OQ} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) \leq \sqrt{2}$

점  $R(1, 1)$ 에 대하여  $\vec{RP} \cdot \vec{RQ}$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 할 때,  $M^2 + m^2$ 의 값은  $a + b\sqrt{5}$ 이다.  $a + b$ 의 값을 구하여라. (단,  $O$ 는 원점이고  $a, b$ 는 자연수이다.) [4점]

# [권구승/한성은 모의고사 수능 연습(3/4) 정답표]

## 〈공통〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	③	02	①	03	④	04	②	05	②
06	①	07	③	08	⑤	09	④	10	④
11	⑤	12	③	13	④	14	⑤	15	④
16	2	17	6	18	48	19	120	20	10
21	62	22	140						

## 〈확률과 통계〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	④	24	②	25	⑤	26	①	27	①
28	③	29	136	30	390				

## 〈미적분〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	①	24	③	25	②	26	②	27	⑤
28	①	29	25	30	32				

## 〈기하〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	②	24	④	25	④	26	③	27	①
28	②	29	6	30	17				

## COMMENT 12

함수  $f(x)$ 의 그래프는 직선  $x=1$ 에 대하여 대칭이므로  $f'(1)=0$ ,  $f'(x)=2a(x-1)$ 이다.

$-x^2+4x-7 \leq f'(x) \leq x^2-4x+7$ 이다.  $a$ 의 최댓값은 직선  $y=2a(x-1)$ 이 곡선  $y=x^2-4x+7$ 와 접할 때이다.

※  $2a(x-1) \leq x^2-4x+7$ 에서  $x^2-(4+2a)x+7+2a \geq 0$ , 판별식의 부호를 조사하면  $-3 \leq a \leq 1$ 이다.

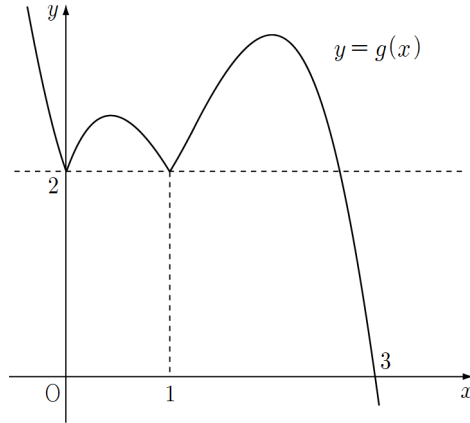
## COMMENT 14

(가)에서  $x < 3$ 일 때  $g(x) \geq 0$ 이고  $x > 3$ 일 때  $g(x) \leq 0$ 이다.  $g(3)=0$ 이다.

(나)에서  $g(x)=2+f(x)$  또는  $g(x)=2-f(x)$ 이다. 함수  $f(x)$ 는 0, 1을 근으로 가져야 한다.

$f(x)=x(x-1)(x-a)$ 이면  $g(x)$ 는  $0 < x < 1$ 일 때는  $2+f(x)$ 이고 나머지 구간에서는  $2-f(x)$ 이다.

$g(3)=0$ 이므로  $2-f(3)=0$ 에서  $f(x)=x(x-1)\left(x-\frac{8}{3}\right)$ 이다.  $g(-1)=2-f(-1)=\frac{28}{3}$ ,  $g(2)=2-f(2)=\frac{10}{3}$ 이다.



## COMMENT 15

$a_5=2$ ,  $a_6=a+2$ 이고,  $a_7$ 은  $2a+2$  또는  $a-4$ ,

$a_8$ 은  $3a+2$  또는  $2a-5$  또는  $2a-4$  또는  $a-11$ 이다.

$a_8=8$ 에서  $a$ 의 값은 2, 6, 19가 가능하다.

6.5는 점화식을 선택하는 범위를 만족시키지 않는다.

$a_3$ 은 9 또는  $6-a$ 이고  $a_2$ 는 11 또는  $9-a$  또는  $8-a$ ,  $6-2a$ 이다. 이 중

점화식을 선택하는 범위를 만족시키는 순서쌍  $(a, a_2)$ 는

$(2, 11)$ ,  $(6, 11)$ ,  $(6, -6)$ ,  $(19, 11)$ ,  $(19, -10)$ ,  $(19, -32)$

가 가능하다.

## COMMENT 19

$a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}=9n^2-9(n-1)^2$ 에서  $a_n=2n-1$ 이다.

## COMMENT 20

$g'(x)=f(x)$ 이므로 함수  $g(x)$ 는  $x < 0$ 에서 감소,  $0 < x < 4$ 에서 증가,  $4 < x$ 에서 감소한다.

삼차함수  $g(x)$ 의 비율관계를 치고  $y=g(x)-g(t)$ 의 근의 개수를 생각하면  $h(t)$ 의 값은

$t < -2$  또는  $6 < t$ 일 때 1,

$t = -2, 0, 4, 6$ 일 때 2,

$-2 < t < 0$  또는  $0 < t < 4$  또는  $4 < t < 6$ 일 때 3

이다.



## COMMENT 21

$k=40$  또는  $k=41$ 이다. 곡선  $y = \cos x$ 는  $x = \pi$ 에 대하여 대칭이고,

$$\cos \frac{0}{k}\pi, \cos \frac{2}{k}\pi, \cos \frac{4}{k}\pi, \dots, \cos \frac{2(k-1)}{k}\pi, \cos \frac{2k}{k}\pi \left( = \cos \frac{0}{k}\pi \right)$$

중  $k$ 가 홀수이냐 짝수이냐에 따라  $\cos \pi$ 값이 있냐 없냐로 나뉘서.

$n(B_{40}) = 21$ ,  $n(B_{41}) = 41$ 이다.

$$\sin \frac{0}{k}\pi, \sin \frac{2}{k}\pi, \sin \frac{4}{k}\pi, \dots, \sin \frac{2(k-1)}{k}\pi, \sin \frac{2k}{k}\pi \left( = \sin \frac{0}{k}\pi \right)$$

$k=40$ 일 때는 대충 2개씩 겹치고  $k=41$ 일 때는 대충 안 겹친다.

## COMMENT 22

$g(0) = 0$ ,  $g'(0) = 0$ 이므로 곡선  $y = g(x)$ 는  $x=0$ 에서  $x$ 축에 접한다.

$|g(x)g(x-2)| = |g(x)| \times |g(x-2)|$ 이다. 수  $|g(x)g(x-2)|$ 가 미분가능하려면

두 함수  $|g(x)|$ ,  $|g(x-2)|$  중 어느 한쪽이 미분가능할 때 다른 한쪽은 함숫값이 0이 되어야 한다.

방정식  $g(x) = 0$ 의  $x=0$ 이 아닌 실근의 개수는 최대 2이다.

Case1) 방정식  $g(x) = 0$ 의  $x=0$ 이 아닌 실근이 없으면 함수  $|g(x)g(x-2)|$ 가 미분불가능한  $x$ 값이 발생하지 않는다.

Case2) 방정식  $g(x) = 0$ 의  $x=0$ 이 아닌 실근의 개수가 1이면

Case2-1)  $g(x) = \frac{1}{4}x^2(x-a)^2$ 일 때는 함수  $|g(x)g(x-2)|$ 가 미분불가능한  $x$ 값이 발생하지 않는다.

Case2-2)  $g(x) = \frac{1}{4}x^3(x-a)$ 일 때,  $|g(x)|$ 는  $x=a$ 에서 미분불가능,  $|g(x-2)|$ 는  $x=a+2$ 에서 미분불가능이다.

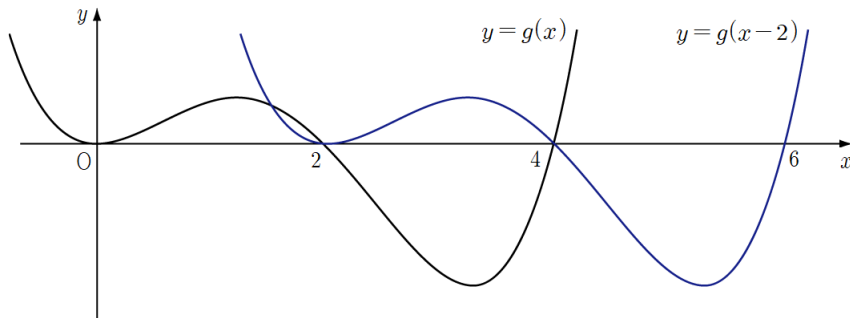
$a+2=6$ 이면  $|g(x-2)|$ 가  $x=a$ 에서 0이어야 하고  $a=6$ 이면  $|g(x)|$ 가  $x=a+2$ 에서 0이어야 한다. 잘 안되네.

Case3) 방정식  $g(x) = 0$ 의  $x=0$ 이 아닌 실근의 개수가 1일 때  $g(x) = \frac{1}{4}x^2(x-a)(x-b)$ 라 하자.

$|g(x)|$ 는  $x=a$ ,  $x=b$ 에서 미분불가능,  $|g(x-2)|$ 는  $x=a+2$ ,  $x=b+2$ 에서 미분불가능이다.

야, 대충  $\{a, b\} = \{2, 4\}$ 인 뻔 오지? 일단 하나는 2를 더해서 6이 되어야 하니까 4이고,

이제  $x=4$ 에서의 미분불가능을 지워주는 근이 필요하니까 나머지 하나는 2이다.



## COMMENT 확률과 통계 28

전체 경우의 수는  $31 \times 30$ 이고, 사건의 경우의 수는 80이다.

벤 다이어그램에서  $A \cap B$  영역에 오는 원소를 선택하는 경우의 수  ${}_5C_2$ 와,

나머지 원소를  $A-B$  영역 또는  $B-A$  영역에 넣는 경우의 수  $2^3$ 의 곱이다.

## COMMENT 확률과 통계 29

앞면이 나온 횟수  $Y \sim B\left(8, \frac{1}{2}\right)$ 에 대하여  $X = 4Y - 2(8 - Y) = 6Y - 16$ 이다.

## COMMENT 확률과 통계 30

빨과노를 몇 개씩 묶는지에 따라 분류하자.

Case1) 3/0/0인 경우 :  $3 \times {}_3H_3 = 30$

Case2) 2/1/0인 경우 :  ${}_3C_2 \times 3! \times {}_3H_4 = 270$

Case3) 1/1/1인 경우 :  $3! \times {}_3H_4 = 90$

## COMMENT 미적분 28

$g'(x) = \int_0^1 x^3 \sqrt{t} \sin(x\sqrt{t}) dt$ 에서  $x\sqrt{t} = u$ 로 치환하면

$$g'(x) = \int_0^x 2u^2 \sin u du$$

이다.  $g''(x) = 2x^2 \sin x$ 는  $x = \pi, x = 2\pi, x = 3\pi, \dots$ 에서 0이고 사이사이의 넓이를 썰어보면

$g'(x) = 0$ 의 근이 구간  $(\pi, 2\pi), (2\pi, 3\pi), (3\pi, 4\pi), \dots$ 에 각각 하나씩 존재한다.

이 중  $g(x)$ 가 극대가 되는  $x$ 값은 구간  $(\pi, 2\pi), (3\pi, 4\pi), (5\pi, 6\pi), \dots$ 에 있는 것들이다.

## COMMENT 미적분 29

삼각형 ABR에서 사인법칙 쓰고 싶은 각이다.  $\overline{PR} = \overline{AP} - \overline{AR} = 2\cos\theta - \frac{2\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$ 이다.

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \left( 2\cos\theta - \frac{2\sin 2\theta}{\sin 3\theta} \right) \times \left( 2\cos 2\theta - \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} \right) \times \sin 3\theta \text{이고 } \frac{q}{p} = \frac{4}{3} \text{이다.}$$

## COMMENT 미적분 30

기울기가 최대일 때는 직선이 두 곡선에 동시에 접할 때이다.

곡선  $y = -ke^{-x}$ 와의 접점을  $(s, -ke^{-s})$ , 곡선  $y = \frac{1}{4}e^x$ 와의 접점을  $(t, \frac{1}{4}e^t)$ 라 하면

$$ke^{-s} = \frac{1}{4}e^t = \frac{\frac{1}{4}e^t + ke^{-s}}{t - s}$$

이다. 연립하여 풀면  $k = \frac{4}{e^2}$ 이다. 참고로  $s = \ln 4 - 2, t = \ln 4$ 이다.

※ 기울기가 1을 이용하여  $t = \ln 4$ 를 먼저 뽑을 수도 있고,

곡선  $y = -e^{-(x - \ln k)}$ 와 곡선  $y = e^{x - \ln 4}$ 가 서로 점대칭임을 이용할 수 있다.

직선  $y = l(x)$ 와  $x$ 축,  $y$ 축으로 둘러싸인 삼각형이 언제 가장 넓어질지 생각하자.

곡선  $y = \frac{1}{4}e^x$ 보다 곡선  $y = -\frac{4}{e^2}e^{-x}$ 이 원점에서 멀어, 곡선  $y = -\frac{4}{e^2}e^{-x}$ 에 접할 때 답이 나온다.

아니면 굳이  $k$ 를 설정해서 구하게 하질 않았겠지.

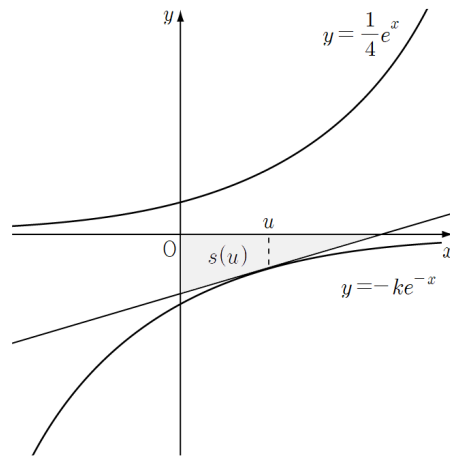
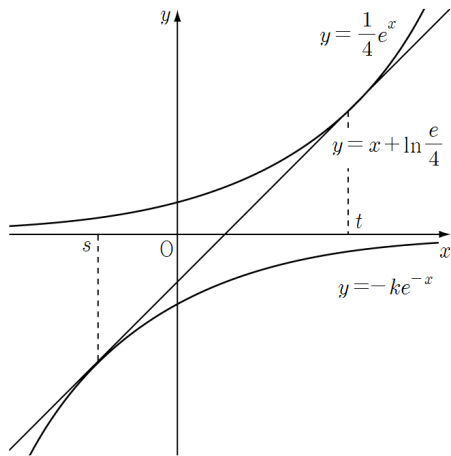
접점을  $(u, -ke^{-u})$ 라 하자. 접선의 방정식은  $y = ke^{-u}(x - u) - ke^{-u}$ 이고

$x$ 절편은  $u + 1, y$ 절편은  $-k(u + 1)e^{-u}$ , 삼각형의 넓이는  $s(u) = \left| \frac{k}{2}(u + 1)^2 e^{-u} \right|$ 이다.

$k$ 는  $\frac{4}{e^2}$ 이다. 쓰기 귀찮아서..

$u$ 는 두 곡선에 동시에 접할 때의 접점의  $x$ 값인  $s = \ln 4 - 2$ 보다 크거나 같아야 한다.

범위에서  $s(u) = \left| \frac{2}{e^2}(u + 1)^2 e^{-u} \right|$ 의 값은  $u = 1$ 일 때 최댓값  $\frac{8}{e^3}$ 을 가진다.



## COMMENT 기하 28

정사각형 AFBC의 넓이가 16이므로  $\overline{AF}=4$ 이다.  $\overline{AF'}=l$ 이라 하자.

대칭 깨려보면  $\overline{FP}=l$ 이고 넓이에서  $\overline{AQ}=5-l$ , 직각삼각형 AFQ에서  $\overline{FQ}=\sqrt{4^2+(5-l)^2}$ 이다.

타원의 정의에서  $\sqrt{4^2+(5-l)^2}+(5-2l)=4+l$ 이다. 풀면  $l=2$ ,  $a=3$ ,  $c=\sqrt{5}$ ,  $b=2$ 이다.

## COMMENT 기하 29

구의 중심 O는 삼각형 APQ의 무게중심이다. 점 B에 대하여

- ①  $\overline{OB}=2$ 이다.
- ② 선분 AQ를 지름으로 하는 구 위의 점이다.  
 $\Rightarrow$  선분 AQ의 중점을 M이라 할 때,  $\overline{MB}=\sqrt{3}$ 이다.
- ③  $\angle OMB = \frac{\pi}{2}$ 이므로 점 B는 OM에 수직인 평면 위의 선분 AQ를 지름으로 하는 원 위의 점이다.
- ③ 평면 APQ까지의 거리가  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 이다.

점 B에서 APQ평면에 내린 수선의 발을 B'이라 하면  $\overline{BB'}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

## COMMENT 기하 30

$\overline{RP} \cdot \overline{RQ} = \overline{RP} \cdot \{\overline{RO} + \overline{OQ}\}$ 에서 최소화는 점 P가 점 A일 때  $-1-\sqrt{5}$ 이다.

$\overline{PR} \cdot \overline{RO}$ 가 최소이고 점 Q를 점  $(-\sqrt{5}, 0)$ 으로 막으면  $\overline{PR} \cdot \overline{OQ}$ 도 최소이다.

최대일 때는 점 P가 점  $(1, 0)$ , 점 Q가 점 B일 때 3이다.

이때가  $|\overline{RP}|$ ,  $|\overline{RQ}| \cos \theta$ 가 동시에 최대이다.

