2022학년도 시립대 논술

수학 오전 [해설]

[빠른 정답]

1. (1) $\frac{a^3}{8}$ (2) $\frac{4}{27}$

2. (1) $\frac{448}{729}$ (2) $\frac{61}{95}$

3. $\frac{34\sqrt{3}}{9}$

4. **(증명)**

Problem 1.

곡선 $C : y = x - x^2$에 대해 네 점

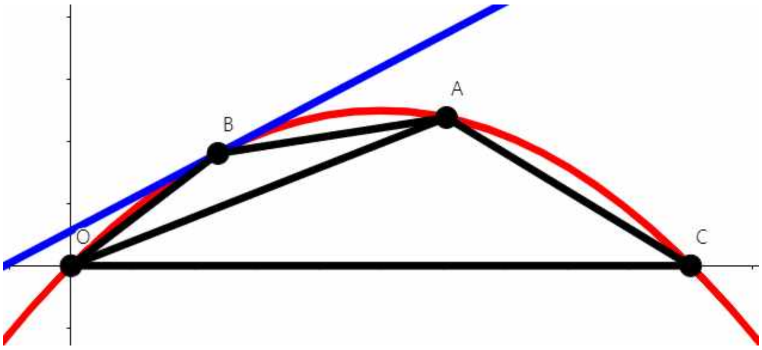
$$\mathrm{O}\,(0\,,\,0)\,,\ \mathrm{A}\,(a\,,\,a-a^2)\,,\ \mathrm{B}\,(b\,,\,b-b^2)\,,\ \mathrm{C}\,(1\,,\,0)$$

을 생각한다. $0 < b < a < 1$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 고정된 a에 대하여, 삼각형 OAB의 넓이의 최댓값을 a에 관하여 나타내어라.

(2) 사각형 OABC의 넓이의 최댓값을 구하여라.

Solution. (1)



문제의 그림을 다음과 같이 도시하면, 삼각형 OBA의 넓이가 최대가 되기 위한 조건은 점 B에서의 접선이 선분 OA와 평행한 경우이다. 기울기를 비교하면,

$$1 - 2b = \frac{(a - a^2) - 0}{a - 0} = 1 - a$$

이므로 정리하면 $b = \frac{a}{2}$이다. 이때, 삼각형 OBA의 넓이는 최대이고 그 값은

$$\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} 0 & a & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & a - a^2 & \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} & 0 \end{matrix}\right| = \frac{a^3}{8}$$

이다. (사선 공식을 쓰는 것은 감점의 요인이 될 수 있다. 다만 문제의 전체적인 난이도가 평이하기에 타자는 답을 내는 데에만 주안점을 두었다.)

■

Solution. (2)

사각형 OABC의 넓이는 삼각형 OAB의 넓이과 삼각형 OAC의 넓이의 합과 같다. 이때, (2)의 결과에 따라

$$S = |\triangle \mathrm{OAB}| + |\triangle \mathrm{OAC}| \le \frac{a^3}{8} + |\triangle \mathrm{OAC}|$$

이며 삼각형 OAC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times (a - a^2) = \frac{a - a^2}{2}$이다. 이상에서, 구하고자 하는 사각형 OABC의 넓이의 최댓값은 구간 $0 < a < 1$에서 함수

$$f(a) = \frac{1}{8}(a^3 + 4a - 4a^2)$$

의 최댓값을 구하는 것과 같다. 이때, 산술 - 기하 평균 부등식에 따라

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}\left(a^3+4a-4a^2\right) &= \frac{1}{16}(2a)(2-a)^2 \\ &\le \frac{1}{16}\left(\frac{2a+(2-a)+(2-a)}{3}\right)^3 \\ &= \frac{4}{27}\end{aligned}$$

가 주어진 식의 최댓값이다. (역시, 산술 기하 평균 부등식의 사용에 대한 질문이 있을 수 있다. 답을 내는 것에 주안점을 두었다.)

■

Problem 2.

주사위를 6번 굴리는 시행을 생각하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) 3의 배수인 눈이 연속해서 나오지 않을 확률을 구하여라.

(2) 2 이하의 눈이 적어도 1번 나올 때, 3의 배수의 눈이 연속해서 나오지 않을 확률을 구하여라.

Solution. (1)

가능한 전체 경우의 수는 6^6이다. 이들 중 3의 배수가 연속해서 나오지 않는 경우를 고려한다.

(가) 3의 배수가 존재하지 않을 경우

이때, 가능한 경우의 수는 4^6이다.

(나) 3의 배수가 하나 있을 경우

이때, 어떻게 배열하여도 3의 배수는 연속할 수 없다. 3의 배수가 위치할 자리만 결정하면 되므로 가능한 경우의 수는

$${}_6\mathrm{C}_1 \times 4^5 \times 2 = 3 \cdot 2^{12}$$

이다.

(다) 3의 배수가 두 개 있을 경우

3의 배수가 연속하게 위치하는 5가지 경우를 제외하면 되고, 가능한 경우의 수는

$$4^4 \times 2^2 \left({}_6\mathrm{C}_2 - 5\right) = 5 \cdot 2^{11}$$

이다.

(라) 3의 배수가 세 개 있을 경우

직접 카운팅하면, 3의 배수가 위치할 수 있는 가능한 경우는 4가지이다. 가능한 경우의 수를 구하면

$$4^3 \times 2^3 \times 4 = 2^{11}$$

(마) 3의 배수가 네 개 이상 있을 경우

이 경우에는, 항상 3의 배수가 연속할 수밖에 없어 모순이다.

이상에서, 구하고자 하는 확률은

$$\frac{4^6 + 3 \cdot 2^{12} + 5 \cdot 2^{11} + 2^{11}}{6^6} = \frac{7 \cdot 2^{12}}{6^6} = \frac{448}{729}$$

이다.

■

 # 별해.

3의 배수가 $k\ (0 \le k \le 3)$개 있을 때, 3의 배수를 배열하는 방법은 방정식

$$\underbrace{x_1 + + \cdots + x_{k+1}}_{(k+1)\text{ 개}} = (6-k)$$

에서 1 이상인 것이 $(k-1)$개 이상이면 된다. $(k \geq 2)$

이를 통하여 각 경우의 배열 방법의 수를 계산할 수도 있다.

■

Solution. (2)

먼저, 가능한 경우의 수는 $6^6 - 4^6$이다. 이때, 조건을 만족시키기 위해서는 (1)에서 고려한 전체 경우의 수에서 2 이하의 수가 한 번도 발생하지 않을 경우를 빼면 된다.

그럼, 동일한 과정을 반복하면

(가) 3의 배수가 존재하지 않을 경우

이때, 가능한 경우의 수는 2^6이다.

(나) 3의 배수가 하나 있을 경우

이때, 어떻게 배열하여도 3의 배수는 연속할 수 없다. 3의 배수가 위치할 자리만 결정하면 되므로 가능한 경우의 수는 아래와 같다.

$${}_6\mathrm{C}_1 \times 2^5 \times 2 = 6 \cdot 2^6$$

(다) 3의 배수가 두 개 있을 경우

3의 배수가 연속하게 위치하는 5가지 경우를 제외하면 되고, 가능한 경우의 수는

$$2^4 \times 2^2 \left({}_6\mathrm{C}_2 - 5\right) = 5 \cdot 2^7$$

이다.

(라) 3의 배수가 세 개 있을 경우

직접 카운팅하면, 3의 배수가 위치할 수 있는 가능한 경우는 4가지이다. 가능한 경우의 수를 구하면

$$2^3 \times 2^3 \times 4 = 2^8$$

(마) 3의 배수가 네 개 이상 있을 경우

이 경우에는, 항상 3의 배수가 연속할 수밖에 없어 모순이다.

이상을 모두 합하면, 가능한 경우의 수는 21×2^6이다. 그럼 구하고자 하는 확률은

$$\frac{7 \cdot 2^{12} - 21 \cdot 2^6}{6^6 - 4^6} = \frac{427}{665} = \frac{61}{95}$$

이다.

■

Problem 3.

다음의 적분을 계산하여라.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| 3\sqrt{2}\,\sin^3 x - \cos x \right| dx$$

Solution.

먼저, 구간을 등분하여

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| 3\sqrt{2}\sin^3 x - \cos x \right| dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left| 3\sqrt{2}\sin^3 x - \cos x \right| dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left| 3\sqrt{2}\sin^3 x - \cos x \right| dx$$

의 값을 각각 계산한다.

(a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left| 3\sqrt{2}\sin^3 x - \cos x \right| dx$의 경우

이때, 구간에서 $\sin x$는 음수의 값을 취하고 $\cos x$는 양수의 값을 취하므로 준식은 항상 음수이다. 그럼 절댓값이 해결되어 다음과 같이 적분을 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left| 3\sqrt{2}\sin^3 x - \cos x \right| dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\cos x - 3\sqrt{2}\left(1-\cos^2 x\right)\sin x\right) dx \\ &= \left[\sin x + 3\sqrt{2}\left(\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \\ &= 1 + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

(b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left| 3\sqrt{2}\sin^3 x - \cos x \right| dx$의 경우

함수 $f(x) = 3\sqrt{2}\sin^3 x - \cos x$에 대해,

$$f'(x) = 9\sqrt{2}\sin^2 x\cos x + \sin x > 0 \ \text{ if } \ 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

이므로 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 함수는 강한 증가함수이다. 한편 $f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$이므로 사잇값 정리에 따라 $f(x) = 0$인 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$가 하나 존재하고, 증가함수임에서 이러한 α는 유일하다. 이때 주어진 적분은

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left| 3\sqrt{2}\sin^3 x - \cos x \right| dx = \int_{0}^{\alpha} \left(\cos x - 3\sqrt{2}\sin^3 x\right) dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \left(3\sqrt{2}\sin^3 x - \cos x\right) dx$$

$$= \left[\sin x + 3\sqrt{2}\left(\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right)\right]_0^{\alpha} + \left[-\sin x - 3\sqrt{2}\left(\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right)\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

이다. 대입하여 정리하면,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|3\sqrt{2}\sin^3 x - \cos x\right| dx = 2\left(\sin\alpha + 3\sqrt{2}\left(\cos\alpha - \frac{\cos^3\alpha}{3}\right)\right)$$

$$-1-2\sqrt{2}$$

이다. 한편, $3\sqrt{2}\sin^3\alpha = \cos\alpha$이므로 양변을 제곱하여

$$18(\sin^2\alpha)^3 = 1 - \sin^2\alpha$$

이며 $\sin^2\alpha = h$이면 삼차방정식

$$18h^3 + h - 1 = (3h-1)(6h^2+2h+1) = 0$$

을 얻는다. 이를 해결하면 $\sin^2\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos^2\alpha = \frac{2}{3}$이다.

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$이므로 근호를 제거하여 대입하면,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|3\sqrt{2}\sin^3 x - \cos x\right| dx = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^3\right)\right)$$

$$= \frac{34\sqrt{3}}{9}$$

이 구하고자 하는 정답이다.

■

Problem 4.

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 5$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{2}{\sqrt{a_n}}$$

이다. 모든 자연수 n에 대해 $4 < a_n \leq 4 + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$임을 보여라.

Solution.

먼저, 수학적 귀납법으로 $a_n > 4$임을 보이겠다. 이를 위해, 주어진 점화식을 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{2}{\sqrt{a_n}}$$

$$a_{n+1} - 4 = \frac{3}{4}(a_n - 4) + \frac{2}{\sqrt{a_n}} - 1$$

$$= (a_n - 4)\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\sqrt{a_n}(\sqrt{a_n} + 2)}\right)$$

이제 어떤 자연수 k에 대해 $a_k > 4$라고 가정한다. 그럼

$$0 < \frac{1}{\sqrt{a_k}(\sqrt{a_k} + 2)} < \frac{1}{8}$$

이며 $a_k - 4 > 0$이므로

$$0 < \frac{5}{8}(a_k - 4) < (a_{k+1} - 4) = (a_k - 4)\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\sqrt{a_k}(\sqrt{a_k} + 2)}\right)$$

이므로 $a_{k+1} > 4$이다. 그럼 $a_1 = 5 > 4$이므로 수학적 귀납법으로 항상 $a_n > 4$이며, 이때 항상 $0 < \frac{1}{\sqrt{a_n}(\sqrt{a_n} + 2)}$이므로

$$(a_{k+1} - 4) = (a_n - 4)\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\sqrt{a_n}(\sqrt{a_n} + 2)}\right) < \frac{3}{4}(a_n - 4)$$

이다. $(a_n - 4) > 0$임에서 $n = 1, \cdots, m-1$ $(m \geq 2)$을 모두 대입하여 곱하면

$$a_m - 4 < \left(\frac{3}{4}\right)^{m-1} \quad (m \geq 2)$$

임을 얻는다. 한편 $a_1 = 5 \leq 4 + \left(\frac{3}{4}\right)^0$이므로, 이상에서 모든 자연수 n에 대해

$$4 < a_n \leq 4 + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

임을 증명하였다.

■

[총평]

모두 고생하셨습니다. 이번 시립대 오전 논술의 난도는 역대급으로 평이했습니다. 킬러 문제는 없었고, 3번의 계산이 그나마 까다로웠습니다. 4번은 간단한 수학적 귀납법 문제입니다. 증명하고자 하는 식을 구해내면 손쉽게 풀어낼 수가 있습니다.

[1번] 하

[2번] 하

[3번] 중

[4번] 중

모두 좋은 결과가 있길 기원합니다.