제 2 교시

Ambitious Penguin

(1번)

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = 2\times5$

$= 10$

$\sin(\angle BAC) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \overline{BC} = 5\sqrt{2}$

정답 ⑤

(2번)

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = \dfrac{5}{\frac{1}{2}}$

$= 10$

따라서 반지름의 길이는 5

정답 ⑤

(3번)

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin B} = 30$

$\therefore\ \overline{AC} = 21$

정답 21

(4번)

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\theta} = 8$

$\therefore\ \sin\theta = \dfrac{5}{8}$

정답 ④

(5번)

$\angle C = 120^\circ$

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A} = \dfrac{\overline{AB}}{\sin C} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \overline{BC} = \sin A \times \dfrac{16\sqrt{3}}{3} = \dfrac{8\sqrt{6}}{3}$

정답 ③

(6번)

사인법칙을 통해 주어진 값들을 정리하면 다음과 같다.

$\sin C = \dfrac{\overline{BD}\times\sin(\angle DBC)}{\overline{DC}}$, $\sin A = \dfrac{\overline{BD}\times\sin(\angle ABD)}{\overline{AD}}$

$\overline{AD} : \overline{DC} = 5:3$이므로 사인값의 성질에 의해

$\sin(\angle ABD) : \sin(\angle DBC) = 5:2$이다.

$\therefore\ \dfrac{\sin C}{\sin A} = \dfrac{2}{5}\times\dfrac{5}{3}$

$= \dfrac{2}{3}$

정답 ③

(7번)

삼각형 ABC에 내접하는 원이 세 선분 CA, AB, BC와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$\overline{OQ} = \overline{OR} = 3$

$\therefore\ \overline{DR} = \overline{DB} - \overline{RB}$

$= 1$

$\overline{DO} = \sqrt{3^2+1^2}$

$= \sqrt{10}$

$\therefore\ \sin(\angle DOR) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

삼각형 DOR와 삼각형 OAQ는 닮음비가 $1:3$이므로

$\overline{AQ} = 3\times\overline{OR} = 9$

이다. 이때 점 O가 삼각형 ABC의 내심이므로 정리하면 다음과 같다.

$\overline{PA}=\overline{AQ}=9$, $\angle CAD=\angle DAB$
$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$, $12:(9+\overline{CP})=4:(\overline{CR}-1)$
$9+\overline{CP}=3(\overline{CR}-1)$, $\overline{CP}=\overline{CR}$
$\therefore\ \overline{CR}=6$, $\overline{CD}=5$

직선 OR 와 직선 AB 가 평행하므로 $\angle DAB=\angle DOR$, 즉 $\angle CAD=\angle DOR$ 이다. 삼각형 ADC 의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 다음과 같다.

$$2R=\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=5\sqrt{10}$$
$$\therefore\ R=\frac{5\sqrt{10}}{2}$$

따라서 삼각형 ADC 의 외접원의 넓이는 $\frac{125}{2}\pi$

정답 ①

(8번)

점 A 의 x 좌표를 $x=p$ 라 하자.

$A(p,\ a^p)$, $B(a^p,\ p)$

$\overline{AB}=\sqrt{2}(a^p-p)$
$\overline{OH}=p$
$\overline{OH}:\overline{AB}=1:2$
$\therefore\ a^p=p(\sqrt{2}+1)$

원점 O 에서 직선 AB 에 내린 수선의 발을 O′이라 하자.
조건 (가)에 의하여 $\overline{OH}=\overline{BO'}$ 임을 알 수 있다.

$\overline{OA}=\overline{OB}$, $\angle OHA=\angle BO'O=\frac{\pi}{2}$
$\therefore\ \triangle AOH\equiv\triangle OBO'$

$$\angle AOO'=\frac{1}{2}\angle AOB$$
$$\therefore\ \angle AOH=\angle O'OH+\angle AOO'=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\angle AOB$$

$$\angle OBO'=\frac{\pi}{2}-\angle BOO'=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\angle AOB$$

$\triangle AOH\equiv\triangle OBO'$ 에 의하여 $\angle AOH=\angle OBO'$ 이므로 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\angle AOB$$
$$\therefore\ \angle AOB=\frac{\pi}{4}$$

이에 사인법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$\overline{AB}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sin\frac{\pi}{4}=1=2\overline{BO'}=2\overline{OH}=2p$$
$$\therefore\ p=\frac{1}{2}$$

$$a^p=p(\sqrt{2}+1)$$
$$\therefore\ a=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $200(t-a)=50$

정답 50

(9번)

$$\cos\theta=\frac{16+25-11}{40}=\frac{3}{4}$$
$$\therefore\ \cos\theta=\frac{3}{4}$$

정답 ②

(10번)

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{CA}}{\sin B}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}$$
$$\frac{2}{\sin A}=\frac{3}{\sin B}=\frac{4}{\sin C}$$
$\therefore\ \overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=4:2:3$
$\therefore\ \overline{AB}=4k$, $\overline{BC}=2k$, $\overline{CA}=3k$ $(k>0)$

$$\cos C=\frac{4k^2+9k^2-16k^2}{12k^2}=-\frac{1}{4}$$
$$\therefore\ \cos C=-\frac{1}{4}$$

정답 ②

(11번)

$\overline{AB}=\overline{AD}=6$, $\overline{AC}=10$, $\overline{BD}=\sqrt{15}$

$\cos(\angle BAD)=\frac{36+36-15}{72}$

$=\frac{19}{24}$

$\cos(\angle BAC)=\frac{36+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{12\overline{AC}}$

$=\frac{136-\overline{BC}^2}{120}$

$\cos(\angle BAD)=\cos(\angle BAC)$

$\therefore\ \overline{BC}=\sqrt{41}$

정답 ⑤

(12번)

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=14$

$\therefore\ \overline{BC}=7\sqrt{3}$

$\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$

$\therefore\ \overline{AB}=3\overline{AC}$

$\cos(\angle BAC)=\frac{9\overline{AC}^2+\overline{AC}^2-147}{6\overline{AC}^2}$

$=\frac{1}{2}$

$10\overline{AC}^2-147=3\overline{AC}^2$

$\therefore\ \overline{AC}=\sqrt{21}$

정답 ②

(13번)

$\sin\theta=\frac{\sqrt{11}}{6}$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{5}{6}\ (\because\ 0<\theta<\pi)$

$\cos\theta=\frac{3^3+4^2-\overline{DG}^2}{24}$

$=\frac{25-\overline{DG}^2}{24}$

$=\frac{5}{6}$

$\therefore\ \overline{DG}=\sqrt{5}$

$\cos(\angle BCE)=\cos(\pi-\theta)$

$=-\cos\theta$

$=-\frac{5}{6}$

$\cos(\angle BCE)=\frac{3^2+4^2-\overline{BE}^2}{24}$

$=\frac{25-\overline{BE}^2}{24}$

$=-\frac{5}{6}$

$\therefore\ \overline{BE}=3\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{DG}\times\overline{BE}=15$

정답 ①

(14번)

$\overline{BE}=1$, $\overline{CE}=5$

$\therefore\ \overline{AE}=\sqrt{10}$

$\cos\theta=\frac{10+45-25}{30\sqrt{2}}$

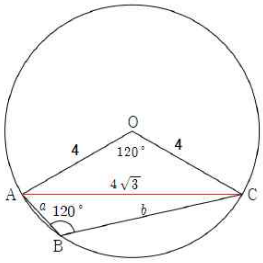
$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ 50\sin\theta\cos\theta=25$

정답 25

(15번)



사인법칙과 코사인법칙을 이용하면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$\overline{AC}=8\times\sin 120^\circ$
$=4\sqrt{3}$

$\overline{AC}^2=a^2+b^2-2ab\cos 120^\circ$
$=a^2+b^2+ab$
$=(a+b)^2-ab$
$=48$

$ab=(2\sqrt{15})^2-(4\sqrt{3})^2=12$

따라서 구하는 넓이는 $\frac{1}{2}(4\times4+ab)\sin 120^\circ=7\sqrt{3}$

정답 ⑤

(16번)

선분 BD 의 길이를 $x\,(x>0)$ 라고 하자. $\overline{AD}=\overline{CE}$ 이므로 $\overline{AE}=x+2$ 이다.

$\cos(\angle EAD)=\frac{1}{2}$
$=\frac{(x+2)^2+(x+1)^2-13}{2(x+2)(x+1)}$

$(x+2)^2+(x+1)^2-13=(x+2)(x+1)$
$x^2+3x-10=(x+5)(x-2)=0$
$\therefore\ x=2\ \ (\because\ x>0)$

$\cos\theta=\frac{13+9-16}{6\sqrt{13}}$
$=\frac{1}{\sqrt{13}}$
$\sin\theta=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

$\cos(\angle EDB)=\frac{1}{\sqrt{13}}$
$=\frac{4+13-\overline{BE}^2}{4\sqrt{13}}$
$=\frac{17-\overline{BE}^2}{4\sqrt{13}}$
$\therefore\ \overline{BE}=\sqrt{13}$

따라서 삼각형 BDE 의 넓이를 구하면 다음과 같다.

$\frac{1}{2}\times\sin(\angle EDB)\times\sqrt{13}\times2=2\sqrt{3}$

정답 ④

(17번)

$\frac{10}{\sin C}=2\times3\sqrt{5}$
$\therefore\ \sin C=\frac{\sqrt{5}}{3}$
$\therefore\ \cos C=\frac{2}{3}$ ($\because$ 삼각형 ABC 는 예각삼각형)

$\frac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\frac{a^2+b^2-\frac{2}{3}ab}{ab}$
$=\frac{4}{3}$

$3a^2+3b^2-2ab=4ab$
$3(a-b)^2=0$
$\therefore\ a=b$

코사인법칙을 사용하면 다음과 같다.

$10^2=a^2+b^2-2ab\cos C$
$=a^2+a^2-2a^2\times\frac{2}{3}$
$=\frac{2}{3}a^2$
$\therefore\ a^2=150$

따라서 $ab=a^2=150$

정답 ②

(18번)

$\overline{\mathrm{CD}} = 2r\sin\theta$

$= \dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$

$\overline{\mathrm{BC}} = 2r\sin\dfrac{\pi}{3}$

$= \sqrt{3}\,r$

삼각형 BCD 에서 코사인법칙을 사용하면 다음과 같다.

$(\sqrt{3}\,r)^2 = (\sqrt{2})^2 + \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2 - 2\times\sqrt{2}\times\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r\right)\times\cos\dfrac{\pi}{3}$

$5r^2 + 2\sqrt{6}\,r - 6 = 0$

$\therefore\ r = \dfrac{6-\sqrt{6}}{5}\ \ (\because\ r>0)$

정답 ①

(19번)

$\overline{\mathrm{OB}}$ 와 $\overline{\mathrm{AH}}$ 가 만나는 점을 Q 라 하자.

$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{AHB} = \dfrac{\pi}{2}$

$\angle\mathrm{OQA} = \angle\mathrm{HQB}$

$\therefore\ \angle\mathrm{OAQ} = \angle\mathrm{HBQ}$

$\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}} = 2$

$\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{BH}} = \sqrt{2}\ \left(\because \angle\mathrm{BAP} = \dfrac{\pi}{6}\right)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AH}} = \sqrt{6}$

$\cos(\angle\mathrm{OAQ}) = \dfrac{4+6-\overline{\mathrm{OH}}^2}{4\sqrt{6}}$

$= \dfrac{10-\overline{\mathrm{OH}}^2}{4\sqrt{6}}$

$\cos(\angle\mathrm{BHQ}) = \dfrac{4+2-\overline{\mathrm{OH}}^2}{4\sqrt{2}}$

$= \dfrac{6-\overline{\mathrm{OH}}^2}{4\sqrt{2}}$

$\angle\mathrm{OAQ} = \angle\mathrm{HBQ}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OH}}^2 = 4-2\sqrt{3}$ 이고, 따라서 $m^2+n^2=20$

정답 20

(20번)

원 C의 반지름의 길이를 R라 하자. 원 C의 넓이가 $\dfrac{49}{3}\pi$이므로 $R = \dfrac{7}{3}\sqrt{3}$ 이다.

삼각형 ABC에서 사인법칙을 적용하면 다음과 같다.

$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\dfrac{\pi}{3}} = 2R$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}} = 7$

$\overline{\mathrm{AC}} = a$라 하면 코사인법칙에 의해 다음과 같이 정리가 가능하다.

$7^2 = a^2 + 3^2 - 2\times a\times 3\times\cos\dfrac{\pi}{3}$

$a^2 = 3a - 40 = 0\ ,\ (a-8)(a+5) = 0$

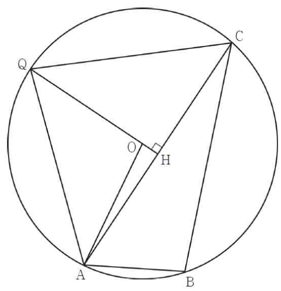
$\therefore\ a = \overline{\mathrm{AC}} = 8$

$\cos(\angle\mathrm{CBA}) = \dfrac{3^2+7^2-8^2}{2\times3\times7}$

$= -\dfrac{1}{7}$

$\dfrac{\pi}{2} < \angle\mathrm{CBA} < \pi$이므로 삼각형 ABC 는 둔각삼각형임을 알 수 있다.

삼각형 PAC 의 넓이가 최대가 되도록 하는 점을 Q 라 하면 점 Q 는 선분 AC 의 수직이등분선과 원 C의 두 교점 중 직선 AC 로부터 멀리 떨어져 있는 점이다. 그림과 같이 점 Q에서 선분 AC 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 원 C의 중심 O 는 선분 QH 위에 있다.



$\overline{\mathrm{OH}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ \overline{\mathrm{QH}} = \dfrac{8}{3}\sqrt{3}$

따라서 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값을 구하면

$\dfrac{1}{2}\times 8\times\dfrac{8}{3}\sqrt{3} = \dfrac{32}{3}\sqrt{3}$

정답 ①

(21번)

원의 중심을 O라 하자.
두 삼각형 OAB와 OBC는 정삼각형이므로
$\overline{AB}=\overline{BC}=3$이다.

$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$

$\overline{AC}^2=3^2+3^2-2\times3\times3\times\cos\frac{2\pi}{3}$

$=27$

$\therefore\ \overline{AC}=3\sqrt{3}$

사각형 ABCP가 원에 내접하므로 $\angle APC=\frac{\pi}{3}$이다.
$\overline{AP}=x$, $\overline{CP}=y$라 하면 코사인법칙을 사용했을 때 다음과 같다.

$(3\sqrt{3})^2=x^2+y^2-2xy\cos\frac{\pi}{3}$

$27=(x+y)^2-3xy$

$x+y=8$

$\therefore\ xy=\frac{37}{3}$

삼각형 ABC의 넓이 $=\frac{1}{2}\times3\times3\times\sin\frac{2\pi}{3}$

$=\frac{9\sqrt{3}}{4}$

삼각형 ACP의 넓이 $=\frac{1}{2}\times x\times y\times\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{37\sqrt{3}}{12}$

따라서 사각형 ABCP의 넓이는 $\frac{9\sqrt{3}}{4}+\frac{37\sqrt{3}}{12}=\frac{16\sqrt{3}}{3}$

정답 ②

(22번)

$\angle ADB=\alpha$라 할 때, 사인법칙과 코사인법칙을 사용하면 다음과 같다.

$\frac{\overline{AB}}{\sin\alpha}=12$

$\therefore\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{13}}{4}$

$\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 $\angle ADB=\angle CBD$이다. 선분 AD와 선분 BC는 평행하므로 사각형 ABCD는 등변사다리꼴이다.
두 점 B, C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 다음과 같다.

$\overline{DH_1}=\overline{BD}\times\cos\alpha$

$=8\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{13}}{4}$

$=2\sqrt{26}$

$\overline{BH_1}=\overline{BD}\times\sin\alpha$

$=8\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}$

$=2\sqrt{6}$

$\overline{AH_1}=\overline{DH_2}$이므로 사각형 ABCD의 넓이 S를 구하면 다음과 같다.

$S=\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{BH_1}$

$=\frac{1}{2}\times\left\{\left(\overline{DH_1}+\overline{AH_1}\right)+\left(\overline{DH_1}-\overline{DH_2}\right)\right\}\times\overline{BH_1}$

$=\overline{DH_1}\times\overline{BH_1}$

$=2\sqrt{26}\times2\sqrt{6}$

$=8\sqrt{39}$

따라서 $\frac{S^2}{13}=192$

정답 192

(23번)

원주각의 성질을 이용하여 $\angle AOO'=\alpha$, $\angle AO'O=\beta$라는 점을 알 수 있다. 이를 이용하면 $\angle OAO'=\pi-(\alpha+\beta)$라는 것 역시 알 수 있다.

$\therefore\ \cos(\pi-(\alpha+\beta))=-\cos(\alpha+\beta)$

$=-\frac{1}{3}$

두 원에서 사인법칙을 적용하면 다음과 같다.

$2\times\overline{OA}=\frac{\overline{AC}}{\sin\alpha}$, $2\times\overline{O'A}=\frac{\overline{AC}}{\sin\beta}$

$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{2}$

$\overline{OA}:\overline{OA'}=3:2$

$\therefore\ \overline{OA}=\frac{3}{2}\overline{OA'}$

$\cos(\pi-(\alpha+\beta))=-\frac{1}{3}$과 $\overline{\mathrm{OA}}=\frac{3}{2}\overline{\mathrm{OA}'}$를 이용해 코사인법칙을 적용하면 다음과 같다.

$\overline{\mathrm{OA}}=\frac{3}{\sqrt{17}}$, $\overline{\mathrm{OA}'}=\frac{2}{\sqrt{17}}$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이를 구하면 $\frac{9}{17}\pi$이고
따라서 $p+q=26$

정답 26

(24번)

$\angle\mathrm{BAD}$와 $\angle\mathrm{BCD}$는 같은 호에 대한 원주각이므로 그 크기가 같다.
$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BCD}=\theta$, $\overline{\mathrm{AD}}=a$, $\overline{\mathrm{CB}}=b$라 하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
S_1&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin\theta\\
&=\frac{1}{2}\times6\times a\times\sin\theta\\
&=3a\sin\theta\\
S_2&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CB}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\theta\\
&=\frac{1}{2}\times b\times4\times\sin\theta\\
&=2b\sin\theta
\end{aligned}
$$

$S_1:S_2=9:5$
$\therefore\ a:b=6:5$

$a=6k,\ b=5k\ (k>0)$라고 하자. $\angle\mathrm{ABC}$와 $\angle\mathrm{ADC}$는 같은 호에 대한 원주각이므로 $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ADC}=\alpha$이다. 코사인법칙을 사용하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&\overline{\mathrm{AC}}^2=6^2+(5k)^2-2\times6\times5k\times\cos\alpha\\
&\overline{\mathrm{AC}}^2=(6k)^2+4^2-2\times6k\times4\times\cos\alpha\\
&11k^2+9k-20=(11k+20)(k-1)\\
&\qquad=0
\end{aligned}
$$

$\therefore\ k=1$, $a=6$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$

삼각형 ADC의 넓이 S를 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\alpha\\
&=\frac{1}{2}\times6\times4\times\frac{\sqrt{7}}{4}\\
&=3\sqrt{7}
\end{aligned}
$$

따라서 $S^2=(3\sqrt{7})^2=63$

정답 63

(25번)

$\overline{\mathrm{AP}}=a$, $\overline{\mathrm{BQ}}=b$라 하면 다음과 같다.

$\overline{\mathrm{CR}}=1-a-b$
$\overline{\mathrm{BP}}=1-a$
$\overline{\mathrm{AR}}=a+b$

ㄱ. <거짓>

삼각형 APR에서 코사인 법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{PR}}^2&=a^26(a+b)^2-2\times a\times(a+b)\times\cos\frac{\pi}{3}\\
&=a^2+ab+b^2
\end{aligned}
$$

삼각형 PBQ에서 코사인 법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{PQ}}^2&=b^2+(1-a)^2-2\times b\times(1-a)\times\cos\frac{\pi}{3}\\
&=a^2+ab-2a+b^2-b+1
\end{aligned}
$$

$\overline{\mathrm{PR}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2$
$a^2+ab+b^2=a^2+ab-2a+b^2-b+1$
$\therefore\ 2a+b=1$

$2\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BQ}}=1$, $4\overline{\mathrm{AP}}+2\overline{\mathrm{BQ}}=2$
$\therefore\ 3\overline{\mathrm{AP}}+2\overline{\mathrm{BQ}}<2$ ($\because\ \overline{\mathrm{AP}}>0$)

ㄴ. <참>

$$
\begin{aligned}
b&=1-2a\\
\overline{\mathrm{CQ}}&=1-b\\
&=2a\\
\overline{\mathrm{CR}}&=a-a-(1-2a)\\
&=a
\end{aligned}
$$

삼각형 CRQ에서 $\overline{\mathrm{CQ}}:\overline{\mathrm{CR}}=2:1$이고 $\angle\mathrm{RCQ}=\frac{\pi}{3}$이므로

삼각형 CRQ는 $\angle QRC = \frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다. 따라서

$\overline{QR} = \sqrt{3}a$

ㄷ <참>

두 삼각형 PBQ, CRQ의 외접원의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2라 하면 삼각형 PBQ와 삼각형 CRQ에서 다음과 같이 정리가 가능하다.

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2R_1$$

$$\frac{\overline{QR}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2R_2$$

삼각형 PBQ의 외접원의 넓이가 삼각형 CRQ의 외접원의 넓이의 2배이므로 $R_1 = \sqrt{2}\times R_2$이다. 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\overline{PQ}}{2\sin\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\times\frac{\overline{QR}}{2\sin\frac{\pi}{3}}$$

$\therefore\ \overline{PQ}^2 = 2\times\overline{QR}^2$

$\overline{PQ}^2 = 3a^2-3a+1$

$\overline{QR}^2 = 3a^2$

$3a^2-3a+1 = 6a^2,\ 3a^2+3a-1 = 0$

근과 계수의 관계를 이용하면 $a = \frac{-3\pm\sqrt{9+12}}{6}$ 이고,

$a > 0$이므로 $a = \frac{\sqrt{21}-3}{6}$ 이다.

정답 ④

(26번)

부채꼴 OAB의 호의 길이가 π이므로 원의 반지름의 길이는 3 이다. 따라서 넓이를 구하면 $\sin\frac{\pi}{3}\times\frac{1}{2}\times 3^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

정답 ②

(27번)

$\sin\theta = \frac{2}{3}$

$\triangle ABC$의 넓이$= \sin\theta\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\frac{1}{2}$

$= 5\overline{BC}$

$= 50$

$\therefore\ \overline{BC} = 10$

정답 10

(28번)

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r이라 하면

$\overline{OP} = \frac{3}{4}r,\ \overline{OQ} = \frac{1}{3}r$

삼각형 OPQ의 넓이가 $4\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}r\times\frac{1}{3}r\times\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{16}r^2 = 4\sqrt{3},\ r = 8$

따라서 호의 길이는 $8\times\frac{\pi}{3} = \frac{8}{3}\pi$

정답 ④

(29번)

삼각형 ABC의 넓이 $= \frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{7}\times\sin\theta$

$= \sqrt{6}$

$\therefore\ \sin\theta = \frac{\sqrt{42}}{7}$

$\angle A$는 예각이므로 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다. 따라서

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{7}$

정답 ⑤

(30번)

부채꼴 AOB의 중심각의 크기를 θ라 하면 다음과 같다.

$\pi = 4\theta$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$S = \frac{1}{2}\times 4\times\pi$

$= 2\pi$

$T=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times4\times\sin\frac{\pi}{4}$

$=\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{OP}}$

$\frac{S}{T}=\pi$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2}$

정답 ③

(31번)

반원의 중심을 O라 하고, 부채꼴 OBC의 중심각의 크기를 θ라 하자. 그러므로 반원의 반지름의 길이가 6이고 호 CB의 길이가 2π이다.

$2\pi=6\theta$

$\theta=\frac{\pi}{3}$

부채꼴 OBC의 넓이 $=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{\pi}{3}$

$=6\pi$

$\angle\mathrm{COA}=\frac{2\pi}{3}$

삼각형 CAO의 넓이 $=\frac{1}{2}\times6^2\times\sin\frac{2\pi}{3}$

$=9\sqrt{3}$

따라서 구하는 넓이는 $6\pi+9\sqrt{3}$

정답 ③

(32번)

$\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{10}$

$\therefore\ \angle\mathrm{BOC}=\frac{\pi}{2}$

$\angle\mathrm{AOB}=\alpha$, $\angle\mathrm{AOC}=\beta$라 하면 다음과 같다.

$S_1=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\alpha$

$=5\sin\alpha$

$S_2=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\beta$

$=5\sin\beta$

$3S_1=4S_2$

$\therefore\ \sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\beta$

$\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}=2\pi$

$\therefore\ \beta=\frac{3}{2}\pi-\alpha$

$\sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$

$=-\frac{4}{3}\cos\alpha$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{16}{9}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$

$=1$

$\therefore\ \cos^2\alpha=\frac{9}{25}$

$\sin\alpha>0$이므로 $\cos\alpha<0$이다. 따라서 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$이다.

코사인법칙에 의하여 선분 AB의 길이를 구하면 다음과 같다.

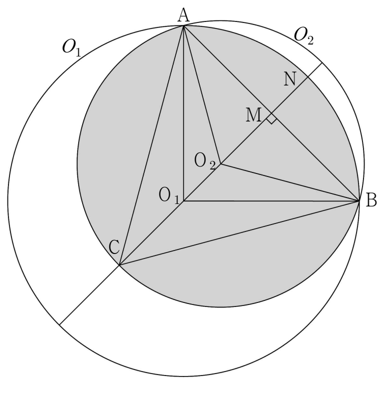
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(\overline{\mathrm{OA}})^2+(\overline{\mathrm{OB}})^2-2\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\cos\alpha}$

$=\sqrt{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2(\sqrt{10})^2\times\left(-\frac{3}{5}\right)}$

$=4\sqrt{2}$

정답 ③

(33번)



원 O_1의 중심을 $\mathrm{O_1}$, 원 O_2의 중심을 $\mathrm{O_2}$라 하고 직선 $\mathrm{O_1O_2}$가 선분 AB와 만나는 점을 M, 그리고 직선 $\mathrm{O_1O_2}$가 원 O_1과 만나는 두 점 중에서 점 M에 가까운 점을 N이라 하자. 정리하면 다음과 같다.

$\overline{\mathrm{O_1A}}=6$, $\overline{\mathrm{AM}}=3\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{O_1A}}:\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{2}:1$

$\therefore\ \angle\mathrm{MO_1A}=\frac{\pi}{4}$

원 O_1에서 점 B를 포함하지 않는 부채꼴 $\mathrm{O_1NA}$의 넓이를 구하면 $\frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{9}{2}\pi$이다.

$\angle \mathrm{MO_2A}=\frac{\pi}{3}$
$\therefore\ \overline{\mathrm{O_2A}}=2\sqrt{6}$

원 O_2에서 점 B를 포함하지 않는 부채꼴 $\mathrm{O_2AC}$의 넓이를 구하면 $\frac{1}{2}\times(2\sqrt{6})^2\times\frac{2}{3}\pi=8\pi$이다.

$\overline{\mathrm{O_1O_2}}=\overline{\mathrm{O_1M}}-\overline{\mathrm{O_2M}}=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$
삼각형 $\mathrm{AO_1O_2}$의 넓이는 $=\frac{1}{2}\times 6\times(3\sqrt{2}-\sqrt{6})\times\sin\frac{\pi}{4}$
$=9-3\sqrt{3}$

위에서 계산한 것들을 정리하면 다음과 같다.

$$p+q\sqrt{3}+r\pi=2\times\left\{\frac{9}{2}\pi+8\pi-(9-3\sqrt{3})\right\}$$
$$=-18+6\sqrt{3}+25\pi$$
$\therefore\ p+q+r=13$

정답 13

(34번)

선분 DE가 최소일 때는 점 A에서 수선을 내렸을 때의 수선의 발을 H라고 할 때, 수선 AH가 원의 지름일 때이다.
코사인법칙을 이용하면 다음과 같다.

$$\cos A=\frac{25+36-49}{2\times5\times6}=\frac{1}{5},\ \sin A=\frac{\sqrt{24}}{5}$$

삼각형의 넓이공식을 이용하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}\times5\times6\times\sin A=\frac{1}{2}\times7\times\overline{\mathrm{AH}}$$
$\therefore\ \overline{\mathrm{AH}}=\frac{6\sqrt{24}}{7}$

사인법칙을 이용하면 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{AH}}\times\sin A$$
$$=\frac{144}{35}$$

정답 ⑤