

제 2 교시

Ambitious Penguin

1. 사인 법칙

삼각형 ABC의 세 각의 크기 A, B, C와 세 변의 길이 \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} , 외접원의 반지름의 길이 R 사이에는 다음 관계가 성립한다.

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{CA}}{\sin B} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R$$

1. 반지름의 길이가 5인 원에 내접하는 삼각형 ABC에 대하여 $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$ 일 때, 선분 BC의 길이는? [3점]
(2019년 교2 9월 교육청 가형 7번)

- ① $3\sqrt{2}$ ② $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

2. 선분 BC의 길이가 5이고, $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$ 인 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는? [3점]
(2019년 교2 9월 교육청 나형 12번)

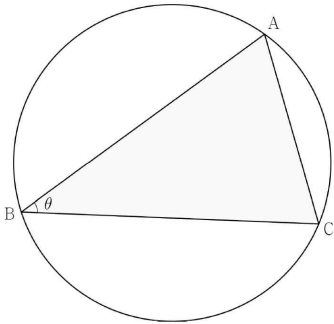
- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

3. 반지름의 길이가 15인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $\sin B = \frac{7}{10}$ 일 때, 선분 AC의 길이를 구하시오. [3점]
(2021학년도 6월 평가원 가형 23번/나형 5번)

5. $\overline{AB} = 8$ 이고 $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 15^\circ$ 인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 길이는? [3점]
(2021학년도 9월 평가원 나형 9번)

- ① $2\sqrt{6}$ ② $\frac{7\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ ④ $3\sqrt{6}$ ⑤ $\frac{10\sqrt{6}}{3}$

4. 그림과 같이 반지름의 길이가 4인 원에 내접하고 변 AC의 길이가 5인 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC = \theta$ 라 할 때, $\sin \theta$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \pi$) [3점]
(2020년 고3 4월 교육청 나형 13번)



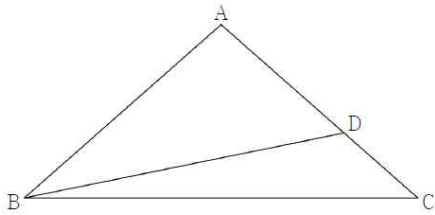
- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

6. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형 ABC에서 선분 AC를 5 : 3으로 내분하는 점을 D라 하자.

$$2\sin(\angle ABD) = 5\sin(\angle DBC)$$

일 때, $\frac{\sin C}{\sin A}$ 의 값은? [4점]

(2021학년도 사관학교 나형 19번)

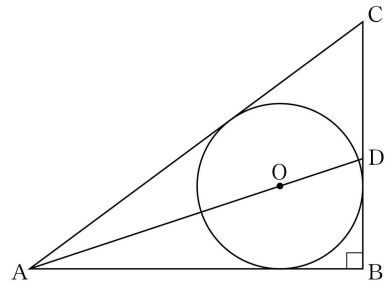


- ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{7}{11}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{9}{13}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

7. 그림과 같이 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC에 내접하고

반지름의 길이가 3인 원의 중심을 O라 하자. 직선 AO가 선분 BC와 만나는 점을 D라 할 때, $\overline{DB} = 4$ 이다. 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는? [4점]

(2020년 교3 10월 교육청 가형 17번)



- ① $\frac{125}{2}\pi$ ② 63π ③ $\frac{127}{2}\pi$
 ④ 64π ⑤ $\frac{129}{2}\pi$

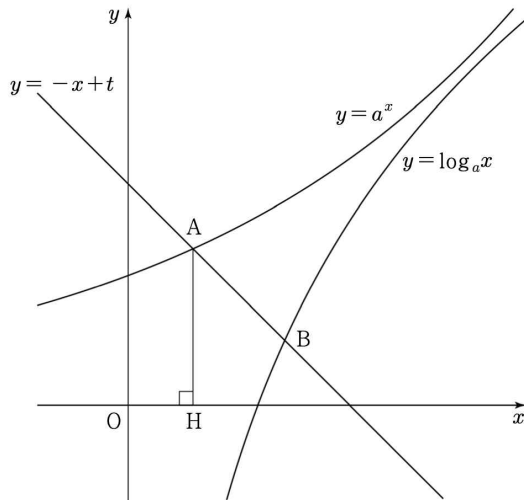
8. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, t 에 대하여

직선 $y = -x + t$ 가 두 곡선 $y = a^x$, $y = \log_a x$ 와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 세 점 A, B, H는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{OH} : \overline{AB} = 1 : 2$

(나) 삼각형 AOB의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

$200(t-a)$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]
(2020년 고2 9월 교육청 29번)



2. 코사인 법칙

삼각형 ABC에 대하여 각 A의 대변을 a , 각 B의 대변을 b , 각 C의 대변을 c 라 할 때 다음이 성립한다.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \rightarrow \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

전자는 제일코사인법칙, 후자는 제이코사인법칙이라고 한다.

9. $\overline{AB}=4, \overline{BC}=5, \overline{CA}=\sqrt{11}$ 인 삼각형 ABC에서 $\angle ABC = \theta$ 라 할 때, $\cos \theta$ 의 값은? [3점]
(2019년 교2 11월 교육청 나형 10번)

- ① $\frac{2}{3}$
- ② $\frac{3}{4}$
- ③ $\frac{4}{5}$
- ④ $\frac{5}{6}$
- ⑤ $\frac{6}{7}$

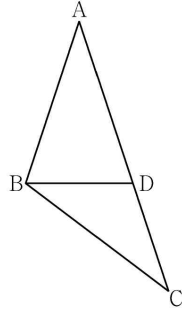
10. 삼각형 ABC에서

$$\frac{2}{\sin A} = \frac{3}{\sin B} = \frac{4}{\sin C}$$

일 때, $\cos C$ 의 값은? [3점]
(2020년 교2 9월 교육청 10번)

- ① $-\frac{1}{2}$
- ② $-\frac{1}{4}$
- ③ 0
- ④ $\frac{1}{4}$
- ⑤ $\frac{1}{2}$

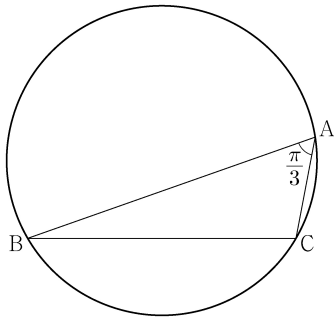
11. $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 10$ 인 삼각형 ABC 가 있다. 선분 AC 위에 점 D 를 $\overline{AB} = \overline{AD}$ 가 되도록 잡는다. $\overline{BD} = \sqrt{15}$ 일 때, 선분 BC 의 길이는? [3점]
 (2021학년도 9월 평가원 가형 12번/나형 25번)



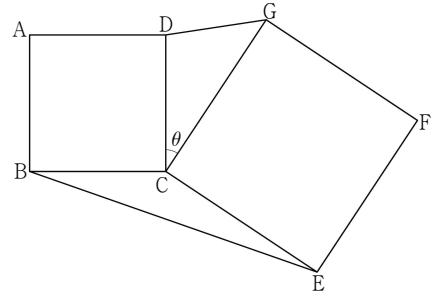
- ① $\sqrt{37}$ ② $\sqrt{38}$ ③ $\sqrt{39}$ ④ $2\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{41}$

12. $\angle A = \frac{\pi}{3}$ 이고 $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 1$ 인 삼각형 ABC 가 있다. 삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이가 7 일 때, 선분 AC 의 길이는? [3점]
 (2021학년도 수능 가형 10번/나형 28번)

- ① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{22}$ ④ $\sqrt{23}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

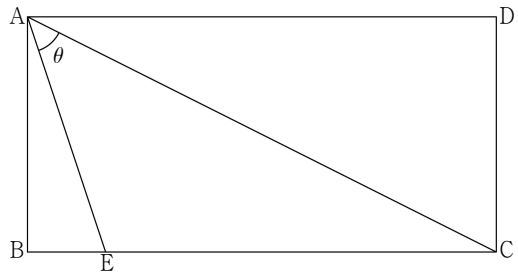


13. 그림과 같이 평면 위에 한 변의 길이가 3 인 정사각형 ABCD 와 한 변의 길이가 4 인 정사각형 CDEF 가 있다. $\angle DCG = \theta$ ($0 < \theta < \pi$) 라 할 때, $\sin \theta = \frac{\sqrt{11}}{6}$ 이다. $\overline{DG} \times \overline{BE}$ 의 값은?
 [4점]
 (2020년 고3 7월 교육청 나형 15번)



- ① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

14. 그림과 같이 $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 6$ 인 직사각형 ABCD 에서 선분 BC 를 1 : 5 로 내분하는 점을 E 라 하자. $\angle EAC = \theta$ 라 할 때, $50 \sin \theta \cos \theta$ 의 값을 구하시오. [4 점]
 (2019년 고2 9월 교육청 나형 27번)

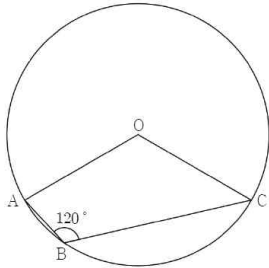


15. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심이 O 인 원 위의 세 점 A, B, C 에 대하여

$$\angle ABC = 120^\circ, \overline{AB} + \overline{BC} = 2\sqrt{15}$$

일 때, 삼각형 $OABC$ 의 넓이는? [4점]

(2021학년도 사관학교 가형 15번)



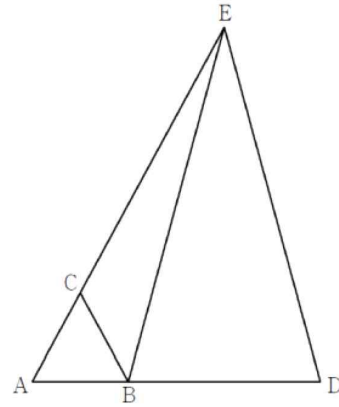
- ① $5\sqrt{3}$ ② $\frac{11\sqrt{3}}{2}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

16. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC 에서

선분 AB 의 연장선과 선분 AC 의 연장선 위에 $\overline{AD} = \overline{CE}$ 가 되도록 두 점 D, E 를 잡는다.

$\overline{DE} = \sqrt{13}$ 일 때, 삼각형 BDE 의 넓이는? [4점]

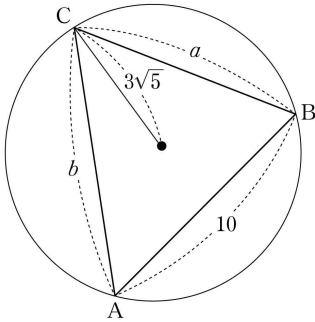
(2020년 교2 9월 교육청 16번)



- ① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{14}$

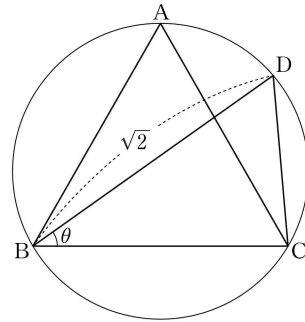
17. 길이가 각각 10, a , b 인 세 선분 AB, BC, CA를 각 변으로 하는 예각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 지나는 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$ 이고 $\frac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab} = \frac{4}{3}$ 일 때, ab 의 값은? [4점]
 (2020년 고3 3월 교육청 나형 19번)

- ① 140 ② 150 ③ 160 ④ 170 ⑤ 180

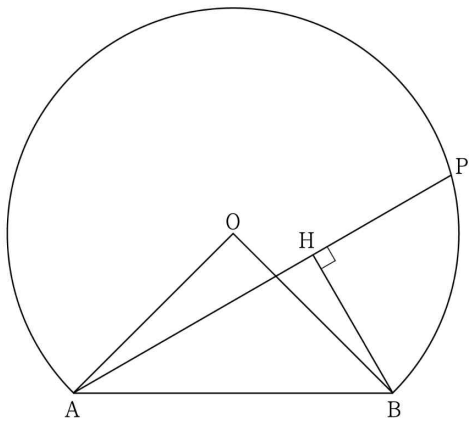


18. 정삼각형 ABC가 반지름의 길이가 r 인 원에 내접하고 있다. 선분 AC와 선분 BD가 만나고 $\overline{BD} = \sqrt{2}$ 가 되도록 원 위에서 점 D를 잡는다. $\angle DBC = \theta$ 라 할 때, $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다. 반지름의 길이 r 의 값은? [4점]
 (2020년 고3 10월 교육청 나형 19번)

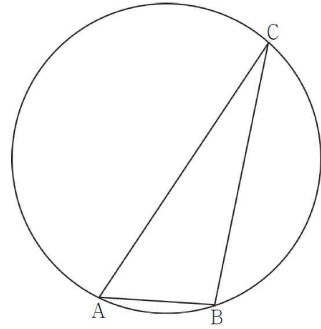
- ① $\frac{6-\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{6-\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$
 ④ $\frac{6-\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\frac{6-\sqrt{2}}{5}$



19. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{3}{2}\pi$ 인 부채꼴 OBA가 있다. 호 BA 위에 점 P를 $\angle BAP = \frac{\pi}{6}$ 가 되도록 잡고, 점 B에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 할 때, \overline{OH}^2 의 값은 $m+n\sqrt{3}$ 이다. m^2+n^2 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 유리수이다.) [4점]
(2020년 고2 9월 교육청 27번)



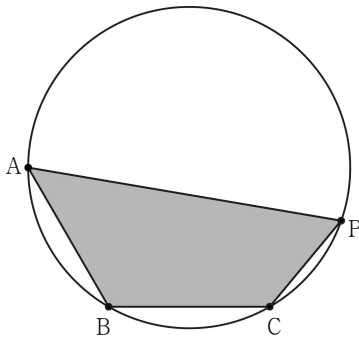
20. 그림과 같이 원 C에 내접하고 $\overline{AB}=3, \angle BAC = \frac{\pi}{3}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$ 일 때, 원 C 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.) [4점]
(2020년 고3 4월 교육청 가형 19번)



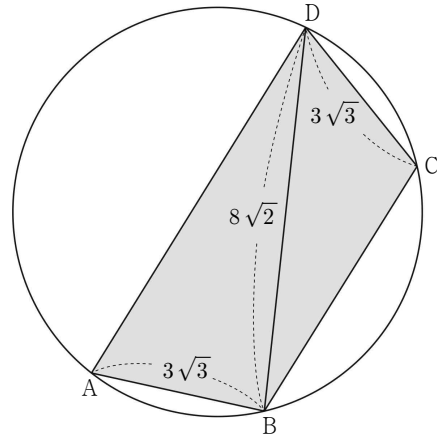
- ① $\frac{32}{3}\sqrt{3}$ ② $\frac{34}{3}\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$
- ④ $\frac{38}{3}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{40}{3}\sqrt{3}$

21. 반지름의 길이가 3인 원의 둘레를 6등분하는 점 중에서 연속된 세 개의 점을 각각 A, B, C 라 하자. 점 B를 포함하지 않는 호 AC 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP} + \overline{CP} = 8$ 이다. 사각형 ABCP의 넓이는? [4점]
 (2019년 고2 9월 교육청 가형 19번)

- ① $\frac{13\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{19\sqrt{3}}{3}$
- ④ $\frac{22\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{25\sqrt{3}}{3}$



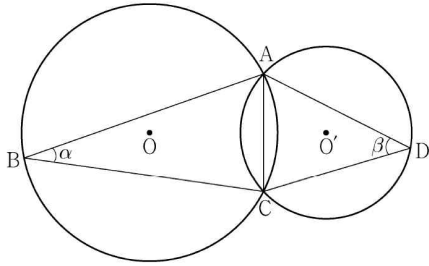
22. 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{AB} = \overline{CD} = 3\sqrt{3}$, $\overline{BD} = 8\sqrt{2}$ 일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하자. $\frac{S^2}{13}$ 의 값을 구하시오. [4점]
 (2019년 고2 11월 교육청 가형 28번/나형 29번)



23. 그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD의 외심을 각각 O, O'이라 하고, $\angle ABC = \alpha$, $\angle ADC = \beta$ 라 할 때,

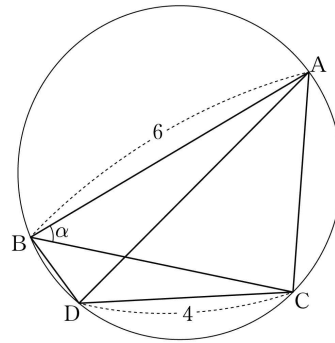
$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{3}{2}, \quad \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}, \quad \overline{OO'} = 1$$

이 성립한다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)
[4점]
(2022학년도 수능 예비시행 21번)

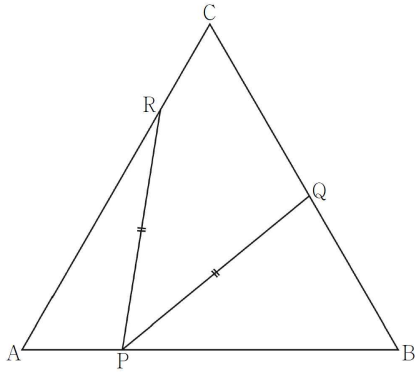


24. 그림과 같이 예각삼각형 ABC가 한 원에 내접하고 있다.

$\overline{AB} = 6$ 이고, $\angle ABC = \alpha$ 라 할 때 $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ 이다. 점 A를 지나지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{CD} = 4$ 이다. 두 삼각형 ABD, CBD의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 할 때, $S_1 : S_2 = 9 : 5$ 이다. 삼각형 ADC의 넓이를 S 라 할 때, S^2 의 값을 구하시오. [4점]
(2020년 교3 3월 교육청 나형 29번)



25. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다.
 선분 AB 위의 점 P, 선분 BC 위의 점 Q, 선분 CA 위의 점 R에 대하여 세 점 P, Q, R가
 $\overline{AP} + \overline{BQ} + \overline{CR} = 1$, $\overline{PQ} = \overline{PR}$
 를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른
 것은? (단, 세 점 P, Q, R는 각각 점 A, 점 B, 점 C가
 아니다.) [4점]
 (2020년 고2 11월 교육청 21번)



< 보 기 >

ㄱ. $3\overline{AP} + 2\overline{BQ} = 2$
 ㄴ. $\overline{QR} = \sqrt{3} \times \overline{AP}$
 ㄷ. 삼각형 PBQ의 외접원의 넓이가 삼각형 CRQ의 외접원
 의 넓이의 2배일 때, $\overline{AP} = \frac{\sqrt{21}-3}{6}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 삼각형의 넓이

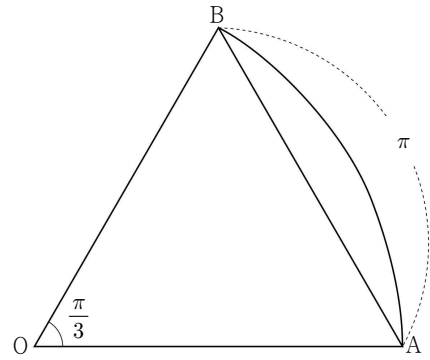
삼각형 ABC에 대하여 각 A의 대변을 a , 각 B의 대변을 b , 각 C의 대변을 c 라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 S 라 할 때 다음이 성립한다.

$$S = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \times c \times a \times \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin C$$

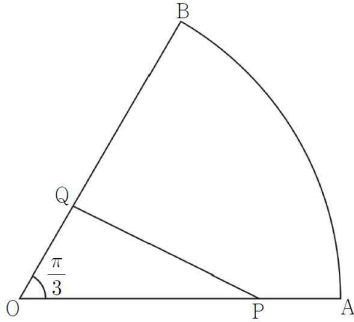
26. 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB의 호의 길이가 π 일 때, 삼각형 OAB의 넓이는? [3점]
(2019년 고2 11월 교육청 가형 10번)



- ① $2\sqrt{3}$ ② $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ④ $\frac{11\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

27. $\overline{AB} = 15$ 이고 넓이가 50인 삼각형 ABC에 대하여 $\angle ABC = \theta$ 라 할 때 $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 이다. 선분 BC의 길이를 구하시오. [3점]
(2019년 고2 11월 교육청 나형 25번)

28. 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB에서 선분 OA를 3:1로 내분하는 점을 P, 선분 OB를 1:2로 내분하는 점을 Q라 하자. 삼각형 OPQ의 넓이가 $4\sqrt{3}$ 일 때 호 AB의 길이는? [3점]
 (2020년 고3 4월 교육청 가형 10번)

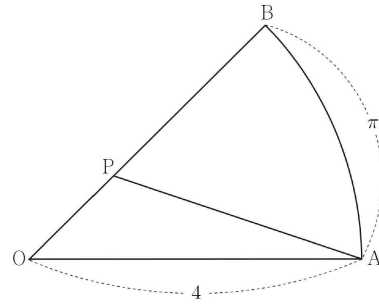


- ① $\frac{5}{3}\pi$
- ② 2π
- ③ $\frac{7}{3}\pi$
- ④ $\frac{8}{3}\pi$
- ⑤ 3π

29. $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=\sqrt{7}$ 인 예각삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{6}$ 이다.
 $\angle A = \theta$ 일 때, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ 의 값은? [3점]
 (2020년 고3 7월 교육청 가형 7번)

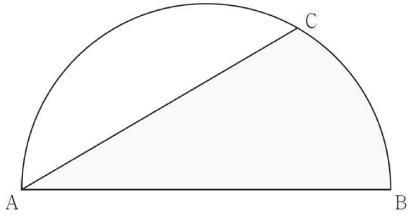
- ① $\frac{\sqrt{3}}{7}$
- ② $\frac{2}{7}$
- ③ $\frac{\sqrt{5}}{7}$
- ④ $\frac{\sqrt{6}}{7}$
- ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

30. 그림과 같이 반지름의 길이가 4, 호의 길이가 π 인 부채꼴 OAB가 있다. 부채꼴 OAB의 넓이를 S, 선분 OB 위의 점 P에 대하여 삼각형 OAP의 넓이를 T라 하자. $\frac{S}{T} = \pi$ 일 때, 선분 OP의 길이는? (단, 점 P는 점 O가 아니다.) [4점]
 (2020년 고2 11월 교육청 14번)



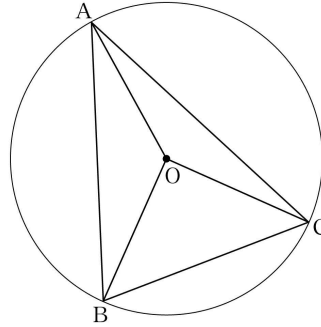
- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ② $\frac{3}{4}\sqrt{2}$
- ③ $\sqrt{2}$
- ④ $\frac{5}{4}\sqrt{2}$
- ⑤ $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

31. 그림과 같이 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C가 있다. 호 CB의 길이가 2π 일 때, 두 선분 AB, AC와 호 CB로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]
 (2020년 교3 4월 교육청 나형 17번)



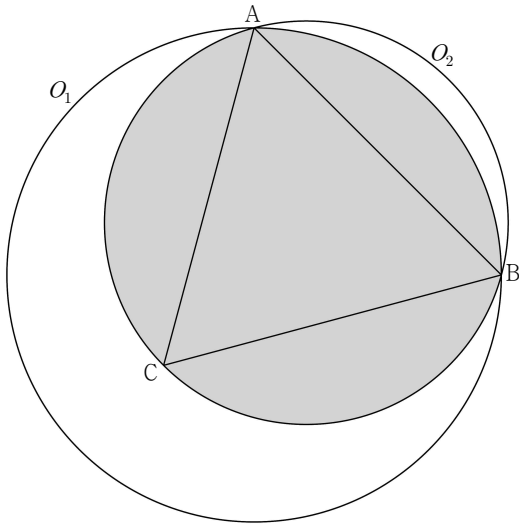
- ① $5\pi + 9\sqrt{3}$ ② $5\pi + 10\sqrt{3}$ ③ $6\pi + 9\sqrt{3}$
- ④ $6\pi + 10\sqrt{3}$ ⑤ $7\pi + 9\sqrt{3}$

32. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC에 대하여 두 삼각형 OAB, OCA의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 하자. $3S_1 = 4S_2$ 이고 $\overline{BC} = 2\sqrt{5}$ 일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]
 (2020년 교3 3월 교육청 가형 19번)



- ① $2\sqrt{7}$ ② $\sqrt{30}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{34}$ ⑤ 6

33. 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 원 O_1 이 있다. 원 O_1 위에 서로 다른 두 점 A, B를 $\overline{AB}=6\sqrt{2}$ 가 되도록 잡고, 원 O_1 의 내부에 점 C를 삼각형 ACB가 정삼각형이 되도록 잡는다. 정삼각형 ACB의 외접원을 O_2 라 할 때, 원 O_1 과 원 O_2 의 공통부분의 넓이는 $p+q\sqrt{3}+r\pi$ 이다. $p+q+r$ 의 값을 구하시오. (단, p, q, r 는 유리수이다.) [4점]
 (2019년 고2 9월 교육청 나형 29번)



34. $\overline{AB}=5, \overline{BC}=7, \overline{AC}=6$ 인 삼각형 ABC가 있다. 두 선분 AB,

AC 위에 삼각형 ADE의 외접원이 선분 BC에 접하도록 점 D, E를 각각 잡을 때, 선분 DE의 길이의 최솟값은? [5점]

(2021학년도 경찰대학 20번)

- ① $\frac{64}{15}$
- ② $\frac{81}{20}$
- ③ 4
- ④ $\frac{121}{30}$
- ⑤ $\frac{144}{35}$

[빠른 정답]

- 1번: ⑤
- 2번: ⑤
- 3번: 21
- 4번: ④
- 5번: ③
- 6번: ③
- 7번: ①
- 8번: 50
- 9번: ②
- 10번: ②
- 11번: ⑤
- 12번: ②
- 13번: ①
- 14번: 25
- 15번: ⑤
- 16번: ④
- 17번: ②
- 18번: ①
- 19번: 20
- 20번: ①
- 21번: ②
- 22번: 192
- 23번: 26
- 24번: 63
- 25번: ④
- 26번: ②
- 27번: 10
- 28번: ④
- 29번: ⑤
- 30번: ③
- 31번: ③
- 32번: ③
- 33번: 13
- 34번: ⑤