지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00037927032

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

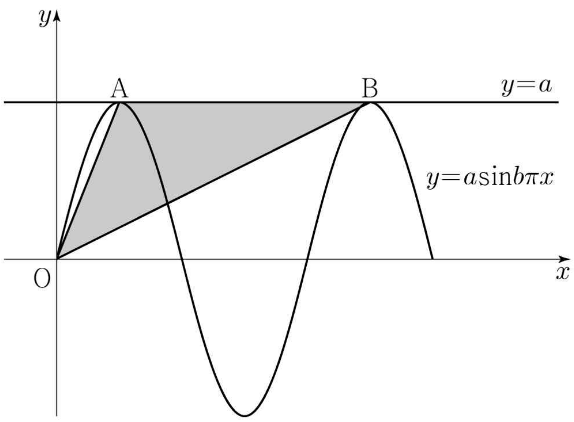
https://atom.ac/books/8588

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex
공통

1. 두 양수 a, b에 대하여 곡선 $y=a\sin b\pi x\left(0\le x\le \frac{3}{b}\right)$이 직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.) 〔2022학년도 9월 10〕

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

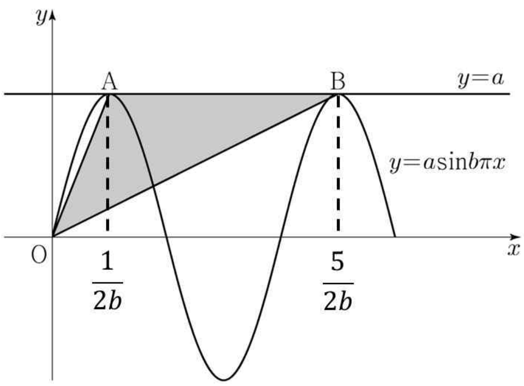


1. 정답 ③〔2022학년도 9월 10〕

1) 그림 있으면 그림 보면서, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

a, b가 양수인데 $y=a\sin b\pi x\left(0\le x\le\dfrac{3}{b}\right)$이 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B랍니다. 일단 $y=a$는 $y=a\sin b\pi x\left(0\le x\le\dfrac{3}{b}\right)$의 최댓값이죠? 그림에도 나와 있구요. 이때 삼각형 OAB의 넓이가 5이고 OA의 기울기와 OB의 기울기의 곱이 $\dfrac{5}{4}$이라네요. $a+b$를 구하래요. 천천히 가보면 되겠네요.

일단 함수가 있으니까 관찰부터 해봅시다. 아까 살펴본대로 최댓값은 a이고 주기는 $\dfrac{2}{b}$인 함수입니다. 그러면



이렇게 되겠죠? 값을 집어 넣으면 되겠어요.

일단 삼각형 OAB의 넓이가 5였잖아요? 밑변은 $\dfrac{5}{2b}-\dfrac{1}{2b}=\dfrac{2}{b}$이고 높이는 a입니다. 따라서

$\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{2}{b}=\dfrac{a}{b}=5$이네요. $a=5b$입니다.

그리고 OA의 기울기와 OB의 기울기의 곱이 $\dfrac{5}{4}$입니다. 그림을 보면 OA의 기울기는 $\dfrac{\frac{a}{1}}{\frac{1}{2b}}=2ab$이고 OB의 기울기는 $\dfrac{\frac{a}{1}}{\frac{5}{2b}}=\dfrac{2ab}{5}$이네요. 곱하면 $\dfrac{4}{5}a^2b^2=20b^4=\dfrac{5}{4}$입니다. $b^4=\dfrac{1}{16}$이고 $b^2=\dfrac{1}{4}$인데 b는 양수니까

$b=\dfrac{1}{2}$이네요. $a=\dfrac{5}{2}$입니다. $a+b=3$이네요. 답은 ③번입니다.

2. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x) = 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(1) = \int_0^1 f(t)dt$일 때, $a + f(3)$의 값은?
(단, a는 상수이다.) 〔2022학년도 9월 11〕

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

2. 정답 ④ 〔2022학년도 9월 11〕

1) 항등식은 수치대입, 계수비교, 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)dt$랍니다. 일단 이 식은 항등식이에요. 모든 실수 x에 대하여 양변이 같으니까요. 그렇다는 건 어떤 x값을 넣어도 양변이 같아야 한다는 거죠. 거기에 좌변은 $xf(x)$입니다. 항상 의심을 해야 해요. 왜 하필 $xf(x)$일까요? 뭔가 $x=0$을 넣어서 양변을 0으로 만들어보고 싶어지지 않나요? $x=0$을 넣으면 $0=3a+\int_1^0 f(t)dt$입니다.

$\int_1^0 f(t)dt=-\int_0^1 f(t)dt$이니까 결국 $\int_0^1 f(t)dt=3a$이네요.

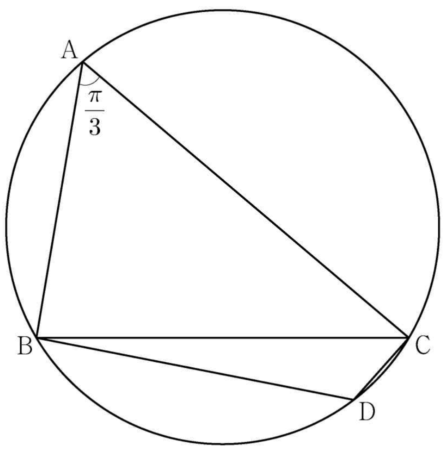
그리고 우변에는 $\int_1^x f(t)dt$가 있어요. 이것도 의심을 해보자면 $x=1$을 넣어 0으로 만들어보고 싶어지지 않나요? 넣어보면 $f(1)=4a+2$입니다.

그리고 미분도 해보면 $xf'(x)+f(x)=6x^2+2ax+f(x)$이고 $xf'(x)=6x^2+2ax$이니까
$f'(x)=6x+2a$입니다.

이때 $f(1)=\int_0^1 f(t)dt$이라네요. 다 나왔네요! $3a=4a+2$이고 $a=-2$입니다. 이제 $a+f(3)$를 구해야 해요.
그러면 우리가 구한 $f'(x)=6x+2a$를 적분해서 구해야겠네요. $f(x)=3x^2-4x+C$인데
$f(1)=4a+2=-6$이니까 $C=-5$이고 $f(x)=3x^2-4x-5$입니다. $f(3)=10$이니까
$a+f(3)=-2+10=8$입니다. 답은 ④번이네요.

3. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$ 인 원에 내접하고 $\angle A = \frac{\pi}{3}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 일 때, $\overline{BD} + \overline{CD}$ 의 값은?
〔2022학년도 9월 12〕

① $\frac{19}{2}$　　② 10　　③ $\frac{21}{2}$　　④ 11　　⑤ $\frac{23}{2}$



3. 정답 ② 〔2022학년도 9월 12〕

1) 그림 있으면 그림 보면서, 외부

반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A = \frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC이 있답니다. $\angle A = \frac{\pi}{3}$는 그림에 표시되어 있네요. 이때 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때 $\overline{BD} + \overline{CD}$를 구하라네요.

일단 원에 내접하고 있는 걸 보자마자 사인법칙을 사용할 준비는 하고 있어야겠죠? 사인법칙을 사용하면 $\overline{BC}$는 구할 수 있겠어요. 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2r = 4\sqrt{7}$인데 $\sin A = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이니까 $\overline{BC} = 2\sqrt{21}$입니다.

근데 사인법칙을 또다시 사용해서 $\overline{BD}$를 구할 수 있네요. 삼각형 BCD 또한 원에 내접하고 있으니까요. 거기에 $\sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$라는 사인값도 줬잖아요. 따라서 $\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)} = 2r = 4\sqrt{7}$이고 $\overline{BD} = 8$입니다.

2) 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각

이렇게 되면 삼각형 BCD는 결정되었습니다. $\overline{BC} = 2\sqrt{21}$와 $\overline{BD} = 8$를 알고 $\sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$를 아니까 두 변의 길이와 한 각이 나왔죠. 그러면 코사인법칙으로 나머지 한 변의 길이인 $\overline{CD}$를 구할 수 있겠어요.

일단 코사인값부터 구해야겠죠? $\sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$와 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$를 이용해서 $\cos(\angle BCD)$를 구해봅시다. $\cos^2(\angle BCD) = \frac{3}{7}$인데 $\angle BCD$는 그림에서 예각이므로 $\cos(\angle BCD) = \frac{\sqrt{21}}{7}$입니다.

그러면 코사인법칙에 의하여 $\cos(\angle BCD) = \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{(2\sqrt{21})^2 + \overline{CD}^2 - 8^2}{2 \times 2\sqrt{21} \times \overline{CD}}$입니다. $\overline{CD} = k$라 하면

$12\overline{CD} = \frac{20 + \overline{CD}^2}{}$ $k^2 - 12k + 20 = (k-2)(k-10) = 0$인 거예요. 그림에서 $\overline{CD}$는 $\overline{BD}$보다 작으므로 $\overline{CD} = 2$이네요. 따라서 $\overline{BD} + \overline{CD} = 10$입니다. 답은 ②번이네요.

4. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은?
〔2022학년도 9월 13〕

(가) $\lvert a_m \rvert = \lvert a_{m+3} \rvert$인 자연수 m이 존재한다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

① 44　② 48　③ 52　④ 56　⑤ 60

4. 정답 ② 〔2022학년도 9월 13〕

1) 등차수열 $a_n = a+(n-1)d$ (a는 첫항, d는 공차)로 놓기, 조건해석

첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열이 있답니다. 구하라는 게 자연수 d이니까 d는 자연수여야 하네요.
그럼 바로 $a_n = -45 + d(n-1)$ (d는 자연수)라고 할게요.

이때 (가)조건에서 $|a_m| = |a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한답니다. 일단 지금 구조가 -45부터 시작해서 n이 증가할수록 점점 a_n의 값이 증가하는 형태잖아요? 그러면 언젠가는 양수가 되는 지점도 있겠죠. a_m과 a_{m+3}이 모두 양수라고 생각해보세요. 무조건 a_m은 a_{m+3}보다 작아요. 왜냐면 공차가 자연수라 n이 증가할수록 a_n의 값이 커지니까요. a_m과 a_{m+3}이 양수라면 $a_m = a_{m+3}$은 절대로 성립할 수 없어요. 이 둘이 모두 음수인 경우도 마찬가지죠.

따라서 a_m은 음수여야 하고 a_{m+3}은 양수여야 합니다. 따라서 $-a_m = a_{m+3}$이어야 하네요. 수를 넣어서 정리해보면 $45 - d(m-1) = -45 + d(m+2)$이고 $90 = d(2m+1)$입니다. d는 자연수죠? m도 자연수이구요.
그러면 자연수×자연수가 90이 되려면 1×90, 2×45, 3×30, 5×18, 6×15, 9×10 중 하나여야 하겠네요.
그런데 $2m+1$은 3 이상의 홀수니까 가능한 경우는 d와 $2m+1$ 순서대로
$(2,\ 45)$, $(6,\ 15)$, $(10,\ 9)$, $(18,\ 5)$, $(30,\ 3)$만 가능하네요.

(나)조건에서 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이랍니다. 그러니까 $\sum_{k=1}^{n} a_k$이 아무리 작아도 -100보다는 커야 한다는 거죠?

생각해봅시다. $\sum_{k=1}^{n} a_k$이 가장 작아지는 부분이 어디일까요? 마지막으로 음수가 되고 다음 항은 양수로 바뀌는 부분에서 $\sum_{k=1}^{n} a_k$이 가장 작아질 거예요. 음수를 더하면 가장 작아지는데 양수를 더하면 커지니까요. 그런데 아까 a_m이 음수이고 a_{m+3}이 양수라고 했었잖아요? 그러면 최소가 되는 부분은 m과 $m+2$ 사이에 있겠네요.

여기까지 생각하고 아까 구해놓은 케이스 별로 나눠서 해봅시다.

2) 케이스 분류

2-1) (2, 45)일 때

$d=2$이고 $m=22$이네요. 근데 이건 딱 봐도 아닐 것 같지 않나요? 시작이 -45인데 공차가 2면 a_3까지만 와도 더하면 벌써 값이 -100이 넘는데요?

2-2) (6, 15)일 때

$d=6$, $m=7$입니다. 이것도 뭔가... $a_1=-45$, $a_2=-39$, $a_3=-36$를 더하면 -100이 넘네요.

2-3) (10, 9)일 때

$d=10$, $m=4$입니다. 이건 확인해봐야겠네요. $a_1=-45$, $a_2=-35$, $a_3=-25$를 더하면 -100이 넘네요.

2-4) (18, 5)일 때

$d=18$, $m=2$입니다. 이건 되겠네요. $a_1=-45$, $a_2=-27$, $a_3=-9$, $a_4=9$이니까 아무리 작아도 -81이네요. 이건 됩니다! $d=18$ 하나 있네요.

2-5) (30, 3)일 때

$d=30$, $m=1$입니다. $a_1=-45$, $a_2=-15$, $a_3=15$이니까 아무리 작아도 -60이죠. 되네요. $d=30$도 됩니다.

따라서 모든 자연수 d의 합은 $18+30=48$입니다. 답은 ②번이네요.

5. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(0) & (x \le 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x > 0) \end{cases}$$

이라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
〔2022학년도 9월 14〕

<보 기>

ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1)=0$
ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.
ㄷ. $p \ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)dx \ge 0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 정답 ⑤ 〔2022학년도 9월 14〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p가 있는데

$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(0) & (x \le 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x>0) \end{cases}$ 라고 합니다. 일단 형태부터 관찰해볼까요?

최고차항의 계수가 1로 양수인 삼차함수가 $f'(0)=f'(2)=0$이니까 $x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소입니다. 그런데 $x \le 0$에서 $g(x)=f(x)-f(0)$이잖아요? $x=0$에서 극대였던 함수를 $-f(0)$만큼 움직이니까 $x=0$에서 접하는 그래프겠네요.

$x>0$에서 $g(x)=f(x+p)-f(p)$도 관찰해봅시다. 이거는 일단 $f(x)$를 x축의 방향으로 $-p$만큼 평행이동한 함수네요. 이때 p는 양수니까 무조건 왼쪽으로 움직여야 합니다. 그런데 이건 특이하게 $-f(-p)$만큼 움직인 게 아니라 $f(p)$만큼 움직인 함수에요. 그리고 $x=0$을 넣으면 $f(p)-f(p)=0$이 되니까 결국 해석해보면 $f(x)$를 x축의 방향으로 $-p$만큼 평행이동한 후 원점을 지나도록 움직인 함수네요. 거기에 $g(x)$는 연속이구요.

ㄱ에서 $p=1$일 때 $g'(1)=0$이냐고 물어보네요. $p=1$이면 $x>0$에서 $g(x)=f(x+1)-f(1)$이고 미분하면 $g'(x)=f'(x+1)$입니다. $g'(1)=f'(2)$인데 아까 $f'(2)=0$이라고 했었죠? 맞네요. ㄱ은 맞습니다.

2) 미분가능은 연속 확인 + 미분계수 확인

ㄴ에서 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1냐고 묻고 있어요. 일단 $x<0$과 $x>0$에서는 $g(x)$가 다항함수니까 무조건 미분가능합니다. 그 말은 $x=0$에서 미분가능한지만 확인해보면 된다는 거죠.

먼저 $x=0$에서 좌미분계수는 0입니다. $f(x)-f(0)$인데 $f'(0)=0$이니까요. 미분가능하기 위해서는 우미분계수도 0이어야 합니다. $g(x)=f(x+p)-f(p)$를 미분하면 $g'(x)=f'(x+p)$인데 우미분계수는 $g'(0)=f'(p)$이네요. 이게 0이어야 합니다.

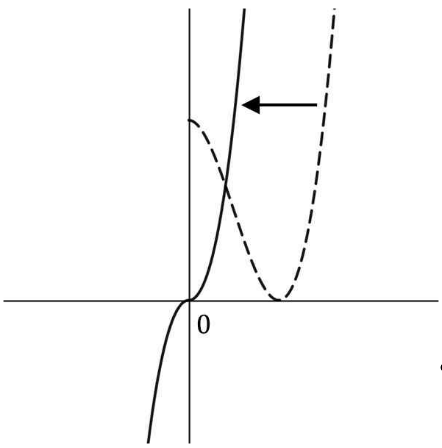
그런데 여러분 생각해보세요. $f'(0)=f'(2)=0$입니다. 삼차함수 $f(x)$의 도함수인 $f'(x)$는 이차함수에요. $f'(x)=0$의 서로 다른 실근은 2개를 넘을 수 없어요. 그 말은 $g'(0)=f'(p)=0$이 되기 위해서는 $p=0$ 혹은 $p=2$여야 한다는 거죠. 그런데 $p>0$이니까 $p=2$입니다. 1개 맞네요. ㄴ은 맞습니다.

그래프로 해석할 수도 있어요. 제가 아까 $g(x)=f(x+p)-f(p)$는 $f(x)$의 그래프를 왼쪽으로 평행이동시킨

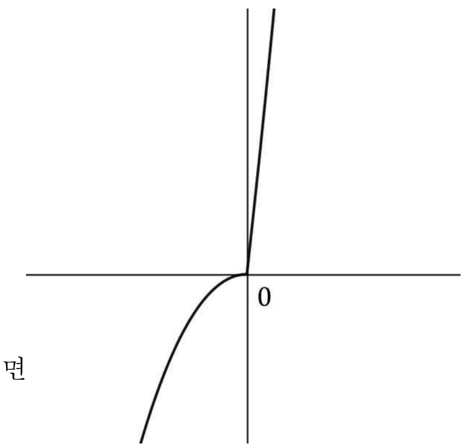
그래프라고 했습니다.(물론 $-f(p)$ 때문에 위아래로 움직일 수는 있어요.) $f(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서만 미분계수가 0이에요. $f(x)$를 왼쪽으로 움직여서 $x=0$에서 미분계수가 0이 되도록 하기 위해서는 $x=2$를 $x=0$ 쪽으로 옮겨와야 하죠. 따라서 2만큼 움직여야 하니까 $p=2$입니다.

3) ㄱㄴㄷ 유기성

ㄷ에서 $p \geq 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)dx \geq 0$이냐고 묻네요. 방금 $p=2$에 대하여 확인했었죠? $g(x)$가 미분가능하도록 하는 유일한 양수에요. 그러니까 $p=2$일 때를 그래프를 대충 그려보면

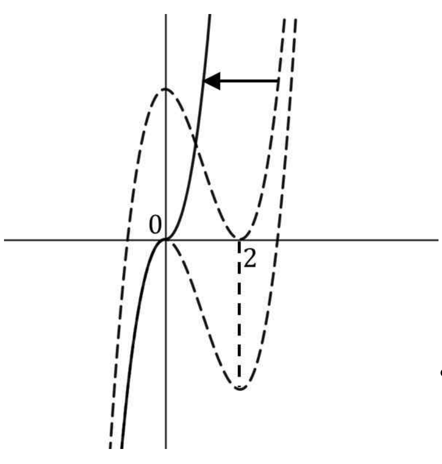


이렇게 될 텐데 만약 $p>2$가 되면



이렇게 되겠네요.

잘 생각해보세요. $p=2$일 때 원점을 기준으로 $g(x)$의 좌우는 완벽한 점 대칭이에요. 왜냐하면 $x \leq 0$에서는 $x \leq 0$ 부분의 $f(x)$를 짤라서 넣고 $x>0$에서는 $x>2$ 부분의 $f(x)$를 짤라서 넣었는데 삼차함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소일 때 $x=1$에서 변곡점을 가지잖아요. $(1,\ f(1))$에 대하여 대칭이 되니까 $x<0$ 부분과 $x>2$ 부분은 점 대칭이죠. 그걸 이어붙이면 당연히 이어붙인 점에 대하여 대칭입니다. 그림으로 살펴보면



이렇게 되는 거죠. 점 대칭인 함수를 $-k$부터 k까지 적분하면 값은

0입니다. $\int_{-k}^{k} g(x)dx = 0$인 거죠. 따라서 $\int_{-1}^{1} g(x)dx = 0$입니다.

그런데 $p > 2$일 때는 그래프가 더 왼쪽으로 평행이동되죠. 그림에서도 나와 있듯이 기울기가 더욱 가팔라져요. 그러면 $\int_{0}^{1} g(x)dx$의 값이 $\int_{-1}^{0} g(x)dx$값보다 더욱 커지겠죠? $p = 2$일 때 $\int_{-1}^{0} g(x)dx = -\int_{0}^{1} g(x)dx$이었는데 $p > 2$가 되면서 $\int_{-1}^{0} g(x)dx$는 그대로인데 $\int_{0}^{1} g(x)dx$의 값이 더 커지니까요. 양수 부분이 더 커지니까 더한 값은 당연히 0보다 크거나 같겠네요. ㄷ은 맞습니다. 맞는 건 ㄱ, ㄴ, ㄷ이고 답은 ⑤번이네요.

6. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\dfrac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\dfrac{1}{2} \le a_n \le \dfrac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\dfrac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? 〔2022학년도 9월 15〕

① $\dfrac{9}{2}$　② 5　③ $\dfrac{11}{2}$　④ 6　⑤ $\dfrac{13}{2}$

6. 정답 ① 〔2022학년도 9월 15〕

1) 자연수 보이면 숫자 넣기

$|a_1| \le 1$, 즉 $-1 \le a_1 \le 1$이고 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$ 랍니다.

숫자 넣을 준비를 해야겠죠?

그리고는 $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하랍니다.

일단 단계가 3개가 있네요. a_5를 저 식에 넣으면 a_6이 나오죠. a_5는 어느 곳에 속할까요? 그에 따라서 a_6의 값이 달라지겠네요. 그리고 $a_5 + a_6 = 0$에 넣으면 각각의 값이 나올 거구요.

2) 케이스분류

2-1) $-1 \le a_5 < -\frac{1}{2}$일 때

그러면 $a_6 = -2a_5 - 2$입니다. 이걸 $a_5 + a_6 = 0$에 넣으면 $a_5 - 2a_5 - 2 = 0$이고 $a_5 = -2$입니다. 범위에 맞지 않는데요?

2-2) $-\frac{1}{2} \le a_5 \le \frac{1}{2}$일 때

그러면 $a_6 = 2a_5$입니다. $a_5 + a_6 = 0$에 넣으면 $a_5 = 0$이네요. 되네요!

2-3) $\frac{1}{2} < a_5 \le 1$일 때

이러면 $a_6 = -2a_5 + 2$입니다. $a_5 + a_6 = 0$에 넣으면 $a_5 - 2a_5 + 2 = 0$이고 $a_5 = 2$입니다. 이것도 범위에 맞지 않네요. 따라서 $a_5 = 0$입니다.

그 이후에는 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$가 되도록 만들어야겠죠? 그러면 거꾸로 가야겠어요.

저 위의 식에 $n=4$를 넣으면 $a_5=0=\begin{cases} -2a_4-2 & \left(-1\le a_4<-\frac{1}{2}\right) \\ 2a_4 & \left(-\frac{1}{2}\le a_4\le\frac{1}{2}\right) \\ -2a_4+2 & \left(\frac{1}{2}<a_4\le 1\right)\end{cases}$ 가 나옵니다. 이러면 케이스가 또 나뉘죠. 3개 각각의 경우에 대하여 $a_4=-1$, $a_4=0$, $a_4=1$이 가능하네요. 그리고 여기에 대하여 각각 또 가능하니까..... 경우가 엄청 많네요.

근데 생각 한 번만 해볼게요. 만약 $a_4=-1$이라면 $a_3=-\frac{1}{2}$만 가능합니다. 그러면 $a_2=-\frac{3}{4}$이거나 $a_2=-\frac{1}{4}$이구요. $a_2=-\frac{3}{4}$이라면 $a_1=-\frac{5}{8}$이거나 $a_1=-\frac{3}{8}$이고 $a_2=-\frac{1}{4}$이라면 $a_1=-\frac{7}{8}$이거나 $a_1=-\frac{1}{8}$입니다. 모두 더하면 무조건 음수가 되죠? $a_4=-1$일 수는 없어요.

그러면 $a_4=0$이거나 $a_4=1$이에요. 그런데 $a_4=0$이면 또다시 $a_3=-1$, $a_3=0$, $a_3=1$일텐데 $a_3=-1$은 안 되겠죠? 양상이 $a_4=-1$일 때와 같을 테니까요. 이건 케이스를 나눠볼게요.

3) 케이스분류

3-1) $a_4=0$일 때

3-1-1) $a_3=0$일 때

이것도 또다시 $a_2=-1$, $a_2=0$, $a_2=1$로 나뉩니다. 아까와 마찬가지의 이유로 $a_2=-1$는 안 됩니다.

3-1-1-1) $a_2=0$일 때

$a_1=-1$, $a_1=0$, $a_1=1$ 이렇게 가능한데 $\sum_{k=1}^{5}a_k>0$이려면 무조건 $a_1=1$이어야 하네요. $-1\le a_1\le 1$이고 $\sum_{k=1}^{5}a_k>0$도 맞습니다. $a_1=1$은 되네요.

3-1-1-2) $a_2=1$일 때

$a_1=\frac{1}{2}$이네요. $-1\le a_1\le 1$에도 맞구요. $\sum_{k=1}^{5}a_k>0$도 맞습니다.

3-1-2) $a_3 = 1$일 때

$a_2 = \frac{1}{2}$입니다. 이러면 $a_1 = \frac{1}{4}$이거나 $a_1 = \frac{3}{4}$인데 둘 다 $-1 \leq a_1 \leq 1$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$맞죠? 둘 다 됩니다.

3-2) $a_4 = 1$일 때

$a_3 = \frac{1}{2}$입니다. 이러면 $a_2 = \frac{1}{4}$이거나 $a_2 = \frac{3}{4}$이네요. 이건 둘 다 케이스를 나눠야겠어요.

3-2-1) $a_2 = \frac{1}{4}$일 때

$a_1 = \frac{1}{8}$이거나 $a_1 = \frac{7}{8}$입니다. 둘 다 $-1 \leq a_1 \leq 1$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이네요.

3-2-2) $a_2 = \frac{3}{4}$일 때

$a_1 = \frac{3}{8}$이거나 $a_1 = \frac{5}{8}$입니다. 둘 다 조건을 만족합니다!

따라서 모든 a_1의 값의 합은 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{7}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{9}{2}$입니다. 답은 ①번이네요.

7. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. 〔2022학년도 9월 20〕

7. 정답 21 〔2022학년도 9월 20〕

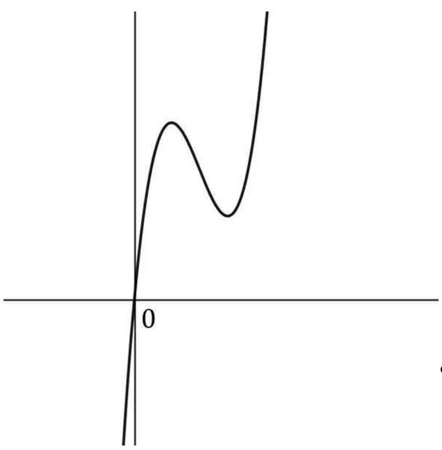
1) 절댓값 풀기, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$가 있는데 $f(x)+|f(x)+x|=6x+k$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 정수 k의 값의 합을 구하랍니다.

일단 식에 절댓값이 있으니까 풀어봅시다. $f(x)+x\geq 0$이라면 $2f(x)=5x+k$이고 $f(x)+x<0$이라면 $-x=6x+k$인데 이건 $x=-\frac{k}{7}$이라는 실근이 하나 있네요. 그러면 나머지 3개는 $f(x)+x\geq 0$인 경우에서 살펴보면 되겠어요.

일단 $f(x)+x=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+11x$입니다. 관찰부터 해볼게요. 인수분해부터 해보면 $\frac{x}{2}(x^2-9x+22)$인데 $x^2-9x+22$는 편하게는 안 되네요. 혹시 모르니까 판별식을 써봅시다. $9^2-88=-7$로 0보다 작네요. 아예 근을 갖지 않네요.

대충 그래프를 그려볼까요? 미분하면 $\frac{3}{2}x^2-9x+11=\frac{1}{2}(3x^2-18x+22)$인데 근의 공식을 사용하면 $\frac{9\pm\sqrt{9^2-66}}{3}=\frac{9\pm\sqrt{15}}{3}$입니다. 대충 그려보면

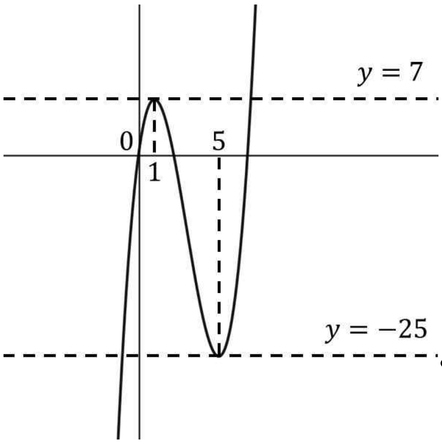


이렇게 되네요. $f(x)+x\geq 0$가 되는 부분은 $x\geq 0$입니다. 어쨌든 $x\geq 0$에서 $2f(x)=5x+k$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되면 되는 거예요.

2) 미지수 넘기기, 정수 보이면 숫자 넣기

일단 미지수만 오른쪽에 두고 다 왼쪽으로 넘겨서 정리해봅시다. $x^3-9x^2+15x=k$입니다. 이게 3개의 실근을 가져야 한다는 건 다르게 말하면 $y=x^3-9x^2+15x$와 $y=k$가 3개의 점에서 만나야 한다는 거죠. 그래프 그려서 확인해봅시다. $x^3-9x^2+15x=x(x^2-9x+15)$인데 편하게 되지는 않네요. 미분하면

$3x^2-18x+15=3(x^2-6x+5)=3(x-1)(x-5)$이니까 $x=1$에서 극대, $x=5$에서 극소입니다. 극댓값은 7이고 극솟값은 -25입니다. 그래프를 그려보면

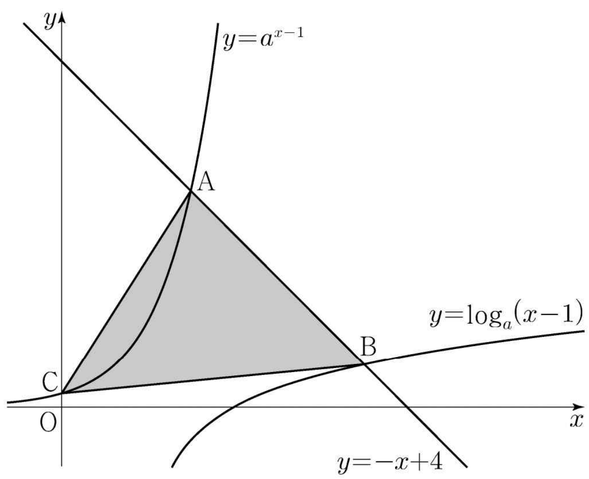


이렇게 됩니다. $x \ge 0$에서 $y=k$와 3개의 점에서 만나는데 k가 0부터 6까지 가능하네요. 다만 $k=0$이라면 아까 $x=-\frac{k}{7}$랑 하나가 겹치지 않나요? 그러면 실근의 개수가 3개가 돼요. 따라서 1부터 6까지 가능하고 다 더하면 21입니다.

8. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\quad y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. 〔2022학년도 9월 21〕



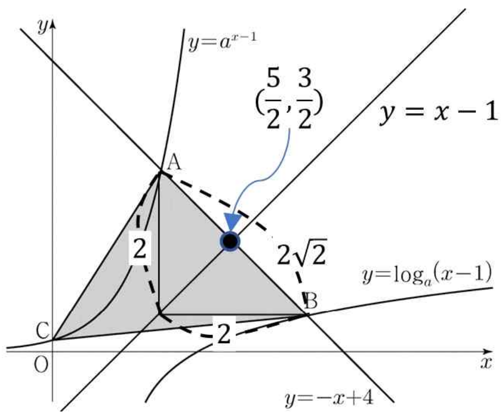
8. 정답 192 〔2022학년도 9월 21〕

1) 그림 있으면 그림 보면서, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$a>1$인데 $y=-x+4$가 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$과 만나는 점을 각각 A, B라고 한답니다. 그림에 표시되어 있죠?

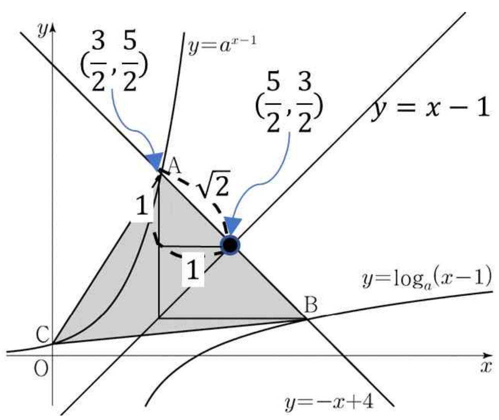
이거 함수를 보면 대칭 관계라는 걸 확인할 수 있네요. $y=a^x$와 $y=\log_a x$는 서로 $y=x$축 대칭 관계잖아요? 그런데 이 두 함수 모두 x 자리에 $x-1$이 들어가 있으니까 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$는 $y=x-1$축 대칭이죠. 그러면 $y=x-1$과 $y=-x+4$가 만나는 점은 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$겠네요.

거기에 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$랍니다. 지금 $y=-x+4$의 기울기는 -1이잖아요? 그러면



이렇게 되겠네요.

그런데 여기서 A, B 역시 $y=x-1$축에 대하여 대칭이니까 $y=x-1$, $y=-x+4$가 만나는 점과 A와의 거리는 $y=x-1$, $y=-x+4$가 만나는 점과 B와의 거리와 같죠. $\sqrt{2}$입니다. 그럼 이것도 마찬가지로



이렇게 됩니다. 따라서 A의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$입니다.

$y=a^{x-1}$이 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$를 지나니까 $a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$이고 $a=\frac{25}{4}$이네요.

이제 삼각형 ABC의 넓이를 구해야 해요. 이거는 밑변을 $\overline{\mathrm{AB}}$를 고정시킨 후에 기울기가 1이고 점 C를 지나는 직선이 $y=-x+4$와 만나는 점과 C와의 거리를 높이로 해서 구하면 되겠죠?

일단 C의 좌표는 $y=\left(\frac{25}{4}\right)^{x-1}$가 y축과 만나는 점이니까 $\left(0,\ \frac{4}{25}\right)$입니다. 기울기가 1이고 점 C를 지나는 직선은 $y=x+\frac{4}{25}$이구요. $y=-x+4$와 만나는 점은$\left(\frac{48}{25},\ \frac{52}{25}\right)$입니다. $\left(\frac{48}{25},\ \frac{52}{25}\right)$과 $\left(0,\ \frac{4}{25}\right)$의 거리는 $\frac{48\sqrt{2}}{25}$이죠. 아까 기울기가 1일 때는 x값(혹은 y값)의 차이에 $\sqrt{2}$를 곱했잖아요. 따라서 $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{48\sqrt{2}}{25}=\frac{96}{25}=S$입니다. $50S=192$이네요.

9. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.
〔2022학년도 9월 22〕

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

9. 정답 108 〔2022학년도 9월 22〕

1) 문제해석

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 있는데 $g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$ 랍니다.

어후;; 뭔가 숨이 턱 막히네요. 천천히 해석을 해봅시다.

일단 $g(x)$라는 함수가 있는데 $f(x-3)$라는 $f(x)$를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 함수와 $\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$ 라는 함수를 곱한 함수예요. $\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$ 를 해석해야겠죠?

일단 $F(x)=|f(x)|$라는 함수가 있다고 해봅시다. 그러면 $\lim_{h\to 0+}\frac{F(x+h)-F(x-h)}{h}$ 이죠? 자주 나오는 패턴이에요. $F(x)$를 더하고 빼면 $\lim_{h\to 0+}\frac{F(x+h)-F(x)-(F(x-h)-F(x))}{h}$ 입니다. 분리하면 $\lim_{h\to 0+}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\lim_{h\to 0+}\frac{F(x-h)-F(x)}{h}$ 이네요. 왼쪽에 있는 식은 $F'(x+)$입니다. $F(x)=|f(x)|$의 x보다 큰 부분에서의 미분계수이죠. 오른쪽에 있는 식은 변형이 필요하겠어요. $h=-t$라고 할게요. 그러면 $\lim_{t\to 0-}\frac{F(x+t)-F(x)}{-t}=-F'(x-)$입니다. 이거는 $F(x)=|f(x)|$의 x보다 작은 부분에서의 미분계수입니다. 결국 $g(x)=f(x-3)\times(F'(x+)+F'(x-))$이네요. 이런 요상한 함수가 있어요.

2) 조건해석, 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인, 절댓값 함수

(가)조건에서 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이랍니다. 아까 우리가 파악한 함수를 보세요. $g(x)=f(x-3)\times(F'(x+)+F'(x-))$인데 $F(x)=|f(x)|$는 $f(x)$에 절댓값을 씌운 형태에요. $F'(x+)$는 $F(x)=|f(x)|$의 x보다 큰 부분에서의 미분계수였고, $F'(x-)$는 $F(x)=|f(x)|$의 x보다 작은 부분에서의 미분계수였구요.

일반적인 다항함수라면 x보다 큰 부분에서의 미분계수와 x보다 작은 부분에서의 미분계수가 일치하지 않나요? 매끄럽게 이어지니까요. 그런데 아까 말했듯이 $F(x)=|f(x)|$는 $f(x)$에 절댓값을 씌운 형태에요. 두 개가 일치하지 않는 경우가 발생하죠. x축과 접하지 않고 만나면 꺾이면서 미분불가능이 되잖아요. 그 경우만 왼쪽과 오른쪽의 미분계수의 부호가 정확히 반대가 됩니다.

그 말은 결국 $F(x)=|f(x)|$의 함숫값이 0이 아니라면 무조건 $F'(x+)=F'(x-)=k$가 되어 $g(x)=2kf(x-3)$가 된다는 거예요. 또한 $f'(x)=0$이라면 그 또한 $F'(x+)=F'(x-)=k=0$가 되어

$g(x)=2kf(x-3)=0$이 됩니다.

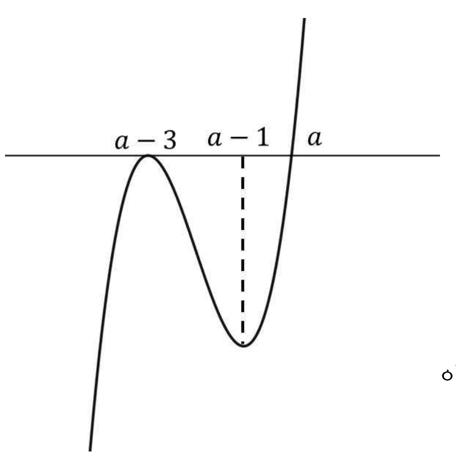
그 이외의 경우, 즉 $F(x)=|f(x)|$의 함숫값이 0이지만($f(x)=0$이지만) $f'(x)\neq 0$인 경우, 즉 x축에 접하지는 않는 경우에는 미분계수의 부호가 반대가 됩니다. $F'(x+)+F'(x-)=0$이고 $g(x)=0$이 됩니다.

그러면 $g(x)$가 바뀌는 경계는 $f(x)$의 함숫값이 0이지만 x축에 접하지는 않는 부분과 $f'(x)=0$인 부분이네요. 그 때는 $g(x)=0$이 되고, 그 이외의 경우에는 $g(x)=2kf(x-3)$이 되니까요. 이게 값이 같아야 해요. 따라서 $f(x)=0$, $f'(x)\neq 0$일 때는 $2kf(x-3)=0$, 즉 $f(x-3)=0$이어야 합니다.

이제 최고차항의 계수가 양수이고 삼차함수인 $f(x)$의 그래프를 생각해보세요. $f(x)$가 x축과 단 한 번만 만날 때는 $f(x)=0$, $f(x-3)=0$을 동시에 만족시킬 수 없죠?

$f(x)$가 x축과 세 번 만날 때는 x축과 만나는 모든 x가 $f(x)=0$, $f'(x)\neq 0$를 만족시킵니다. 그래프 생각해보세요. x축과 만나지만 접하진 않고 그냥 뚫고 지나가잖아요. 3개의 실근 모두가요. 그런데 x축과 만나는 가장 작은 x값에 대하여는 $f(x)=0$, $f(x-3)=0$가 성립할 수 없습니다. 예를 들어 가장 작은 값이 a이면 $f(a)=0$인데 어떻게 $f(a-3)=0$가 되어서 가장 작은 값이 $a-3$가 됩니까.

따라서 $f(x)$의 그래프는 한 점에서는 그냥 x축과 만나고 한 점에서는 접하는 그래프가 되어야 합니다. 물론 두 점의 x값의 차이는 3이어야겠죠? 그리고 그냥 x축과 만나는 점의 x좌표를 a라 하면 접하는 점에서의 x좌표는 $a-3$이 되어야 합니다.



이렇게 말이죠.

(나)조건에서 $g(x)=0$의 네 실근의 합은 7이 되어야 한답니다. 일단 $g(x)=0$이 되려면 어떻게 해야 하나요? 두 경우로 나눠서 생각해봅시다. $f(x)$의 함숫값이 0이지만 x축에 접하지는 않는다면 $g(x)=0$입니다. 이건 그냥 되네요. 위의 그림에서 $x=a$가 가능하죠? 일단 하나 나왔어요. 또한 $f'(x)=0$이어도 $g(x)=0$이죠?

그림에서 $a-3$, $a-1$이 있네요.

그리고 그 이외의 경우에는 $g(x)=2kf(x-3)$입니다. 이게 0이려면 $k=0$이거나 $f(x-3)=0$이어야 합니다. $k=0$은 곧 $f'(x)=0$이라는 거잖아요? 아까 했네요. 그리고 $f(x-3)=0$이려면 $x=a$, $a+3$이어야 하죠. 그런데 $x=a$는 아까 경우랑 겹치니까 빼면 $a-3$, $a-1$, a, $a+3$으로 총 4개네요. 모두 더하면 $4a-1$인데 이게 7이니까 $a=2$입니다.

3) 함수 구하기 - 인수정리

그림을 보면 $x=a-3=-1$에서 x축과 접하고 $x=2$에서 그냥 만나네요. 인수정리에 의하여 $f(x)=(x+1)^2(x-2)$입니다. $f(5)=108$이네요.