IMI 기하 한 장 정리

Ⅰ 이차곡선

‣ 포물선의 접선의 기울기와 접점이 각각 m과 (a, b)로 주어진 경우 포물선의 꼭짓점의 위치

① 대칭축이 x축과 평행한 경우: $y=2m(x-a)+b$ 위에 꼭짓점이 존재

② 대칭축이 y축과 평행한 경우: $y=\frac{m}{2}(x-a)+b$ 위에 꼭짓점이 존재

‣ 초점을 관통하는 직선과 포물선이 만나는 두 점에서의 접선은 직교하며, 교점은 준선 위에 존재한다.

‣ 초점을 관통하는 직선과 이차곡선이 만나는 두 점을 A, B라고 하면($\overline{AF}\le\overline{BF}$)

ⅰ. 포물선: $\frac{1}{p}=\frac{1}{\overline{AF}}+\frac{1}{\overline{BF}}$ ⅱ. 타원: $\frac{2a}{b^2}=\frac{1}{\overline{AF}}+\frac{1}{\overline{BF}}$

ⅲ. 쌍곡선

① 같은 쪽 곡선에 A와 B가 존재하는 경우: $\frac{2a}{b^2}=\frac{1}{\overline{AF}}+\frac{1}{\overline{BF}}$

② 서로 다른 쪽 곡선에 A와 B가 존재하는 경우: $\frac{2a}{b^2}=\frac{1}{\overline{AF}}-\frac{1}{\overline{BF}}$

‣ 포물선이 $A(a,0)B(b,0),P(x,y)$를 지나는 경우 꼭짓점의 좌표(a<b) : $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{(b^2-a^2)y}{4(x-a)(x-b)}\right)$

‣ 타원의 접점과 타원의 중심을 잇는 직선의 기울기를 m, 접선의 기울기를 n이라 두면 $mn=-\frac{b^2}{a^2}$

‣ 쌍곡선 위의 점 A에서 접선을 그어 $\overline{FF'}$과 교차하는 점을 B라고 하면 $\overline{AF}:\overline{AF'}=\overline{CF}:\overline{CF'}$

Ⅱ 평면 기하와 벡터

‣ 정점과 동점에서 다음 값이 최대(최소)를 갖게 하는 방법

$\overline{AP}+\overline{BP}$: A나 B 중 하나를 도형에 대해 대칭이동 시키기 혹은 이차곡선의 특징 활용하기

$a\overline{AP}^2+b\overline{BP}^2$: $\overline{AB}$를 b:a로 내분하는 점 Q에 대해 $\overline{PQ}$가 최대(최소)가 되는 P 찾기

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|$, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$: $\overline{AB}$의 중점 M에 대해 $\overline{MP}$가 최대(최소)가 되는 P 찾기

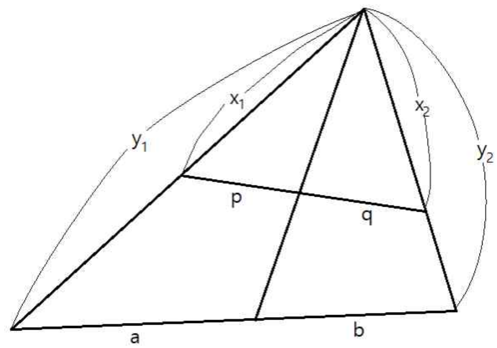
$\angle APB$: ΔAPB의 외접원의 반지름이 최대(최소)가 되는 P 찾기

‣ 평면 벡터를 쉽게 가공하는 법

① $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}$ ② $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

③ $\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AC}=0$일 때 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{C'B}$

‣ 메넬라오스의 정리: 오른쪽 그림에서 $p:q=a\frac{x_1}{y_1}:b\frac{x_2}{y_2}$이다.



Ⅲ 공간 기하

‣ 이면각 공식(4개의 점이 주어지고 한 점 O를 기준으로 각 AOB, AOC, BOC를 아는 경우)

$$\cos(\angle AOB)=\cos(\angle AOC)\cos(\angle BOC)+\sin(\angle AOC)\sin(\angle BOC)\cos\theta$$

(단, θ는 $\Delta AOC, \Delta BOC$를 포함하는 평면 간의 이면각)

‣ 이면각 공식 변형(3개의 평면이 만나는 상황)

$$\cos c=-\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\theta$$