제 3 교시

2022학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

공 통

성명	

수험번호							

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하시오.
○ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, '0'이 포함된 경우에는 '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.
○ 23번부터는 선택과목이니 자신이 선택한 과목(확률과 통계, 미적분, 기하)의 문제지인지 확인하시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

공　　　란

기출의 파급효과 수학

atom.ac/books/7608
기출의 파급효과 수학 시리즈

기출의 파급효과 영어

atom.ac/books/8503
기출의 파급효과 영어 시리즈

파급효과 수학 N제 기하

atom.ac/books/8737
파급효과 수학 N제 기하

기출의 파급효과 물리학1

atom.ac/books/8428
기출의 파급효과 물리학1

기출의 파급효과 사회・문화

atom.ac/books/8543
기출의 파급효과 사회・문화

파급의 기출효과

cafe.naver.com/spreadeffect
파급의 기출효과 NAVER 카페

기출의 파급효과 시리즈는 기출 분석서입니다.
기출의 파급효과 시리즈 과목에는 수학, 영어, 물리학 1, 사회・문화가 있습니다.

준킬러 이상 기출에서 얻어갈 수 있는 '꼭 필요한 도구와 태도'를 정리합니다.
'꼭 필요한 도구와 태도' 체화를 위해 관련도가 높은 준킬러 이상 기출을 바로바로 보여주며 체화 속도를 높입니다. 단시간 내에 점수를 극대화할 수 있도록 교재가 설계되었습니다.

학습하시다 질문이 생기신다면 '파급의 기출효과' 카페에서 질문을 할 수 있습니다.
교재 인증을 하시면 질문 게시판을 이용하실 수 있습니다.

마법사, 영감, 얀드브, 슬기롭다, 파급효과 등등 오르비 저자분들이 올리시는 학습자료를 받아보실 수 있습니다.
위 저자 분들의 컨텐츠 질문 답변도 교재 인증 시 가능합니다.

이외에도 **검증된 우수한 컨설팅 팀이 정리한 과거부터 현재까지 정시, 수시 입결을 확인할 수 있습니다.**
입시에 대한 질문은 가입하시기만 하면 팀장 및 팀원분들께 하실 수 있습니다.

더 궁금하시다면 https://cafe.naver.com/spreadeffect/15에서 확인하시면 됩니다.

1. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x + a}{x - 2} = b$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [2점]

-2

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = 3$

$a = -2$

$b = 3$

①

2. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3 = 1, \quad \frac{a_4 + a_5}{a_2 + a_3} = 4 \Rightarrow r^2 = 4$$

일 때, a_9 의 값은? [2점]

① 8 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 128

$a_9 = a_3 r^6 = 1 \times 4^3 = 64$

④

3. $\sum_{k=1}^{9} k(2k+1)$ 의 값은? [3점]

① 600 ② 605 ③ 610 ④ 615 ⑤ 620

$\sum_{k=1}^{9} 2k^2 + 45$

4

$= \frac{\overset{3}{\cancel{9}} \times 10 \times 19}{\cancel{3}} + 45$

$= 570 + 45 = 615$

4. 함수 $f(x)=x^3-4x^2+ax+6$ 에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h\times f(h)}=1$$

$f'(2) = f(0) = 6$

5

일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$f'(x) = 3x^2 - 8x + a$

$a - 4 = 6$

$a = 10$

5. 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=4x^3+ax$$

이고 $f(0)=-2$, $f(1)=1$일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

$f(x)=x^4+\frac{a}{2}x^2-2 = x^4+2x^2-2$

5

$1=\frac{a}{2}-1$ $a=4$

$f(2)=16+8-2=22$

6. $\sqrt[m]{64}\times\sqrt[n]{81}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 2 이상의 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

3

$2^{\frac{6}{m}}$ $3^{\frac{4}{n}}$

$3\times2=6$

$m=2, 3, 6$

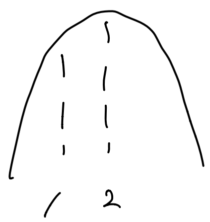
$n=2, 4$

7. 함수 $f(x)=\cos^2 x-4\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+3$의 최댓값은? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

④

$f(x) = c^2 + 4s + 3 = -s^2 + 4s + 4 \quad (-1 \le s \le 1)$

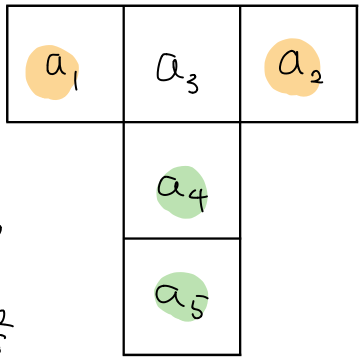


$s=1$ 일 때 최대

$-1+4+4=7$

$\log_a 2^1$ $\log_a 2^2$ $\log_a 2^3$ $\log_a 2^5$ $\log_a 2^7$

8. 그림과 같은 5개의 칸에 5개의 수 $\log_a 2$, $\log_a 4$, $\log_a 8$, $\log_a 32$, $\log_a 128$을 한 칸에 하나씩 적는다. 가로로 나열된 3개의 칸에 적힌 세 수의 합과 세로로 나열된 3개의 칸에 적힌 세 수의 합이 15로 서로 같을 때, a의 값은? [3점]



$a_1 + a_2 = a_4 + a_5$

$a_3 = \log_a 4$

$30 = \sum_{n=1}^{5} a_n + a_3 = \log_a 2^{20}$

$a^{30} = 2^{20}$ $a = 2^{\frac{2}{3}}$

2

① $2^{\frac{1}{3}}$ ② $2^{\frac{2}{3}}$ ③ 2 ④ $2^{\frac{4}{3}}$ ⑤ $2^{\frac{5}{3}}$

9. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$$

라 하자. $\frac{S_{10}}{T_{10}} = 6$일 때, T_{37}의 값은? [4점]

3

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

$$\frac{S_{10}}{T_{10}} = \frac{10\, a_{5.5}}{5\,(a_6 - a_5)} = \frac{10(1+4.5d)}{5d} = 6 \qquad d = -\frac{2}{3}$$

$$T_{37} = -19a_{19} + 18a_{19} = -a_{19}$$

$$-a_{19} = -1 + \frac{2}{3} \times 18 = 11$$

10. 양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를
$a>0$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5a & (x<a) \\ -2x+4 & (x \geq a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(-x)f(x)$가 $x=a$에서 연속이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$f(-a)=a^2-5a$

$f(a)=f(a+)=-2a+4$

$f(a-)=a^2-5a$

①

$(a^2-5a)(-2a+4)=(a^2-5a)(a^2-5a)$

$(a^2-5a)(a^2-3a-4)=0$

$a(a-5)(a-4)(a+1)=0$

$a=4$ or 5

11. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-6t, \quad v_2(t)=2t$$

이다. 두 점 P, Q가 시각 $t=\overset{4}{a}\,(a>0)$에서 만날 때, 시각 $t=0$에서 $t=\overset{4}{a}$까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

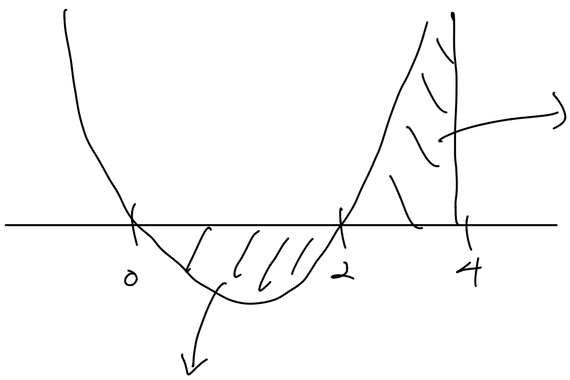
$P(t) = t^3 - 3t^2$

$Q(t) = t^2$

$t^3 - 4t^2 = 0$

$t = 4$

②



$\int_2^4 3t^2 - 6t \, dt =$

$[t^3 - 3t^2]_2^4 = 20$

$\frac{3 \cdot 2^3}{6} = 4$

$4 + 20 = 24$

12. 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 정의된 함수

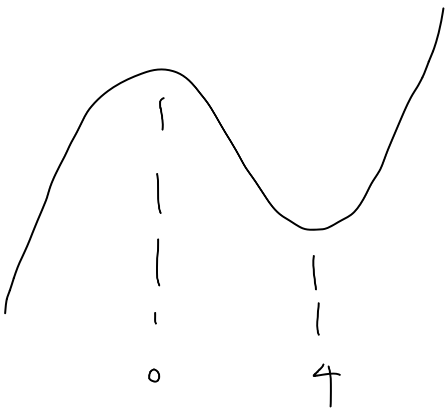
$$f(x)=\begin{cases} x^3-6x^2+5 & (-1\le x\le 1) \\ x^2-4x+a & (1<x\le 3) \end{cases}$$

$y'=3x^2-12x$

$y'=2x-4$

의 최댓값과 최솟값의 합이 0일 때, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① -5　② $-\frac{9}{2}$　③ -4　④ $-\frac{7}{2}$　⑤ -3



최댓값 후보

$f(0)=5$

$f(3)=a-3$

$a<2$

$a+1=0$

$a=-1$

최솟값 후보

$f(2)=a-4$

$f(-1)=-2$

3

$\lim\limits_{x\to 1+}(x^2-4x-1)=-4$

13. $a>1$인 실수 a에 대하여 좌표평면에 두 곡선

$$y=a^{x}, \quad y=\left|a^{-x-1}-1\right|$$

이 있다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

②

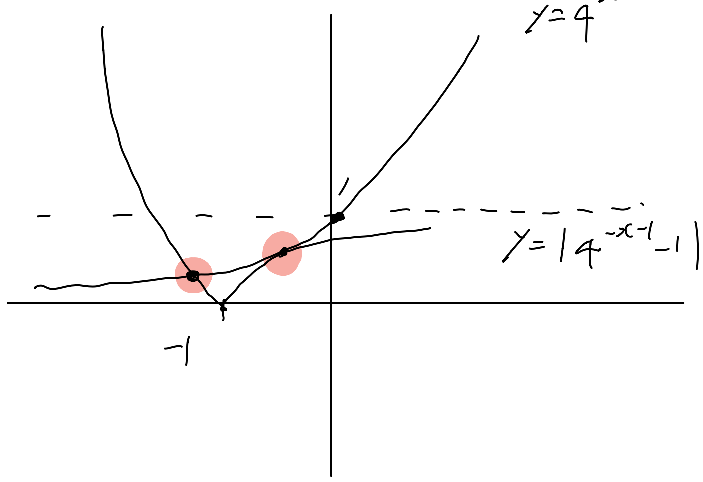
<보 기>

ㄱ. 곡선 $y=\left|a^{-x-1}-1\right|$은 점 $(-1,\ 0)$을 지난다.
ㄴ. $a=4$이면 두 곡선의 교점의 개수는 2이다.
ㄷ. $a>4$이면 두 곡선의 모든 교점의 x좌표의 합은 -2보다 크다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $|a^0-1|=0$ (참)

ㄴ.



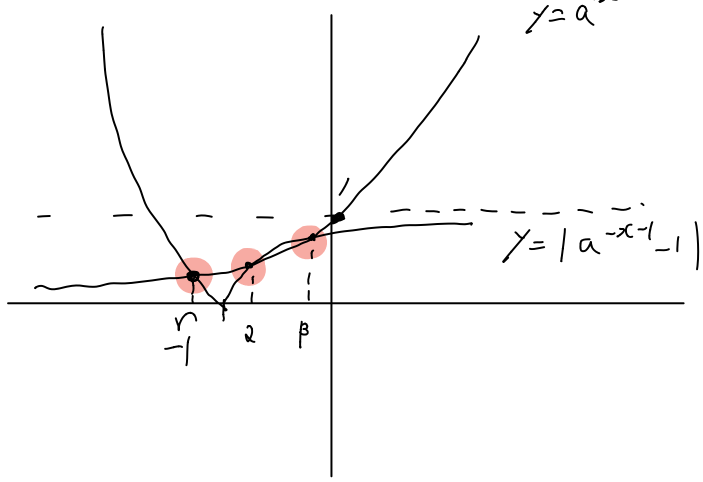
$4^x = 1-4^{-x-1}$

$4^x=t$ $\quad 4t^2-4t+1=0$

$t=\frac{1}{2}$

(참)

ㄷ. $a>4$



$a^x=t$ $\quad at^2-4t+1=0$

$a^2-4a>0$

$\Rightarrow y=a^x,\ y=1-a^{-x-1}$

교점 2개

$a^{\alpha+\beta}=\frac{1}{a}$ $\quad \alpha+\beta=-1$

$\gamma<-1$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma<-2$ (거짓)

14. 함수 $f(x)=x^3-x$ 와 상수 $a\,(a>-1)$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(a,\ f(a))$ 를 지나는 직선을 $y=g(x)$ 라 하자. 함수

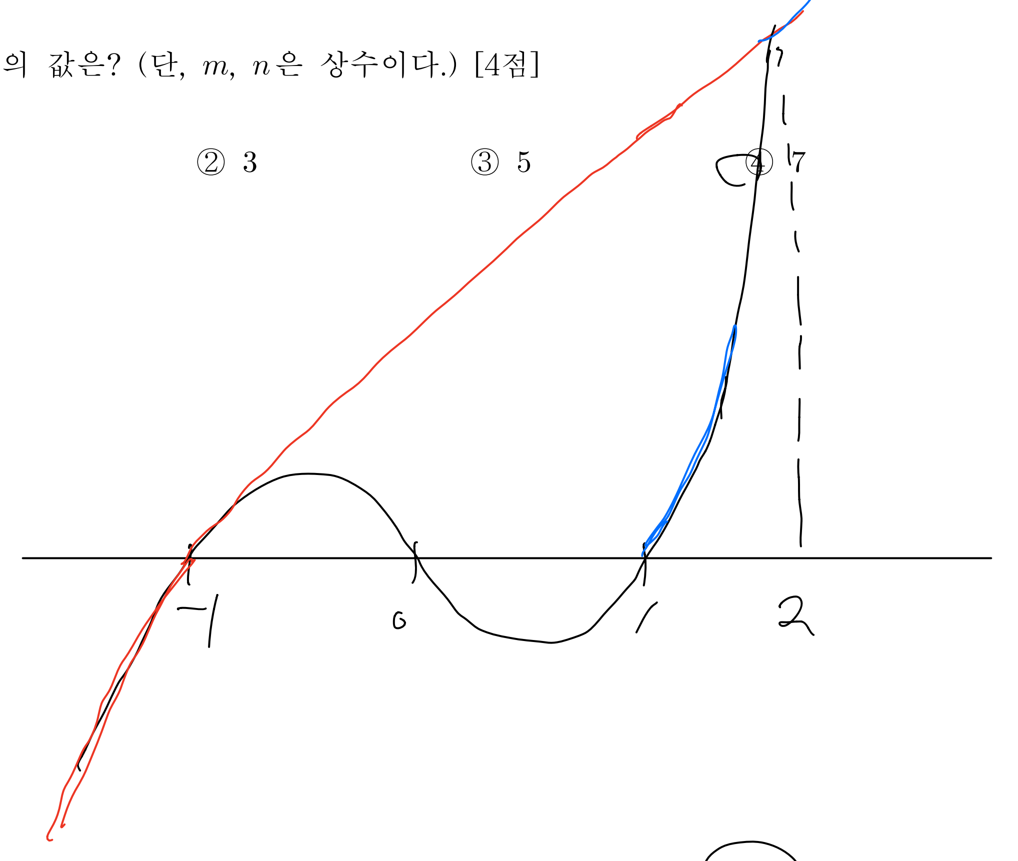
$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-1) \\ g(x) & (-1\le x\le a) \\ f(x-m)+n & (x>a) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.   (나) 함수 $h(x)$ 는 일대일대응이다. → h(x)는 증가함수

$m+n$ 의 값은? (단, m, n 은 상수이다.) [4점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9



$f'(-1)=f'(1)$

$f(2)=6$

$m=1$

$n=6$

$1+6=7$

④

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최솟값을 m이라 하자.

(가) 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n} = a_3 \times a_n + 1, \quad a_{2n+1} = 2a_n - a_2$$

이다.

$a_1 = m$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값은? [4점]

① -53 ② -51 ③ -49 ④ -47 ⑤ -45

$a_2 = a_3 a_1 + 1$

$a_3 = 2a_1 - a_2 \rightarrow a_2 = 2a_1 - a_3$

①

$a_3 a_1 + 1 = 2a_1 - a_3$

$(a_3 - 2)(a_1 + 1) = -3$

3	-1
1	-3
-3	1
-1	3

$\rightarrow a_1$ 최소

$a_1 = -4$

$a_2 = -11$

$a_3 = 3$

$a_4 = -32$

$a_9 = 2a_4 - a_2 = -53$

16. 함수 $f(x)=(x+3)(x^3+x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하시오. [3점]

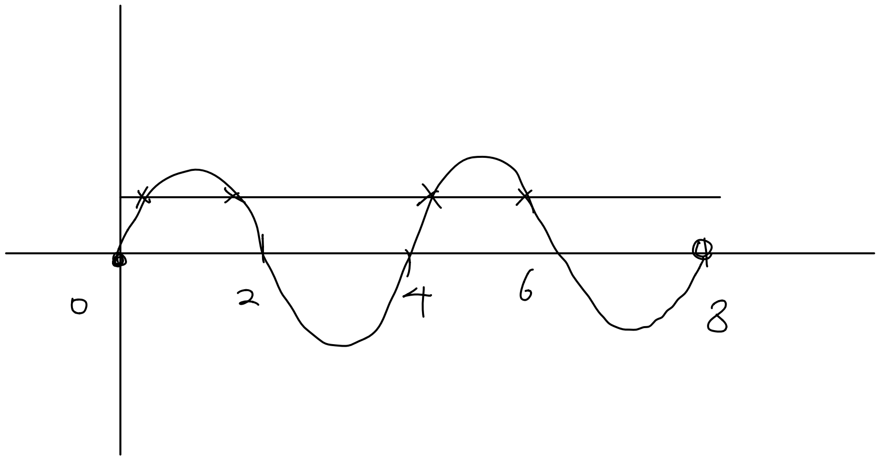
$f'(x) = x^3+x + (x+3)(3x^2+1)$

18

$f'(1) = 2 + 4\times4 = 18$

17. $0 \leq x < 8$일 때, 방정식 $\sin\frac{\pi x}{2} = \frac{3}{4}$의 모든 해의 합을 구하시오. [3점]

주기 4



12

$2+10=12$

18. 모든 양의 실수 x에 대하여 부등식

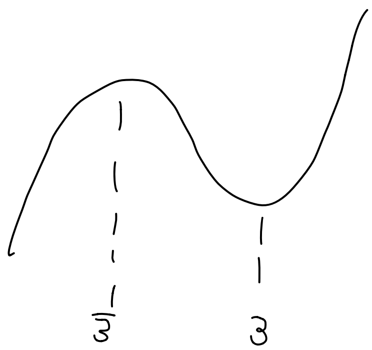
$x>0$

$$x^3-5x^2+3x+n \geq 0$$

이 항상 성립하도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. [3점]

$y' = 3x^2 - 10x + 3 = (3x-1)(x-3)$

9



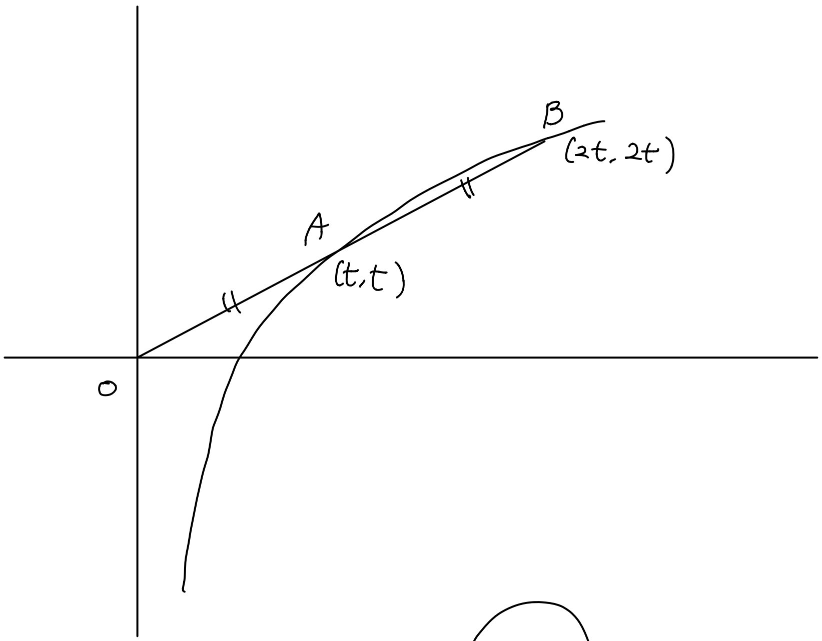
$f(3) = n - 9 \geq 0$

$n \geq 9$

19. 함수 $f(x)=\log_2 kx$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 두 점 A, B에서 만나고 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$이다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(5)$의 값을 구하시오. (단, k는 0이 아닌 상수이고, O는 원점이다.) [3점]

$g(5)=a$

$f(a)=5$



$t = \log_2 kt$

$2t = \log_2 kt + 1$

$t=1$, $k=2$

$f(x) = \log_2 x + 1$

$\log_2 a + 1 = 5$

$a = 16$

16

20. 양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

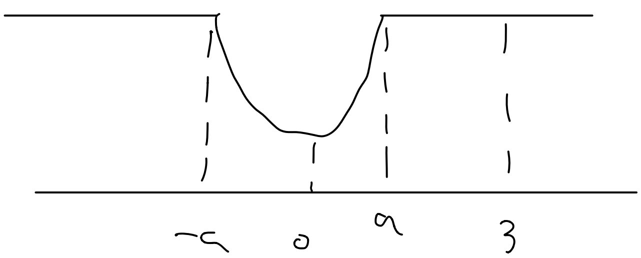
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{a}x^2 & (-a \le x \le a) \\ 3a & (x < -a \text{ 또는 } x > a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $y = f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x = -3$, $x = 3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은 S이다. $40S$의 값을 구하시오. [4점]

$a \ge 3$

$\int_0^3 \frac{3}{a} x^2 dx = 8$ $\frac{27}{a} = 4$ $a = \frac{27}{4}$

$a < 3$



$4 = \int_0^a \frac{3}{a} x^2 dx + 3a(3-a)$

$2a^2 - 9a + 4 = 0$

$a = \frac{1}{2}$

$S = \frac{27}{4} + \frac{1}{2} = \frac{29}{4}$

$\frac{29}{4} \times 40 = 290$

290

21. $\angle BAC=\theta\left(\frac{2}{3}\pi\le\theta<\frac{3}{4}\pi\right)$인 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 세 점 B, O, C를 지나는 원의 중심을 O′이라 하자. 다음은 점 O′이 선분 AB 위에 있을 때, $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$의 값을 θ에 대한 식으로 나타내는 과정이다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2R$$

세 점 B, O, C를 지나는 원의 반지름의 길이를 r라 하자. 선분 O′O는 선분 BC를 수직이등분하므로 이 두 선분의 교점을 M이라 하면

$$\overline{O'M}=r-\overline{OM}=r-|R\cos\theta| = r+R\cos\theta$$

직각삼각형 O′BM에서

$$R=\boxed{\quad(가)\quad}\times r$$

$-2\cos\theta$

$R = 2r\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -2r\cos\theta$

이므로

$$\sin(\angle O'BM)=\boxed{\quad(나)\quad}$$

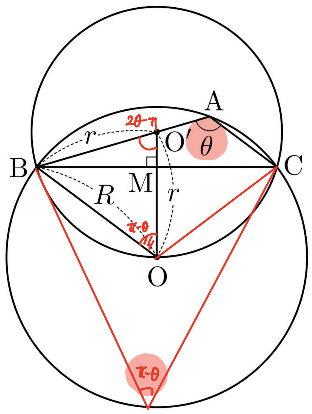
$1-2\cos^2\theta$

$\sin\angle O'BM = \frac{O'M}{O'B} = \frac{r+R\cos\theta}{r} = \frac{r-2r\cos^2\theta}{r} = 1-2\cos^2\theta$

따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\boxed{\quad(다)\quad}$$

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{2R\sin\theta}{2R\sin\angle O'BM} = \frac{\sin\theta}{1-2\cos^2\theta}$



위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$, $h(\theta)$라 하자. $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{\sqrt{10}}{5}$인 α, β에 대하여 $f(\alpha)+g(\beta)+\left\{h\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right\}^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$f(\alpha) = 2\times\frac{3}{5} = \frac{6}{5}$

$g(\beta) = 1-2\times\frac{10}{25} = \frac{1}{5}$

$h\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-2\times\frac{1}{4}} = \sqrt{3}$

$\frac{6}{5}+\frac{1}{5}+3 = \frac{22}{5}$

27

22. 일차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x (x-2)f(s)\,ds$$

라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=tx$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $g(x)$에 대하여 $g(4)$의 값의 합을 구하시오. [4점]

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k에 대하여 함수 $h(t)$는 $t=-k$에서 불연속이다.

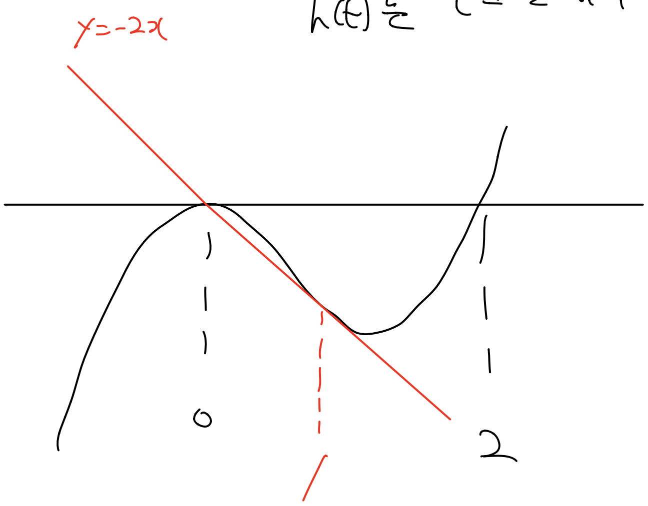
$g(x)=(x-2)\int_0^x f(s)\,ds = x(x-2)p(x)$

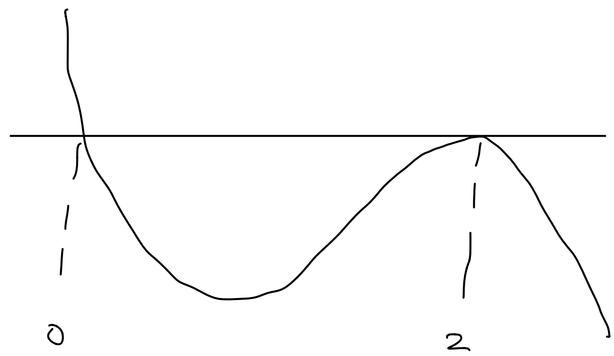
56

$g(0)=0$

$g(2)=0$ $h(t)$는 $t=0$ 에서 불연속

$h(t)$는 $t=-2$에서 불연속





$g(x)=kx^2(x-2)$ $g(1)=-2$

$=2x^2(x-2)$

$g(x)=kx(x-2)^2$ $g'(0)=-2$

$=-\frac{1}{2}x(x-2)^2$

$g'(0)=4k=-2$ $k=-\frac{1}{2}$

$64-8=56$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2022학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역 확률과 통계

23. 다항식 $(2x+1)^6$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는? [2점]

① 40 ② 60 ③ 80 ④ 100 ⑤ 120

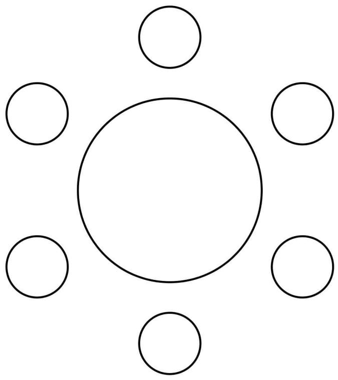
$_6C_2\ (2x)^2\ 1^4$ ②

$= 15 \times 4\ x^2 = 60x^2$

24. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 있다. 이 6개의 공을 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 3의 배수가 적혀 있는 두 공이 서로 이웃하도록 배열하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 48　② 54　③ 60　④ 66　⑤ 72

$2\times4!=48$



1

25. 어느 학교의 컴퓨터 동아리는 남학생 21명, 여학생 18명으로 이루어져 있고, 모든 학생은 데스크톱 컴퓨터와 노트북 컴퓨터 중 한 가지만 사용한다고 한다. 이 동아리의 남학생 중에서 데스크톱 컴퓨터를 사용하는 학생은 15명이고, 여학생 중에서 노트북 컴퓨터를 사용하는 학생은 10명이다. 이 동아리 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 데스크톱 컴퓨터를 사용하는 학생일 때, 이 학생이 남학생일 확률은? [3점]

① $\frac{8}{21}$　② $\frac{10}{21}$　③ $\frac{15}{23}$　④ $\frac{5}{7}$　⑤ $\frac{18}{23}$

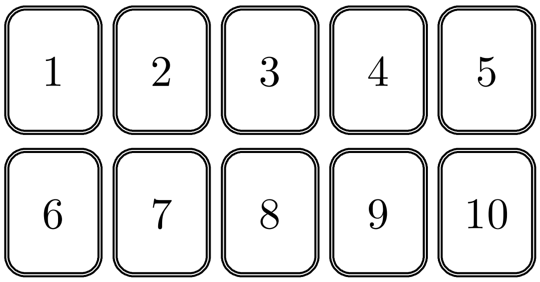
	남	여
데	15	8
노	6	10
	21	18

3

$\frac{15}{23}$

26. 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 있다. 이 10장의 카드 중에서 임의로 선택한 서로 다른 3장의 카드에 적혀 있는 세 수의 곱이 4의 배수일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$



④

2 인수

0개 1 3 5 7 9

1개 2 6 10

2개 4

3개 8

$$1 - \underbrace{\frac{{}_5C_3}{{}_{10}C_3}}_{\text{홀수}} - \underbrace{\frac{{}_3C_1 \times {}_5C_2}{{}_{10}C_3}}_{\text{4의 배수가 아닌 2의 배수}} = \frac{2}{3}$$

27. 평균이 100, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자.
$\mathrm{P}(98 \le \overline{X} \le 102) = 0.9876$일 때, σ의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

5

$\overline{X} \sim N(100, (\frac{\sigma}{5})^2)$

$P(\frac{-10}{\sigma} \le Z \le \frac{10}{\sigma}) = 0.9876$

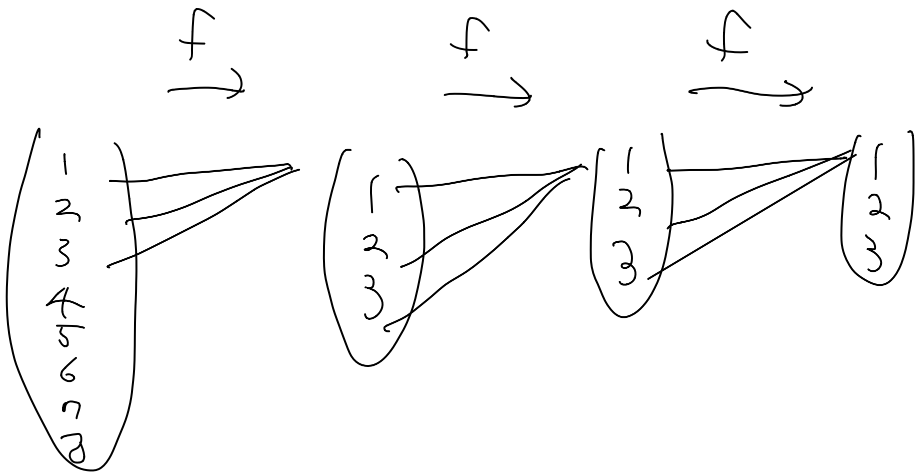
$\frac{10}{\sigma} = 2.5$

$\sigma = 4$

28. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f : X \to Y$의 개수는? [4점]

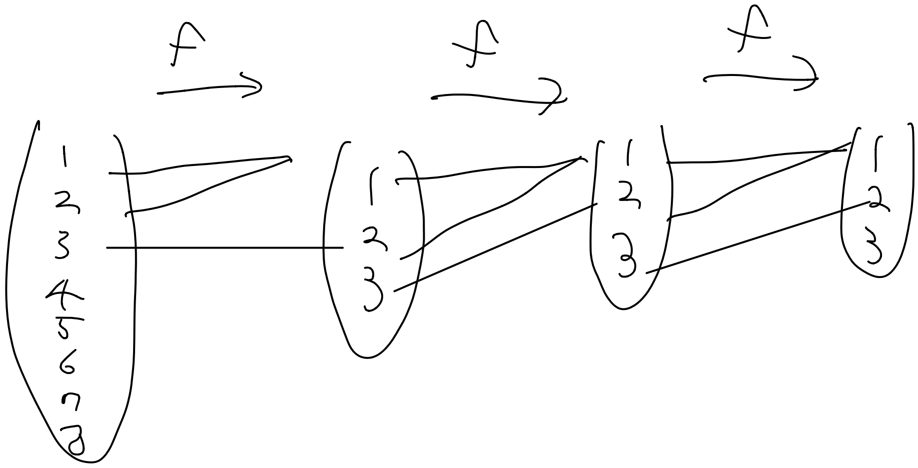
(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.
(나) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $(f \circ f \circ f)(x) = 1$이다.

① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36



2

$_3H_5 = {}_7C_5 = 21$



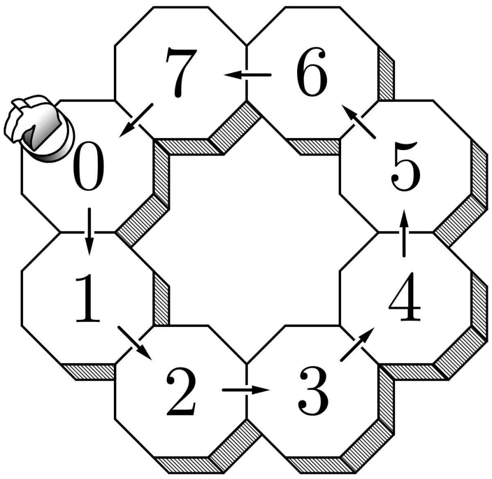
$21+6=27$

$_2H_5 = {}_6C_5 = 6$

29. 그림과 같이 8개의 칸에 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 말판이 있고, 숫자 0이 적혀 있는 칸에 말이 놓여 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나오는 눈의 수가 3 이상이면 말을 화살표 방향으로 한 칸 이동시키고, $\frac{2}{3}$
> 나오는 눈의 수가 3보다 작으면 말을 화살표 반대 방향으로 한 칸 이동시킨다. $\frac{1}{3}$

위의 시행을 4회 반복한 후 말이 도착한 칸에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(36X)$의 값을 구하시오. [4점]



→2 ←2 →3 ←1 →4 ←4 →1 ←3

0	2	4	6
${}_4C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2$	${}_4C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)$	${}_4C_4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 + {}_4C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^4$	${}_4C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3$
$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{17}{81}$	$\frac{8}{81}$

80

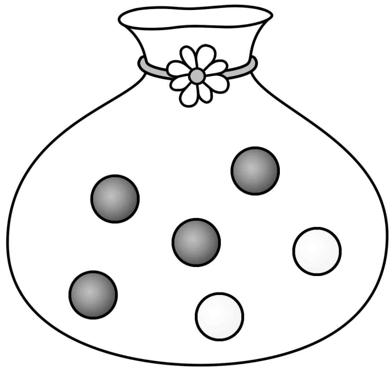
$36\,E(x)$

$= 36 \times \frac{64+68+48}{81} = 80$

30. 검은 공 4개, 흰 공 2개가 들어 있는 주머니에 대하여 다음 시행을 2회 반복한다.

주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낸 후, 꺼낸 공 중에서 흰 공은 다시 주머니에 넣고 검은 공은 다시 넣지 않는다.

두 번째 시행의 결과 주머니에 흰 공만 2개 들어 있을 때, 첫 번째 시행의 결과 주머니에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



41

$$\frac{\frac{{}_4C_2 \times {}_2C_1}{{}_6C_3} \times \frac{{}_2C_1}{{}_4C_3}}{\frac{{}_4C_3}{{}_6C_3} \times 1 + \frac{{}_4C_2 \times {}_2C_1}{{}_6C_3} \times \frac{{}_2C_1}{{}_4C_3} + \frac{{}_4C_1 \times {}_2C_2}{{}_6C_3} \times \frac{{}_3C_3}{{}_5C_3}} = \frac{15}{26}$$

첫시행 검은공 3개 첫 시행 검은공 2개 흰공 1개 첫 시행 검은공 1개 흰공2개

※ 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. ○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2022학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

미적분

23. $\lim_{n \to \infty}\left(\sqrt{an^2+bn}-\sqrt{2n^2+1}\right)=1$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a-2)n^2+bn-1}{\sqrt{an^2+bn}+\sqrt{2n^2+1}} = 1$$

5

$ab=4\sqrt{2}$

$a=2$ $\frac{b}{2\sqrt{2}}=1$ $b=2\sqrt{2}$

24. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+3k}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}\ln 2$ ② $\frac{2}{3}\ln 2$ ③ $\ln 2$ ④ $\frac{4}{3}\ln 2$ ⑤ $\frac{5}{3}\ln 2$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{3}{n}k}\frac{1}{n}$$

2

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+3x}dx = \frac{1}{3}\left[\ln(1+3x)\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\ln 2$$

25. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x = e^t\cos(\sqrt{3}t)-1,\quad y = e^t\sin(\sqrt{3}t)+1\quad(0\le t\le \ln 7)$$

의 길이는? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos\sqrt{3}t - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t)$$

4

$$\frac{dy}{dt} = e^t(\sin\sqrt{3}t + \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t)$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 2e^t$$

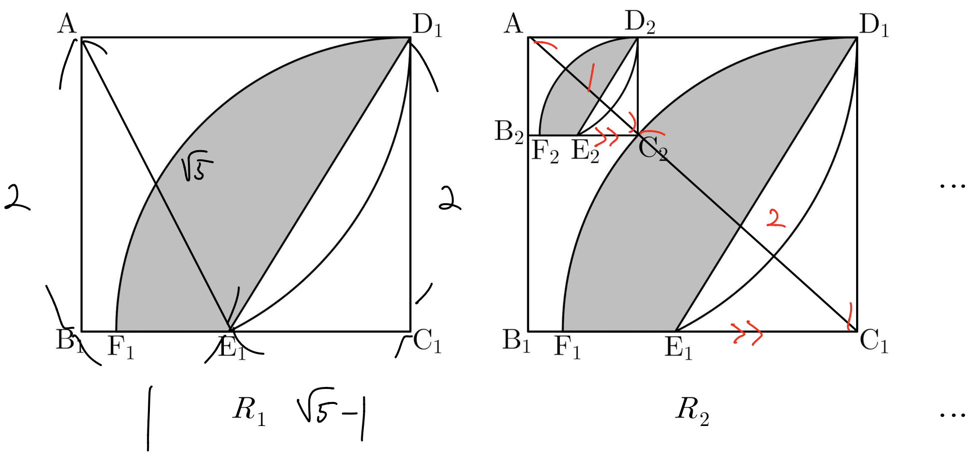
$$\int_0^{\ln 7} 2e^t\,dt = 2\left[e^t\right]_0^{\ln 7}$$

$$= 12$$

26. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=\sqrt{5}$ 인 직사각형 $AB_1C_1D_1$ 이 있다. 중심이 A 이고 반지름의 길이가 $\overline{AD_1}$ 인 원과 선분 B_1C_1 의 교점을 E_1, 중심이 C_1 이고 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$ 인 원과 선분 B_1C_1 의 교점을 F_1 이라 하자. 호 D_1F_1 과 두 선분 D_1E_1, F_1E_1 로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 선분 AB_1 위의 점 B_2, 호 D_1F_1 위의 점 C_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2 와 점 A 를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2} : \overline{AD_2} = 2 : \sqrt{5}$ 인 직사각형 $AB_2C_2D_2$ 를 그린다. 중심이 A 이고 반지름의 길이가 $\overline{AD_2}$ 인 원과 선분 B_2C_2 의 교점을 E_2, 중심이 C_2 이고 반지름의 길이가 $\overline{C_2D_2}$ 인 원과 선분 B_2C_2 의 교점을 F_2 라 하자. 호 D_2F_2 와 두 선분 D_2E_2, F_2E_2 로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? [3점]



① $\frac{8\pi+8-8\sqrt{5}}{7}$
② $\frac{8\pi+8-7\sqrt{5}}{7}$
③ $\frac{9\pi+9-9\sqrt{5}}{8}$
④ $\frac{9\pi+9-8\sqrt{5}}{8}$
⑤ $\frac{10\pi+10-10\sqrt{5}}{9}$

$a = \pi - \sqrt{5} + 1$ $\quad r = \frac{1}{9}$ $\quad$ 3

$$\frac{\pi-\sqrt{5}+1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9\pi+9-9\sqrt{5}}{8}$$

27. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln(2x^2+2x+1)\,(x>0)$과 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $f'(2\ln 5)$의 값은? [3점]

$\parallel$
$g(t)$

① $\frac{25}{14}$ ② $\frac{13}{7}$ ③ $\frac{27}{14}$ ④ 2 ⑤ $\frac{29}{14}$

$g(f(t))=t$

$g'(f(t))\,f'(t)=1$

$g'(3)\,f'(2\ln 5)=1$

1

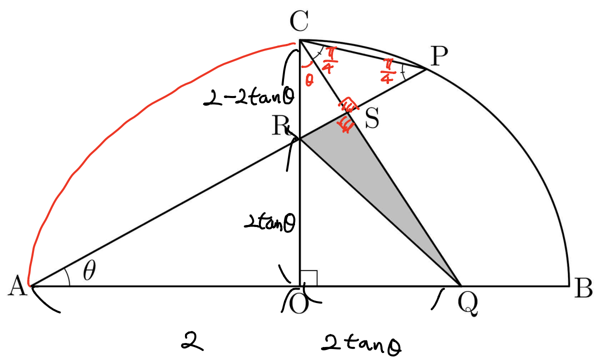
$g(3)=2\ln 5$

$f(2\ln 5)=3$

$g'(x)=\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}$

$g'(3)=\frac{14}{25}$

28. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB의 중점 O에 대하여 선분 OB를 반지름으로 하는 사분원 OBC가 있다. 호 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 선분 OB 위의 점 Q가 ∠APC = ∠PCQ를 만족시킨다. 선분 AP가 두 선분 CO, CQ와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. ∠PAB = θ일 때, 삼각형 RQS의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



∠AOC 원주각
∠APC

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$$\frac{1}{2} \lim_{\theta \to 0+} \frac{(2-2\tan\theta)\sin\theta \, (2+2\tan\theta)\sin\theta}{\theta^2} = 2$$

4

29. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \le x \le 1$에서 $f(x) < 0$이다.
(나) $\int_{-1}^{0} \lvert f(x)\sin x \rvert \, dx = 2$, $\int_{0}^{1} \lvert f(x)\sin x \rvert \, dx = 3$

함수 $g(x) = \int_{-1}^{x} \lvert f(t)\sin t \rvert \, dt$에 대하여 $\int_{-1}^{1} f(-x)g(-x)\sin x \, dx = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$g(-1)=0$

$g'(x) = \lvert f(x)\sin x \rvert$

$\int_{-1}^{0} f(x)\sin x \, dx = 2$

$\int_{0}^{1} f(x)\sin x \, dx = -3$

$g(0) - g(-1) = 2$

$g(1) - g(0) = 3$

$g(0)=2$

$g(1)=5$

$-\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\sin x \, dx$

$= -\int_{-1}^{0} g(x)g'(x)\,dx + \int_{0}^{1} g(x)g'(x)\,dx$

$= -\left[\frac{1}{2}g^2(x)\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}g^2(x)\right]_{0}^{1}$

$= -2 + \frac{21}{2} = \frac{17}{2}$

19

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (0 \le x \le 2) \\ \dfrac{f(x)}{x-1} & (x<0 \text{ 또는 } x>2) \end{cases}$$

(1, 0)과 (x, f(x)) 기울기

$y' = \dfrac{f'(x)(x-1) - f(x)}{(x-1)^2}$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, $g(2) \neq 0$이다.
(나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.
(다) $g(k)=0$, $g'(k)=\dfrac{16}{3}$인 실수 k가 존재한다.

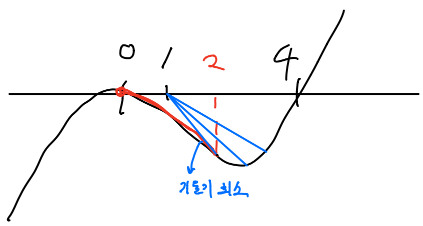
함수 $g(x)$의 극솟값이 p일 때, p^2의 값을 구하시오. [4점]

$g(x)$ 연속 → $f(0)=0$

64

$g(2) \neq 0$ → $g(x)$는 $x=2$에서 미분불가능 → $f'(0)=0$
$f(2) \neq 0$ $\quad$ $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능

$f(x) = x^2(x-k) = x^2(x-4)$



$p = g(2) = f(2) = -8$

$p^2 = 64$

($k>2$ or $k<2$) $\quad \dfrac{(k-1)k^2}{(k-1)^2} = \dfrac{k^2}{k-1} = \dfrac{16}{3}$

$3k^2 - 16k + 16 = 0$

$(3k-4)(k-4) = 0$

$k=4$

※ **확인 사항**
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2022학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역 기 하

23. 세 벡터 $\vec{a}=(x,\ 3)$, $\vec{b}=(1,\ y)$, $\vec{c}=(-3,\ 5)$가 $2\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$를 만족시킬 때, $x+y$의 값은? [2점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

3

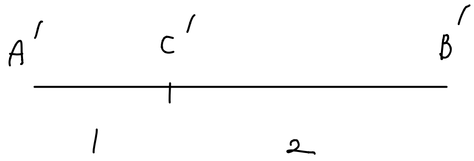
$(2x, 6) = (4, y-5)$

$x=2$

$y=11$

24. 좌표공간의 두 점 A(0, 2, -3), B(6, -4, 15)에 대하여 선분 AB 위에 점 C가 있다. 세 점 A, B, C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 A$'$, B$'$, C$'$이라 하자. $2\overline{\mathrm{A'C'}}=\overline{\mathrm{C'B'}}$일 때, 점 C의 z좌표는? [3점]

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3



⑤

$\overline{AB}$ 1:2 대분점 C $\left(\frac{6+0}{3}, \frac{-4+4}{3}, \frac{15-6}{3}\right)$

25. 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선의 x절편이 $\frac{1}{3}$이다. 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F라 할 때, 선분 PF의 길이는? [3점]

① 5 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{17}{3}$ ④ 6 ⑤ $\frac{19}{3}$

P(a, b) $ax-\frac{b}{3}y=1$

①

P(3, $2\sqrt{6}$) $a=3$, $b=2\sqrt{6}$

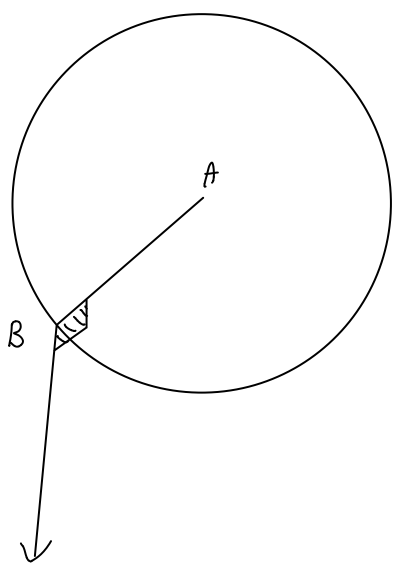
F(2, 0)

$\overline{PF}=5$

26. 좌표공간에서 중심이 A$(a,\ -3,\ 4)\,(a>0)$인 구 S가 x축과 한 점에서만 만나고 $\overline{\mathrm{OA}}=3\sqrt{3}$ 일 때, 구 S가 z축과 만나는 두 점 사이의 거리는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $3\sqrt{6}$　　② $2\sqrt{14}$　　③ $\sqrt{58}$　　④ $2\sqrt{15}$　　⑤ $\sqrt{62}$

2



$\overline{OA}^2 = 27$

$a^2 = 2$

$A(\sqrt{2}, -3, 4)$

$B(\sqrt{2}, 0, 0)$

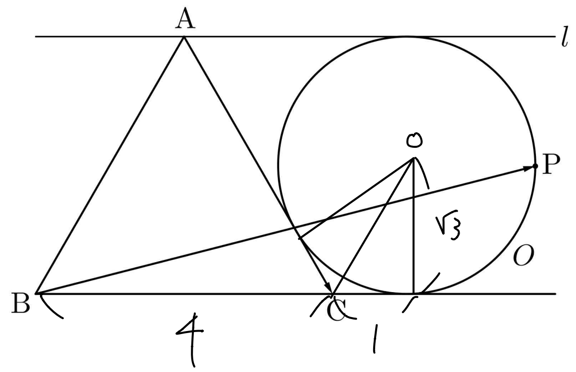
$\overline{AB} = 5$

$(x-\sqrt{2})^2+(y+3)^2+(z-4)^2 = 25$

$(z-4)^2 = 14$

$z = 4 \pm \sqrt{14}$

27. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC에 대하여 점 A를 지나고 직선 BC에 평행한 직선을 l이라 할 때, 세 직선 AC, BC, l에 모두 접하는 원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BP}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은? (단, 원 O의 중심은 삼각형 ABC의 외부에 있다.) [3점]



① 46 ② 47 ③ 48 ④ 49 ⑤ 50

4

$M = |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BO}| + |\overrightarrow{OP}|$

$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{3}$

$m = |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BO}| - |\overrightarrow{OP}|$

B(0,0) O(5, √3)

A(2, 2√3) C(4, 0)

$|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BO}| = |(7, -\sqrt{3})| = \sqrt{52}$

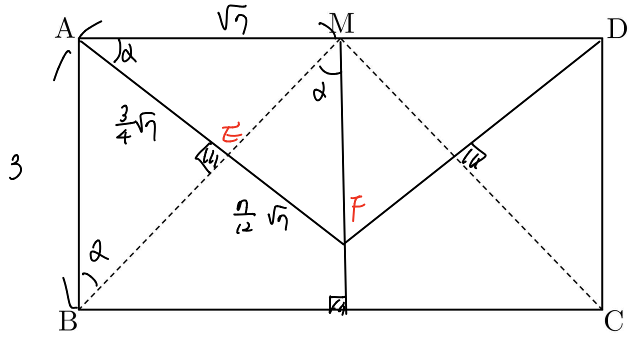
$M = \sqrt{52} + \sqrt{3}$

$m = \sqrt{52} - \sqrt{3}$

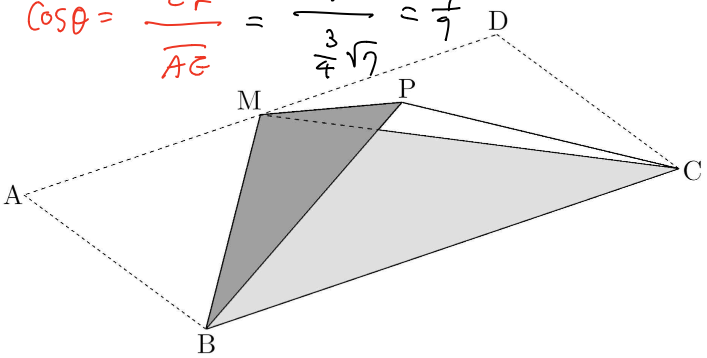
$52 - 3 = 49$

28. [그림 1]과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=2\sqrt{7}$인 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. 선분 AD의 중점을 M이라 하자. 두 선분 BM, CM을 접는 선으로 하여 [그림 2]와 같이 두 점 A, D가 한 점 P에서 만나도록 종이를 접었을 때, 평면 PBM과 평면 BCM이 이루는 각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? (단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]

$\cos\theta = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{AE}} = \dfrac{\frac{7}{12}\sqrt{7}}{\frac{3}{4}\sqrt{7}} = \dfrac{7}{9}$



[그림 1]



[그림 2]

① $\frac{17}{27}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{19}{27}$ ④ $\frac{20}{27}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

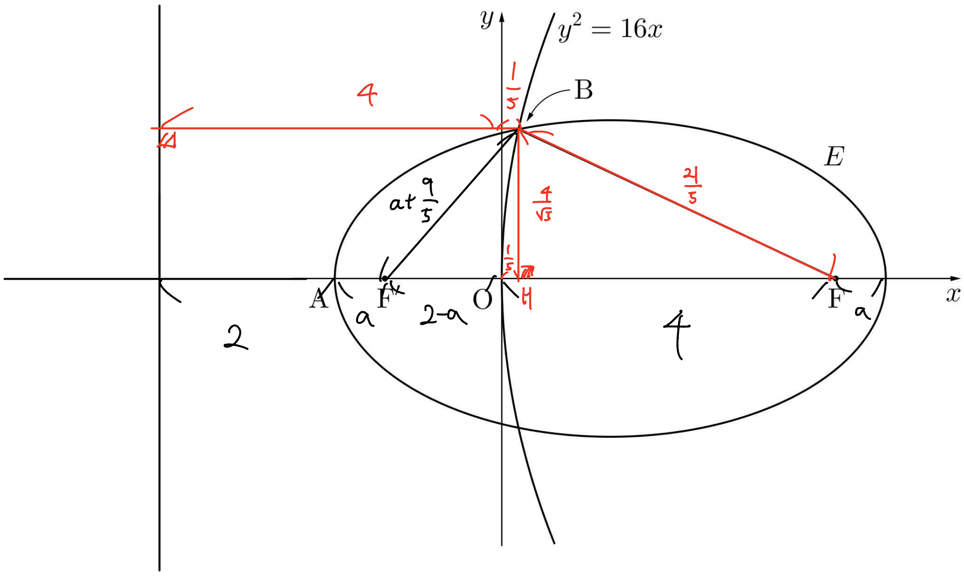
$\cos\alpha = \frac{3}{4}$

$\overline{AF} = \frac{4}{3}\sqrt{7}$

$\overline{AE} = \frac{3}{4}\sqrt{7}$

5

29. 그림과 같이 포물선 $y^2 = 16x$의 초점을 F라 하자. 점 F를 한 초점으로 하고 점 A$(-2,\ 0)$을 지나며 다른 초점 F′이 선분 AF 위에 있는 타원 E가 있다. 포물선 $y^2 = 16x$가 타원 E와 제1사분면에서 만나는 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{BF}} = \frac{21}{5}$일 때, 타원 E의 장축의 길이는 k이다. $10k$의 값을 구하시오. [4점]



$k = a+6$

$$\frac{16}{5} = \left(a+\frac{9}{5}\right)^2 - \left(\frac{11}{5} - a\right)^2$$

$$\frac{16}{5} = 8a - \frac{8}{5}, \quad a = \frac{3}{5}$$

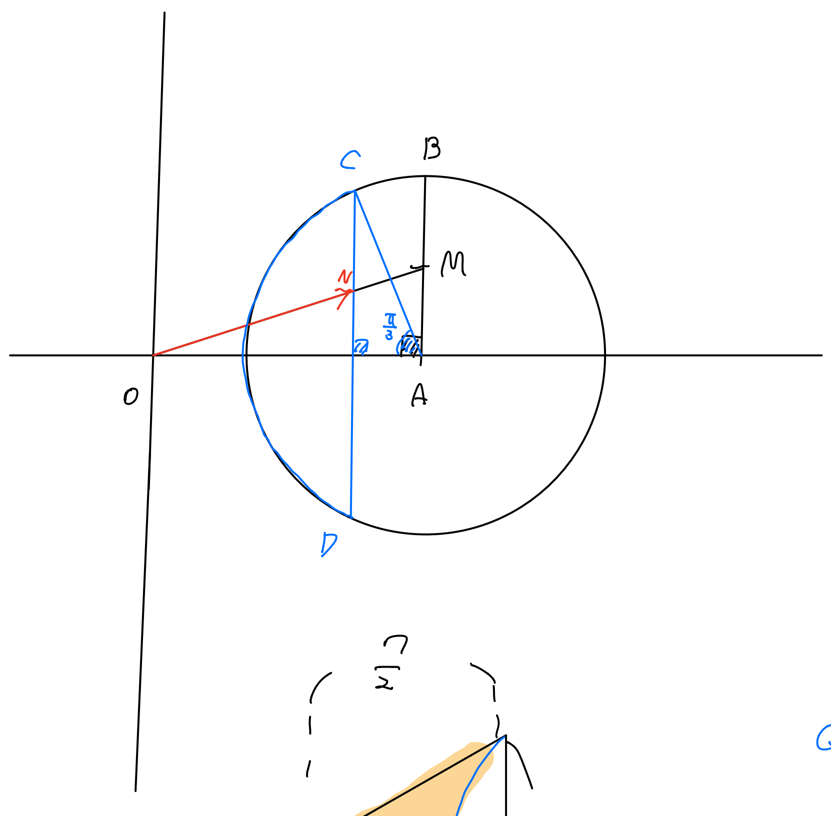
$$k = \frac{3}{5} + 6 = \frac{33}{5}$$

66

30. 좌표평면 위의 두 점 A(6, 0), B(6, 5)와 음이 아닌 실수 k에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{OP}=k\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$이고 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}\leq 21$이다.
(나) $\left|\overrightarrow{AQ}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$이고 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}\leq 21$이다.

$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$P(a, b)$ $a \leq \frac{7}{2}$

$Q(c, d)$ $c \leq \frac{7}{2}$

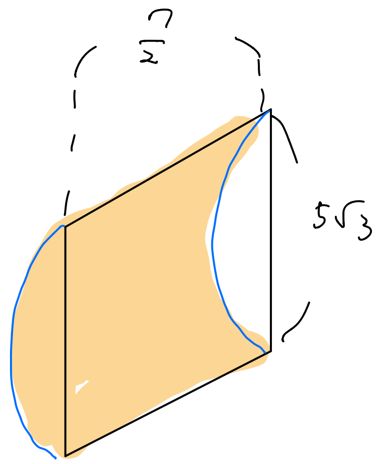
$\overrightarrow{op} \,//\, \overrightarrow{oM}$

$|\overrightarrow{AQ}| = 5$

P의 자취 $\overline{ON}$

Q의 자취 호 CD

37



$5\sqrt{3} \times \frac{7}{2} = \frac{35}{2}\sqrt{3}$

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

공 란

공 란