제 2 교시

Ambitious Penguin

수학1 - 1. 지수와 로그

1. $-6 \cdot 2^x + 2^y = 4^x$ 일 때, $-10 \cdot 2^x + 2^y$ 이 최솟값을 갖는 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값을 구하면?
(2004학년도 경찰대학 5번)

① -5 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

2. $60^a = 5$, $60^b = 6$ 일 때, $12^{\frac{2a+b}{1-a}}$ 의 값을 구하시오. [3점]
(2017학년도 경찰대학 21번)

3. 세 실수 a, b, c가 $abc \neq 0$, $ab+bc+ca=abc$를 만족시킨다. $\log_2 x = a$, $\log_3 x = b$, $\log_5 x = c$일 때, 양수 x의 값은?
(2010학년도 경찰대학 2번)

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

수학1 - 2. 삼각함수

4. 방정식 $4^{\sin x}+6\cdot 4^{-\sin x}=5$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ 의 근의 개수는?
(2008학년도 경찰대학 11번)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 삼각형 ABC의 넓이는 12이고, 이 삼각형의 외접원의 넓이는 15π이다. 이 외접원의 중심을 O라고 할 때, 다음 식의 값은?
(2013학년도 경찰대학 2번)

$$\sin(\angle \mathrm{AOB})+\sin(\angle \mathrm{BOC})+\sin(\angle \mathrm{COA})$$

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{9}{5}$ ⑤ 2

6. 폐구간 $[0, \pi]$ 에서 $f(x)=\dfrac{\sin x-1}{\cos x-3}$ 의 최댓값은?
(2003학년도 경찰대학 20번)

수학1 - 3. 수열

7. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 공차가 음수인 등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 n째 항까지의 합을 각각 S_n과 T_n이라 하자. 다음이 성립할 때, a_{20}과 b_{20}의 곱 $a_{20}b_{20}$의 값은?

$$\begin{cases} a_1 = b_1 + 1 \\ S_n^2 - T_n^2 = n^2(n+1) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

(2011학년도 경찰대학 18번)

① -108 ② -105 ③ -102 ④ -99 ⑤ -96

8. 각 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n + S_{n+1} = (a_{n+1})^2$이 성립한다. $a_1 = 10$일 때, a_{10}의 값을 구하여라. [4점]
(2019학년도 경찰대학 22번)

9. $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 직선 $x = n$이 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x - m)$의 그래프와 한 점에서 만나고, 직선 $y = n$이 함수 $y = |2^{-x} - m|$의 그래프와 두 점에서 만나도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합을 a_n이라 하자. $\sum_{n=5}^{10} \frac{1}{a_n}$의 값은? [5점]
(2021학년도 경찰대학 17번)

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{30}$ ④ $\frac{1}{40}$ ⑤ $\frac{1}{50}$

수학2 - 1. 함수의 극한과 연속

10. 직선 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1,0)$과 $\mathrm{P}\left(t, \frac{t+1}{2}\right)$이 있다. 점 P를 지나고 직선 $y=\frac{1}{2}(x+1)$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{AP}}}$의 값은? [3점]
(2018학년도 경찰대학 4번)

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

수학2 - 2. 미분

11. 방정식 $|x^2-2x-6|=|x-k|+2$ 가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 실수 k 의 값의 합은? [4점]
(2017학년도 경찰대학 15번)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. 함수 $f(x)=x+(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 에 대하여 $\{f(x)\}^2-x^2f(x)$ 를 $f(x)-x$ 로 나눈 나머지를 $r(x)$ 라 하자. 함수 $r(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 합은? [4점]
(2017학년도 경찰대학 12번)

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{4}{27}$

13. 다항함수 $f(x)=x^3(x^3+1)(x^3+2)(x^3+3)$에 대하여 $f'(-1)=a$이고 $f(x)$의 최솟값이 b일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라. [4점]
(2016학년도 경찰대학 24번)

14. 미분가능한 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x),\ f(1)=1$$

$$g(x+y)=g(x)g(y)+f(x)f(y),\ \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x}=0$$

을 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [5점]
(2018학년도 경찰대학 20번)

<보 기>

ㄱ. $f'(x)=f'(0)g(x)$

ㄴ. $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값 1을 갖는다.

ㄷ. $\{g(x)\}^2-\{f(x)\}^2=1$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

수학2 - 3. 적분

15. 실수 p에 대하여 이차방정식 $x^2-2px+p-1=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 할 때, $\int_{\alpha}^{\beta}|x-p|dx$ 의 최솟값은? [4점]
(2018학년도 경찰대학 10번)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

16. 함수 $f(x)=(x-1)^3+(x-1)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_{2}^{10}g(x)dx$의 값은? [4점]
(2019학년도 경찰대학 9번)

① $\frac{51}{4}$ ② $\frac{59}{4}$ ③ $\frac{67}{4}$ ④ $\frac{75}{4}$ ⑤ $\frac{83}{4}$

17. 임의의 두 실수 x, y에 대하여

$$f(x-y)=f(x)-f(y)+3xy(x-y)$$

를 만족시키는 다항함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극댓값 a를 가진다. $f'(0)=b$일 때, $a-b$의 값은? [5점]
(2020학년도 경찰대학 17번)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

18. 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=x^2-2|x-t|$ $(-1\le x\le 1)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. $\int_{0}^{\frac{3}{2}}g(t)dt=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]
(2016학년도 경찰대학 22번)

[빠른 정답]

1번: ⑤
2번: 150
3번: ③
4번: ④
5번: ③
6번: $\frac{1}{2}$
7번: ④
8번: 13
9번: ①
10번: ③
11번: ②
12번: ⑤
13번: 37
14번: ⑤
15번: ⑤
16번: ⑤
17번: ②
18번: 19

[해설]

(1번)

$-6 \cdot 2^x + 2^y = 4^x \quad \rightarrow \quad 2^y = 4^x + 6 \cdot 2^x$

$2^x = t\ (t > 0\ ) \quad \rightarrow \quad 2^y = t^2 + 6t = t(t+6) > 0$
$t > 0 \ \ (\because \ t(=2^x) > 0)$

$$\begin{aligned}-10 \cdot 2^x + 2^y &= (2^x)^2 - 4 \cdot (2^x)\\ &= t^2 - 4t\\ &= (t-2)^2 - 4 \quad (t > 0\ )\end{aligned}$$

위의 식은 $t = 2$일 때 최솟값 -4를 가진다. 이를 정리하면 다음과 같다.

$t = 2^x = 2 \quad \rightarrow \quad x = 1$
$2^y = t^2 + 6t = 4 + 12 = 16 \quad \rightarrow \quad y = 4$

따라서 $x + y = 5$

정답 ⑤

(2번)

$$\begin{aligned}12^{\frac{2a+b}{1-a}} &= \left(\frac{60}{5}\right)^{\frac{2a+b}{1-a}}\\ &= 60^{\frac{2a+b}{1-a}} 5^{\frac{2a+b}{a-1}}\\ &= (150)^{\frac{1}{1-a}} 60^{\frac{a(2a+b)}{a-1}}\\ &= (150)^{\frac{1}{1-a}} (150)^{\frac{a}{a-1}}\\ &= (150)^{\frac{a-1}{a-1}}\\ &= 150\end{aligned}$$

정답 150

(3번)

$abc \neq 0$이므로 $ab + bc + ca = abc$의 양변을 abc로 나누면 다음과
같다.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$

$\log_2 x = a \quad \rightarrow \quad \log_x 2 = \frac{1}{a}$

$\log_3 x = b \quad \rightarrow \quad \log_x 3 = \frac{1}{b}$

$\log_5 x = c \quad \rightarrow \quad \log_x 5 = \frac{1}{c}$

$\log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 5 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$
$\log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 5 = \log_x 30$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$이므로 $\log_x 30 = 1$이며, 따라서 $x = 30$

정답 ③

(4번)

$4^{\sin x} = t$ (단, $\frac{1}{4} \leq t \leq 4$)로 치환하면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$$\begin{aligned}t + \frac{6}{t} = 5 \quad \rightarrow \quad & t^2 - 5t + 6 = 0\\ & (t-2)(t-3) = 0\\ & t = 2,\ 3\end{aligned}$$

그러므로 $\sin x$ 의 값은 $\frac{1}{2}$, $\log_4 3$ 이다. $y = \sin x$ 의 그래프 개형을 고려하면, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin \beta = \log_4 3$
(단, $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$)라 할 수 있다. $x = 180 - \alpha,\ 180 - \beta$ 도 근이므로, 따라서 모든 근의 개수는 4 개

정답 ④

(5번)

외접원의 반지름의 길이를 r이라 하면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$\pi r^2 = 15\pi \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{15}$
$\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OC}} = \sqrt{15}$

(△ABC의 넓이)
=(△AOB의 넓이)+(△BOC의 넓이)+(△COA의 넓이)
$= \frac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}} \sin(\angle \mathrm{AOB}) + \frac{1}{2}\overline{\mathrm{OB}} \cdot \overline{\mathrm{OC}} \sin(\angle \mathrm{BOC})$
$\quad + \frac{1}{2}\overline{\mathrm{OC}} \cdot \overline{\mathrm{OA}} \sin(\angle \mathrm{COA})$
$= \frac{1}{2}(\sqrt{15})^2\{\sin(\angle \mathrm{AOB}) + \sin(\angle \mathrm{BOC}) + \sin(\angle \mathrm{COA})\}$
$= 12$

$\sin(\angle \mathrm{AOB}) + \sin(\angle \mathrm{BOC}) + \sin(\angle \mathrm{COA}) = 12 \times \frac{2}{15} = \frac{8}{5}$

정답 ③

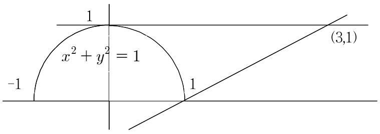
(6번)

$\cos x = X$, $\sin x = Y$라 하면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\rightarrow \quad X^2 + Y^2 = 1 \; (-1 \le X \le 1, 0 \le Y \le 1)$

주어진 함수는 $y = \dfrac{Y-1}{X-3}$ 이므로, y는 원 위의 점 (X, Y)와 $(3, 1)$을 잇는 직선의 기울기이다. 이를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



따라서 y의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$

정답 $\dfrac{1}{2}$

(7번)

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 등차수열이므로 수열 $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$ 역시 등차수열이다. 또한 주어진 식들을 정리하면 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n + T_n,$$
$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n - T_n$$

$S_n^2 - T_n^2 = (S_n + T_n)(S_n - T_n) = n^2(n+1)$

등차수열의 공차가 0일 때, 이 수열의 합은 n에 대한 1차식이고, 등차수열의 공차가 0이 아닐 때, 이 수열의 합은 상수항이 없는 n에 대한 2차식이다. 그런데 두 등차수열의 합 $S_n + T_n$, $S_n - T_n$을 곱한 값이 $n^2(n+1)$이므로, 수열 $\{a_n + b_n\}$의 공차는 0이라는 것을 알 수 있다. 즉, $a_n + b_n$은 일정한 값을 갖는다.

$(S_1 + T_1)(S_1 - T_1) = (a_1 + b_1)(a_1 - b_1) = 2 \quad \rightarrow \quad a_1 - b_1 = 1$
$a_1 + b_1 = 2$

$a_n + b_n = 2$, $S_n + T_n = 2n \quad \rightarrow \quad S_n - T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
$a_n - b_n = n$

$a_{20} - b_{20} = 20$, $a_{20} + a_{20} = 2$이므로 따라서

$a_{20} b_{20} = \dfrac{2^2 - 20^2}{4} = -99$

정답 ④

(8번)

$S_{n+1} + S_{n+2} = (a_{n+2})^2$
$S_n + S_{n+1} = (a_{n+1})^2$

두 식을 서로 빼주면 다음과 같은 결과가 나온다.

$a_{n+1} + a_{n+2} = (a_{n+2})^2 - (a_{n+1})^2$

이때, 각항이 양수이므로 $1 = a_{n+2} - a_{n+1}$이다. 여기서 $n=1$일 때, $1 = a_3 - a_2$이므로 이 점화관계는 a_2부터 적용가능하다. a_2의 값을 추론하면 다음과 같다.

$S_n + S_{n+1} = (a_{n+1})^2$에 $n=1$을 대입 $\quad \rightarrow \quad a_2^2 - a_2 - 20 = 0$
$a_2 = 5$

따라서 $a_{10} = 13$

정답 13

(9번)

로그함수의 정의역 및 점근선으로부터 $\dfrac{m}{2} < n$임을 알 수 있으며, 동시에 지수함수의 점근선으로부터 $n < m$ 역시 알 수 있다.
따라서 $n < m < 2n$ 이므로 이를 정리하여 계산하면 다음과 같다.

$a_n = (n+1) + (n+2) + \cdots + (2n-1)$
$= \dfrac{3}{2} n(n-1)$

$\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right)$

따라서 $\displaystyle\sum_{n-5}^{10} \frac{1}{a_n} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10}$

정답 ①

(10번)

$y=-2(x-t)+\frac{t+1}{2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{Q}\left(0, \frac{5t-1}{2}\right)$

$\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{1+\left(\frac{5t-1}{2}\right)^2}$

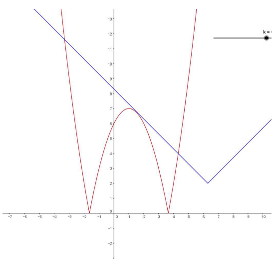
$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(t+1)^2+\left(\frac{t+1}{2}\right)^2}$

$\lim_{t\to INF} \frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{AP}}}=\sqrt{5}$

정답 ③

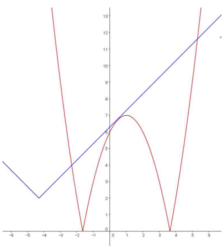
(11번)

case 1)



곡선 $y=x^2-2x-6$의 접선의 기울기가 1인 접점을 찾으면 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{27}{4}\right)$이므로, 해당 그래프에서의 접점은 $\left(\frac{3}{2}, \frac{27}{4}\right)$이다.
이를 함수 $y=|x-k|+2$에 대입하여 k값을 구하면 $k=\frac{25}{4}$

case 2)



곡선 $y=x^2-2x-6$의 접선의 기울기가 -1인 접점을 찾으면 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{27}{4}\right)$이므로, 해당 그래프에서의 접점은 $\left(\frac{1}{2}, \frac{27}{4}\right)$이다.
이를 함수 $y=|x-k|+2$에 대입하여 k값을 구하면
$k=-\frac{17}{4}$

따라서 두 수의 합은 2

정답 ②

(12번)

문제에서 주어진 대로 식을 정리하면 다음과 같다.

$\{f(x)\}^2-x^2f(x)=\{f(x)-x\}Q(x)+r(x)$ ($Q(x)$는 몫)

8차식을 4차식을 나누었기 때문에 나머지식인 $r(x)$는 삼차식이거나 최고차항이 그 이하인 다항함수이다. 즉, 식을 세워주면 $r(x)=ax^3+bx^2+cx+d$이다. 또한 $f(x)-x=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$이므로 이를 토대로 위의 식을 다시 한 번 정리하면 다음과 같다.

$\{f(x)\}^2-x^2f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)Q(x)+ax^3+bx^2+cx+d$
$ax^3+bx^2+cx+d=\{f(x)\}^2-x^2f(x)-(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)Q(x)$

해당식에 $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$을 차례대로 대입하면 다음과 같다.

$a+b+c+d=0$
$8a+4b+2c+d=-4$
$27a+9b+3c+d=-18$
$64a+16b+4c+d=-48$

아래에서 순서대로 연립해 빼주면 다음과 같다.

$7a+3b=c=-4$
$19a+5b+c=-14$
$37a+7b+c=-30$

한번 아래에서 순서대로 연립해 빼주면 다음과 같다.

$18a+2b=-16$
$12a+2b=-10 \quad \rightarrow \quad a=-1,\ b=1,\ c=d=0$

$r(x)=-x^3+x^2$

문제에서 요구하는 것이 함수 $r(x)$의 극댓값과 극솟값의 합이다.
극솟값은 0이고 극댓값은 $f\left(\frac{2}{3}\right)$, 즉 $\frac{4}{27}$이므로 더하면 $\frac{4}{27}$

정답 ⑤

(13번)

$f'(-1)=3(-1)(1)(2)=a \quad \rightarrow \quad a=-6$

$t=x^3,\ \dfrac{dt}{dx}=3x^2 \quad \rightarrow \quad f'(t)=(4t^3+18t^2+22t+6)\cdot 3x^2$

이때 $3x^2 \geq 0$이므로 $2t^3+9t^2+11t+3$의 부호를 살펴보면 다음과 같다.

$2t^3+9t^2+11t+3=(2t+3)(t^2+3t+1)$

방정식 $t^2+3t+1=0$의 한 근을 α라 하면, $y=f(t)$는 $t=\alpha$일 때
최솟값을 갖는다. 정리하면 다음과 같다.

$$f(\alpha)=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)=(\alpha^2+3\alpha)(\alpha^2+3\alpha+2)=-1 \quad (\because \alpha^2+3\alpha+1=0)$$

즉 $b=-1$이고, 따라서 $a^2+b^2=37$

정답 37

(14번)

상단의 식 $f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$을 식-(1), 하단의 식 $g(x+y)=g(x)g(y)+f(x)f(y)$을 식-(2)라고 하자. 그리고 오른쪽 식들을 통해 $f(1)=1,\ g(0)=1,\ g'(0)=0$임을 알 수 있다. 식-(1)에 $y=0$을 대입하면 다음과 같다.

$f(x)=g(0)f(x)+f(0)g(x)=f(x)+f(0)g(x)$

만약 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=0$일 경우 $g(0)=1$에 모순이다. 그러므로 $f(0)=0$이다.
이제 함수 $f(x)$의 도함수를 구하도록 하자. 식-(1)을 미분계수의 정의와 함께 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y} \\ &=\lim_{y\to 0}\frac{f(x)g(y)+f(y)g(x)-f(x)}{y} \\ &=\lim_{y\to 0}\frac{f(x)\{g(y)-1\}+g(x)f(y)}{y} \\ &=\lim_{y\to 0}\left[\frac{f(x)\{g(0+y)-g(0)\}}{y}+g(x)\times\frac{f(0+y)-f(0)}{y}\right] \\ &=g'(0)f(x)+f'(0)g(x) \\ &=f'(0)g(x)\ (\because g'(0)=0) \end{aligned}$$

함수 $g(x)$의 도함수 역시 식-(2)를 미분계수의 정의와 함께 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} g'(x)&=\lim_{y\to 0}\frac{g(x+y)-g(x)}{y} \\ &=\lim_{y\to 0}\frac{g(x)g(y)+f(x)f(y)-g(x)}{y} \\ &=\lim_{y\to 0}\frac{g(x)\{g(y)-1\}+f(x)f(y)}{y} \\ &=\lim_{y\to 0}\left[\frac{g(x)\{g(0+y)-g(0)\}}{y}+f(x)\times\frac{f(0+y)-f(0)}{y}\right] \\ &=g'(0)g(x)+f'(0)f(x) \\ &=f'(0)f(x)\ (\because g'(0)=0) \end{aligned}$$

정리하면 $f'(x)=f'(0)g(x),\ g'(x)=f'(0)f(x)$이다.

ㄱ (참)
첫 번째 과정을 통해 증명했다.

(문제의 원활한 풀이를 위해 ㄷ 선지부터 살펴보도록 하겠다.)

ㄷ (참)
함수 $h(x)$를 $h(x)=\{g(x)\}^2-\{f(x)\}^2$라고 하자. 해당 함수를 미분하면 $h'(x)=2g'(x)g(x)-2f'(x)f(x)$이다. 앞서 $f'(x)=f'(0)g(x),\ g'(x)=f'(0)f(x)$임을 보였으므로 이를 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h'(x)&=2g'(x)g(x)-2f'(x)f(x) \\ &=2f'(0)f(x)g(x)-2f'(0)g(x)f(x) \\ &=0 \end{aligned}$$

그러므로 $h'(x)=2g'(x)g(x)-2f'(x)f(x)=0$이다. 해당식을 적분하면 다음과 같다.

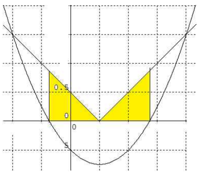
$h(x)=\{g(x)\}^2-\{f(x)\}^2=C$ (C는 적분상수)

그런데 $g(0)=1,\ f(0)=0$인 것을 토대로 $x=0$을 대입하면 $h(0)=1=C$임이 도출되므로 $h(x)=\{g(x)\}^2-\{f(x)\}^2=1$이다.

ㄴ (참)
ㄷ 선지를 통해 $\{g(x)\}^2-\{f(x)\}^2=1$임이 증명되었고, $\{g(x)\}^2=1+\{f(x)\}^2$임을 알 수 있다. 어떤 경우에도 $\{f(x)\}^2 \geq 0$이기 때문에 $\{g(x)\}^2 \geq 1$이다. 이 경우 $g(x)$를 $g(x) \geq 1$ 또는 $g(x) \leq -1$로 나눌 수 있다. 그러나 $g(0)=1$이기 때문에 $g(x) \leq -1$인 경우는 모순이다. 그러므로 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq 1$이다. 그리고 $g(0)=1,\ g'(0)=0$임을 통해 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극값을 가짐을 알 수 있다. 그런데 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq 1$이기 때문에 $g(x)$가 $x=0$에서 극솟값을 가짐을 파악할 수 있다.

정답 ⑤

(15번)



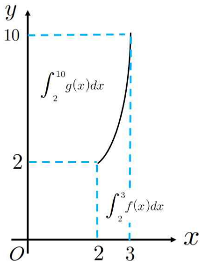
곡선 $y=x^2-2px+p-1$의 그래프는 대칭축이 $x=p$이므로, 해당 함수의 그래프와 $y=|x-p|$의 그래프는 위의 그림과 같다. 정적분의 값은 색칠된 영역의 넓이이므로 이를 이용해 계산하면
다음과 같다.

$$\int_\alpha^\beta |x-p|dx=\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$$
$$=p^2-(p-1)$$
$$=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

따라서 최솟값은 $p=\frac{1}{2}$일 때, $\frac{3}{4}$

정답 ⑤

(16번)



$$\int_2^{10} g(x)dx=(30-4)-\int_2^3 f(x)dx$$

$$\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\{(x-1)^3+(x-1)''dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}(x-1)^4+\frac{1}{2}(x-1)\right]_2^3$$
$$=\frac{21}{4}$$

$$\int_2^{10} g(x)dx=26-\frac{21}{4}=\frac{83}{4}$$

정답 ⑤

(17번)

먼저 식에 $y=0$을 대입한다. 그러면 $f(x)=f(x)-f(0)$, 즉 $f(0)=0$이라는 것을 알 수 있다.
이제 문제에 제시된 식의 양변을 $x-y$로 나누어준다.

$$\frac{f(x-y)}{x-y}=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}+3xy$$

이제 양변에 극한을 취해준다. 먼저 좌변부터 정리한다.
이때, $x-y$를 $x-y=t\to 0$으로 치환한다.

$$\lim_{x\to y}\frac{f(x-y)}{x-y}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0)$$

우변도 정리하면 다음과 같다.

$$\lim_{x\to y}\left\{\frac{f(x)-f(y)}{x-y}+3xy\right\}=f'(y)+3y^2$$

좌변 우변을 모두 정리하면 $f'(y)+3y^2=f'(0)$, y에 x를 대입하면 $f'(x)=-3x^2+f'(0)$이다. 문제에서 $f(x)$가 $x=2$에서 극댓값 a를 가진다고 했으므로 $f'(2)=0$이고, 이에 따라 $f'(0)=12$이며, 곧 $f'(x)=-3x^2+12$임을 알 수 있다.
이제 $f'(x)=-3x^2+12$를 적분해준다. 그러면 $f(x)=-x^3+12x+f(0)$이다. 그런데 위에서 이미 $f(0)=0$임을 알아냈으므로 $f(x)=-x^3+12x$이다.
$f(x)$가 $x=2$에서 극댓값 a를 갖고 $f'(0)=b$라고 했으므로 $a=16$, $b=12$이고 따라서 $a-b=4$

정답 ②

(18번)

절댓값을 풀어내면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-2t & (x<t) \\ x^2-2x+2t & (x \geq t) \end{cases}$$

$$g(t)=\begin{cases} 2t+3 & (t< -1) \\ t^2 & (-1 \leq t \leq 1) \\ 3-2t & (1<t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{2}} g(t)dt &= \int_0^1 t^2 dt + \int_1^{\frac{3}{2}} (3-2t)\,dt \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

따라서 $p+q=19$

정답 19