

제 2 교시

Ambitious Penguin

수학1 - 1. 지수와 로그

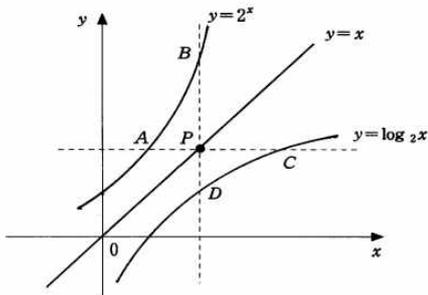
1. 세 실수 a, b, c 가 $abc \neq 0, ab+bc+ca=abc$ 를 만족시킨다.
 $\log_2 x = a, \log_3 x = b, \log_5 x = c$ 일 때, 양수 x 의 값은?

(2010학년도 경찰대학 2번)

- ① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

2. 아래 그림은 두 함수 $y=2^x, y=\log_2 x$ 의 그래프이다. 점 $P(2, 2)$ 에서 x 축과 y 축에 평행한 직선을 그어 함수 $y=2^x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B 라 하고, 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 C, D 라 한다. 이 때, $\triangle ADP$ 와 $\triangle BPC$ 의 면적의 비는? [3점]

(2003학년도 사관학교 이과 8번/문과 8번)



- ① 1 : 1 ② 1 : 2 ③ 1 : 3
 ④ 1 : 4 ⑤ 2 : 3

3. 세 양수 a, b, c 에 대하여

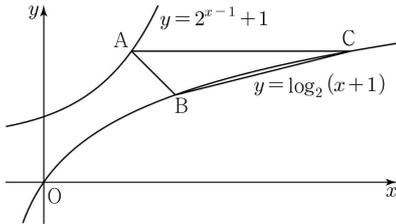
$$\begin{cases} \log_{ab} 3 + \log_{bc} 9 = 4 \\ \log_{bc} 3 + \log_{ca} 9 = 5 \\ \log_{ca} 3 + \log_{ab} 9 = 6 \end{cases}$$

이 성립할 때, abc 의 값은? [4점]

(2019학년도 경찰대학 6번)

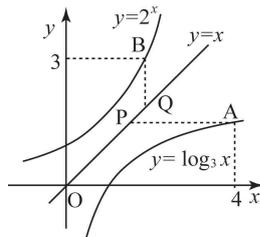
- ① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

4. 그림과 같이 곡선 $y = 2^{x-1} + 1$ 위의 점 A와 곡선 $y = \log_2(x+1)$ 위의 두 점 B, C에 대하여 두 점 A와 B는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이고, 직선 AC는 x 축과 평행하다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (p, q) 일 때, $p+q$ 의 값은? [4점]
(2016학년도 사관학교 A형 18번)



- ① $\frac{16}{3}$
- ② $\frac{17}{3}$
- ③ 6
- ④ $\frac{19}{3}$
- ⑤ $\frac{20}{3}$

5. 오른쪽 그림은 직선 $y = x$ 와 두 함수 $y = 2^x$, $y = \log_3 x$ 의 그래프이다. x 좌표가 4인 곡선 $y = \log_3 x$ 위의 점 A에서 y 축에 내린 수선이 직선 $y = x$ 와 만나는 점을 P라 하고, y 좌표가 3인 곡선 $y = 2^x$ 위의 점 B에서 x 축에 내린 수선이 직선 $y = x$ 와 만나는 점을 Q라 한다. 이때, $\overline{OP} \cdot \overline{OQ}$ 의 값은? (단, O는 원점) [4점]



- ① 4
- ② 5
- ③ 6
- ④ $4\sqrt{3}$
- ⑤ $6\sqrt{2}$

6. 방정식 $\sqrt{2016} x^{\log_{2016} x} = x^2$ 의 해의 곱을 N이라 할 때, N의 마지막 두 자리를 구하면?

(2016학년도 경찰대학 6번)

- ① 16
- ② 36
- ③ 56
- ④ 76
- ⑤ 96

7. 기울기가 -1 인 직선 l 이 곡선 $y = \log_2 x$ 와 만나는 점을 $A(a, b)$, 직선 l 이 곡선 $y = \log_4(x+2)$ 와 만나는 점을 $B(c, d)$ 라고 하자. $\overline{AB} = \sqrt{2}$ 일 때, $a+c$ 의 값은? (단, $1 < a < c$)
(2009학년도 경찰대학 19번)

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

8. $\log_{25}(a-b) = \log_5 a = \log_{15} b$ 를 만족시키는 두 양수 a, b 에 대하여 $\frac{b}{a}$ 의 값은? [3점]
(2013학년도 사관학교 문과 12번)

- ① $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$

9. 부등식

$$\log_2(x+y-4) + \log_2(x+y) \leq 1 + \log_2 x + \log_2 y$$

를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $7y-x$ 의 최댓값을 구하여라.
[3점]

(2013학년도 사관학교 문과 26번)

10. $a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 함수 $f(x) = a^{2x} + 4a^x - 2$ 가 구간 $[-1, 1]$ 에서 최댓값 10을 갖는다. 구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은? [4점]

(2021학년도 경찰대학 12번)

- ① $\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ 1

11. x, y 에 대한 연립방정식

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_2 \frac{1}{y} = 1 \\ \log_9 3x + \log_{\frac{1}{2}} y = 1 - \frac{k}{2} \end{cases}$$

의 해를 $x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때, $\alpha \leq \beta$ 를 만족시키는 정수 k 의 최댓값은? [3점]

(2012학년도 사관학교 문과 12번)

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

12. 방정식 $7^{\log_3 x} \cdot x^{\log_3 5x} = 1$ 의 모든 근의 합이 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값은? (단, p, q 는 서로소인 양의 정수이다.)

(2010학년도 경찰대학 17번)

- ① 81 ② 71 ③ 61 ④ 51 ⑤ 41

13. 다음 등식을 만족시키는 세 실수 a, b, c 가 있다.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^a = 2a, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{2b} = b, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2c} = c$$

이때, 세 실수 a, b, c 의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [4점]
(2010학년도 사관학교 이과 24번/문과 24번)

- ① $a < b < c$ ② $a < c < b$ ③ $b < a < c$
- ④ $b < c < a$ ⑤ $c < a < b$

14. $0 < a < b < 1$ 일 때, 직선 $y=1$ 이 $y=\log_a x$ 의 그래프와 $y=\log_b x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 직선 $y=-1$ 이 $y=\log_a x$ 의 그래프와 $y=\log_b x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. 네 직선 PS, PR, QS, QR의 기울기를 각각 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 할 때, 다음 중 옳은 것은? [4점]
(2012학년도 사관학교 이과 23번/문과 23번)

- ① $\delta < \alpha < \beta < \gamma$ ② $\gamma < \alpha < \delta < \beta$
- ③ $\gamma < \alpha < \beta < \delta$ ④ $\gamma < \alpha = \delta < \beta$
- ⑤ $\alpha = \delta < \beta < \gamma$

15. 자연수 n 에 대하여 $2^n \leq x \leq 2^{n+10}$ 에서 $|\log_2 x - 2n|$ 의 최댓값을 a_n 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값을 구하시오. [4점]
(2009학년도 사관학교 문과 30번)
16. 두 곡선 $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$ 와 직선 $x = 32$ 로 둘러싸인 영역에 포함되는 x, y 좌표가 모두 정수인 점의 개수는? (단, 경계 위의 점은 제외한다.)
(2006학년도 경찰대학 18번)

- ① 29 ② 31 ③ 33 ④ 35 ⑤ 37

수학 1 - 2. 삼각함수

17. 방정식 $\frac{1}{3} \log_2 x = \cos 3\pi x$ 를 만족시키는 실수 x 의 개수는?
(2011학년도 경찰대학 11번)

- ① 22
- ② 23
- ③ 24
- ④ 25
- ⑤ 26

18. $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 방정식 $\tan 2x \sin 2x = \frac{3}{2}$ 의 모든 해의 합은? [3점]
(2020학년도 사관학교 가형 12번)

- ① 2π
- ② $\frac{5}{2}\pi$
- ③ 3π
- ④ $\frac{7}{2}\pi$
- ⑤ 4π

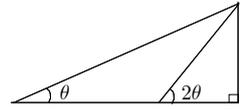
19. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\cos^2 3x - \sin 3x + 1 = 0$ 의 모든 실근의 합은? [3점]
(2021학년도 사관학교 가형 10번)

- ① $\frac{3}{2}\pi$
- ② $\frac{7}{4}\pi$
- ③ 2π
- ④ $\frac{9}{4}\pi$
- ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

20. $0 < \theta < \pi$ 일 때, $\sin 3\theta = \cos 5\theta$ 를 만족하는 θ 의 개수는?
(2007학년도 경찰대학 6번)

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

21. 오른쪽 그림을 이용하여 $\cos 2\theta$ 의 값을 $\cos \theta$ 를 써서 나타낼 때, 다음 중 옳은 것은? (단, $0^\circ < \theta < 45^\circ$)
(2006학년도 경찰대학 9번)



- ① $\cos^2 \theta$ ② $1 - \cos^2 \theta$
③ $1 + \cos^2 \theta$ ④ $1 - 2\cos^2 \theta$ ⑤ $2\cos^2 \theta - 1$

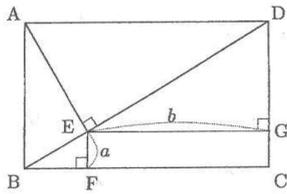
22. 3, 5-x, 2+x 를 세 변으로 하는 삼각형의 넓이의 최댓값은?
(2000학년도 경찰대학 17번)

23. 함수 $y = a \cos^2 x + a \sin x + b$ 의 최댓값이 10이고 최솟값이 1 일 때, 실수 a, b의 곱 ab의 값은 p 또는 q이다. p+q의 값은?
[4점]

(2014학년도 경찰대학 7번)

- ① -4
 - ② -2
 - ③ 2
- ④ 4
 - ⑤ 6

24. 오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의 꼭짓점 A에서 대각선 BD에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 두 변 BC와 CD에 내린 수선의 발을 각각 F와 G라 하자. $\overline{EF} = a$ 이고 $\overline{EG} = b$ 일 때, 대각선 BD의 길이는?
(2011학년도 경찰대학 12번)



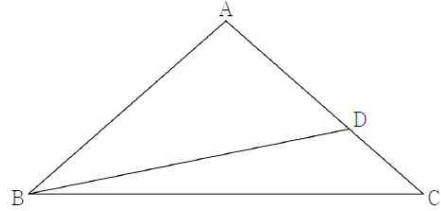
- ① $\sqrt{2}(a+b)$ ② $2\sqrt{a^2+b^2}$ ③ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$
- ④ $\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right)^3$ ⑤ $\left(\frac{2}{a^3} + \frac{2}{b^3}\right)^{\frac{3}{2}}$

25. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형 ABC에서 선분 AC를 5 : 3으로 내분하는 점을 D라 하자.

$$2\sin(\angle ABD) = 5\sin(\angle DBC)$$

일 때, $\frac{\sin C}{\sin A}$ 의 값은? [4점]

(2021학년도 사관학교 나형 19번)



- ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{7}{11}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{9}{13}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

수학 1 - 3. 수열

26. 자연수 n 에 대하여 두 함수 $f(x), g(x)$ 를

$$f(x) = x^2 - 6x + 7,$$

$$g(x) = x + n$$

이라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 가 만나는 두 점 사이의 거리를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n^2$ 의 값은? [3점]

(2016학년도 사관학교 A형 12번)

- ① 780 ② 800 ③ 820 ④ 840 ⑤ 860

27. 서로 다른 두 수 x, y 에 대하여 다음 두 수열이 모두 등차 수열을 이룬다.

I) x, a, b, y	II) x, c, d, e, y
-----------------	---------------------

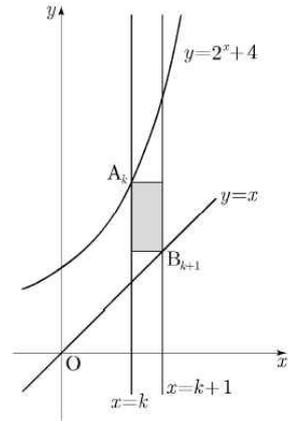
이때, $\frac{a-b}{c-e}$ 의 값은? [2점]

(2005학년도 사관학교 문과 3번)

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

28. 그림과 같이 좌표평면에서 직선 $x=k$ 가 곡선 $y=2^x+4$ 와 만나는 점을 A_k 라 하고, 직선 $x=k+1$ 이 직선 $y=x$ 와 만나는 점을 B_{k+1} 이라 하자. 선분 $A_k B_{k+1}$ 을 대각선으로 하고 각 변은 x 축 또는 y 축에 평행한 직사각형의 넓이를 S_k 라 할 때, $\sum_{k=1}^8 S_k$ 의 값은? [3점]

(2015학년도 사관학교 A형 13번)



- ① 494 ② 496 ③ 498 ④ 500 ⑤ 502

29. 모든 항이 양수이고 공비가 서로 같은 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n b_n = \frac{(a_{n+1})^2 + 4(b_{n+1})^2}{5}$$

를 만족시킬 때, 공비의 최댓값은? [4점]
(2021학년도 경찰대학 7번)

- ① $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 1

30. 0이 아닌 세 실수 a, b, c 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b+c$ 의 값은? [3점]

(2014학년도 사관학교 A형 10번)

- (가) a, b, c 는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
(나) $ab=c$
(다) $a+3b+c = -3$

- ① -21 ② -18 ③ -15 ④ -12 ⑤ -9

31. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 을 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = \log_2(n!), \quad b_n = a_{n+1} - a_n$$

으로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

(2010학년도 사관학교 이과 7번/문과 7번)

- < 보 기 >
- ㄱ. $b_{15} = 4$
 ㄴ. $9 < \sum_{k=1}^5 b_k < 10$
 ㄷ. n 이 짝수일 때 b_n 의 값은 무리수이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

32. $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 직선 $x = n$ 이 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x - m)$ 의 그래프와 한 점에서 만나고, 직선 $y = n$ 이 함수 $y = |2^{-x} - m|$ 의 그래프와 두 점에서 만나도록 하는 모든 자연수 m 의 값의 합을 a_n 이라 하자. $\sum_{n=5}^{10} \frac{1}{a_n}$ 의 값은? [5점]
(2021학년도 경찰대학 17번)

- ① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{30}$ ④ $\frac{1}{40}$ ⑤ $\frac{1}{50}$

33. $\sum_{k=1}^{20} (2k+1) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{20} \right)$ 의 값은?
(2013학년도 경찰대학 16번)

- ① 250 ② 254 ③ 258 ④ 262 ⑤ 266

34. 1보다 큰 자연수 k 에 대하여 $y = k \cdot 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a_k 만큼 평행이동하면 $y = 2^x$ 의 그래프와 일치한다. 이때, $\sum_{n=1}^{10} a_{2n} = \log_2 m$ 을 만족시키는 자연수 m 의 값은?

(2009학년도 경찰대학 15번)

- ① $2 \cdot 10!$ ② $2^9 \cdot 10!$ ③ $2^{10} \cdot 10!$
④ $2^9 \cdot 20!$ ⑤ $2^{10} \cdot 20!$

35. 다음을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{20} 의 값은?
 $a_1 = 0, \quad n^2 a_{n+1} = (n+1)^2 a_n + 2n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

(2009학년도 경찰대학 18번)

- ① 399 ② 400 ③ 401 ④ 402 ⑤ 403

36. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 등식

$$\sum_{k=1}^n k^2 \left\{ \frac{1}{k(2k+1)} + \frac{1}{(k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(k+2)(2k+5)} + \dots + \frac{1}{n(2n+1)} \right\} = \frac{n(n+3)}{12}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

(1) $n = 1$ 일 때 (좌변) = $\frac{1}{3}$, (우변) = $\frac{1}{3}$ 이므로

주어진 등식은 성립한다.

(2) $n = m$ 일 때 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m k^2 \left\{ \frac{1}{k(2k+1)} + \frac{1}{(k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(k+2)(2k+5)} + \dots + \frac{1}{m(2m+1)} \right\} = \frac{m(m+3)}{12}$$

이제, $n = m+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 \left\{ \frac{1}{k(2k+1)} + \frac{1}{(k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(k+2)(2k+5)} + \dots + \frac{1}{(m+1)(2m+3)} \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^m k^2 \left\{ \frac{1}{k(2k+1)} + \frac{1}{(k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(k+2)(2k+5)} + \dots + \frac{1}{(m+1)(2m+3)} \right\} + \frac{(가)}{2m+3}$$

$$= \sum_{k=1}^m k^2 \left\{ \frac{1}{k(2k+1)} + \frac{1}{(k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(k+2)(2k+5)} + \dots + \frac{1}{(나)} \right\} + \frac{1}{(m+1)(2m+3)} \sum_{k=1}^m k^2 + \frac{(가)}{2m+3}$$

$$= \frac{m(m+3)}{12} + \frac{1}{(m+1)(2m+3)} \sum_{k=1}^{m+1} (다)$$

$$= \frac{(m+1)(m+4)}{12}$$

그러므로 $n = m+1$ 일 때도 성립한다.

따라서 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례대로 나열한 것은? [4점]

(2009학년도 사관학교 이과 15번/문과 15번)

	(가)	(나)	(다)
①	m	$(m+1)(2m+3)$	$(k-1)^2$
②	m	$m(2m+1)$	$(k-1)^2$
③	$m+1$	$m(2m+1)$	$(k-1)^2$
④	$m+1$	$(m+1)(2m+3)$	k^2
⑤	$m+1$	$m(2m+1)$	k^2

37. 다음은 각 항이 정수이고 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 a_2 a_3 a_4 + d^4$ 이 어떤 정수의 제곱임을 증명하는 과정이다.

[증명]
 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로
 $a_1 = a - 3k, a_2 = a - k, a_3 = a + k, a_4 = a + 3k$
 이 성립하도록
 $a = \boxed{\text{(가)}}$, $k = \boxed{\text{(나)}}$
 를 택하면
 $a_1 a_2 a_3 a_4 + d^4 = (\boxed{\text{(다)}})^2$
 이 성립한다.
 이 때, $\boxed{\text{(다)}} = a_2^2 + a_2 d - d^2$ 이고,
 a_2 와 d 는 정수이므로 $a_1 a_2 a_3 a_4 + d^4$ 는 정수의 제곱이 된다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓰면? [4점]

(2006학년도 사관학교 이과 6번/문과 19번)

- | | (가) | (나) | (다) |
|---|-----------------------|---------------|--------------|
| ① | $\frac{a_2 + a_3}{2}$ | $\frac{d}{2}$ | $a^2 - 5k^2$ |
| ② | $\frac{a_2 + a_3}{2}$ | $\frac{d}{2}$ | $a^2 - 3k^2$ |
| ③ | $\frac{a_2 + a_3}{2}$ | $\frac{d}{4}$ | $a^2 - 5k^2$ |
| ④ | $\frac{a_1 + a_4}{2}$ | $\frac{d}{2}$ | $a^2 - 3k^2$ |
| ⑤ | $\frac{a_1 + a_4}{2}$ | $\frac{d}{4}$ | $a^2 - 3k^2$ |

38. 좌표평면에서 자연수 k 에 대하여 네 부등식

$x > 0, y > 0, y < 2^{-x} + k, x < k + \frac{1}{2}$ 을 모두 만족하는 영역에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수인 점의 개수를 $N(k)$ 라 하자. $\sum_{k=1}^{10} N(k)$ 의 값은? [4점]

(2007학년도 사관학교 문과 16번)

- ① 55 ② 125 ③ 144 ④ 252 ⑤ 385

39. 첫째항이 1이고 공비가 r ($r > 0$)인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

함수 $f(x) = \sum_{n=1}^{17} |x - a_n|$ 은 $x = 16$ 에서 최솟값을 갖는다.

그 최솟값을 m 이라 할 때, rm 의 값은? [5점]

(2018학년도 경찰대학 19번)

- ① $15(30 + 31\sqrt{2})$ ② $15(31 + 30\sqrt{2})$ ③ $15(31 - 15\sqrt{2})$
 ④ $30(31 - 15\sqrt{2})$ ⑤ $30(31 + 15\sqrt{2})$

40. 자연수 n 에 대하여 원 $x^2 + y^2 = n^2$ 과 곡선 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$)이

서로 다른 네 점에서 만날 때, 이 네 점을 꼭짓점으로 하는 직사각형을 만든다. 이 직사각형에서 긴 변의 길이가 짧은 변의

길이의 2배가 되도록 하는 k 의 값을 $f(n)$ 이라 하자. $\sum_{n=1}^{12} f(n)$

의 값을 구하시오. [4점]

(2017학년도 사관학교 나형 29번)

41. 실수 r ($|r| < 1$)에 대하여 $f(r) = \frac{1}{1-r}$ 일 때,

$$\left| f(-0.1) - 1 - \sum_{k=1}^n (-0.1)^k \right| < 10^{-7}$$

을 만족시키는 가장 작은 자연수 n 의 값은?

(2010학년도 경찰대학 14번)

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

42. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 을 다음과 같이 정의하자.

(가) $a_1 = 0, b_1 = 2$
 (나) n 이 짝수이면
 $a_n = a_{n-1} + \frac{b_{n-1}}{n}, b_n = b_{n-1} - \frac{b_{n-1}}{n}$ 이다.
 (다) n 이 1보다 큰 홀수이면
 $a_n = a_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{n}, b_n = b_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{n}$ 이다.

$a_{41} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값은? (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

(2013학년도 사관학교 이과 23번/문과 23번)

- ① 79 ② 80 ③ 81
- ④ 82 ⑤ 83

수학2 - 1. 함수의 극한과 연속

43. 함수

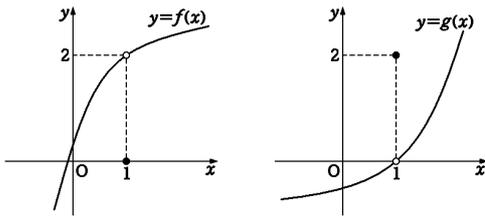
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+7}-a}{x-2} & (x \neq 2) \\ b & (x = 2) \end{cases}$$

가 $x=2$ 에서 연속일 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)
[3점]

(2018학년도 사관학교 나형 10번)

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

44. 두 함수 $f(x), g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

(2014학년도 사관학교 A형 15번)

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)+g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.
 ㄴ. 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.
 ㄷ. 함수 $\frac{f(x)+ax}{g(x)+bx}$ 가 $x=1$ 에서 연속이면 $a+b = -4$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

45. 삼차함수 $f(x)$ 가 다음을 만족할 때,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$$

$f(x)=0$ 의 모든 근의 합은?

(2003학년도 경찰대학 11번)

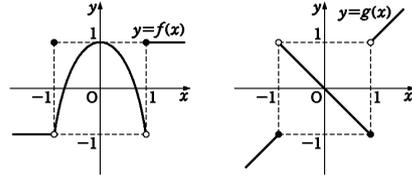
- ① 3 ② $\frac{11}{3}$ ③ $\frac{13}{3}$ ④ 5 ⑤ $\frac{17}{3}$

46. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 10 & (x \leq a) \\ \frac{x^2 + ax + 4a}{x - a} & (x > a) \end{cases}$$

가 $x = a$ 에서 연속일 때, $f(2a)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [4점]
 (2021학년도 사관학교 나형 26번)

47. 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]
 (2012학년도 사관학교 이과 11번/문과 10번)

< 보 기 >

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow -1} g(f(x)) = 1$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow -1} f(g(x)) = -1$

ㄷ. 함수 $y = f(g(x))$ 의 불연속점의 개수는 2개이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

48. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 4$, $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x-4} = 2$ 를 만족시키는 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x) = 0$ 이 구간 $[2, 4]$ 에서 적어도 m 개의 서로 다른 실근을 갖는다. m 의 값은? [3점]
(2021학년도 경찰대학 4번)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

49. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3 - 2x^2 + 3x - 4} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 3x + 2} = 4$$

이 성립하고, 극한 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{13f(x)}{x^2 - 3x + 2}$ 이 α 로 수렴할 때, 상수 α 의 값을 구하시오. [3점]

(2006학년도 사관학교 이과 29번)

수 학 2 - 1. 미 분

50. 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = 5, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-k}{x-2} = 13$$

일 때, 상수 k 의 값은? [3점]

(2014학년도 경찰대학 4번)

- ① 6 ② 7 ③ 8
- ④ 9 ⑤ 10

51. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이다.
- (나) 함수 $f(x)$ 는 극댓값 7을 갖는다.

$f(1) = 2$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 극솟값은? [4점]

(2021학년도 사관학교 나형 15번)

- ① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

52. 자연수 n 에 대하여 삼차함수 $y = n(x^3 - 3x^2) + k$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 개수가 3이 되도록 하는 정수 k 의 개수를

a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값은? [4점]

(2019학년도 사관학교 나형 16번)

- ① 195 ② 200 ③ 205 ④ 210 ⑤ 215

53. 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$x^4 - 4x^3 + 12x \geq 2x^2 + a$$

가 성립할 때, 실수 a 의 최댓값은? [3점]

(2017학년도 사관학교 13번)

- ① -11 ② -10 ③ -9 ④ -8 ⑤ -7

54. 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x - x^2) - f(0)}{x} = \frac{1}{3}$$

일 때, $f'(0)$ 의 값은?

(2012학년도 경찰대학 5번)

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

55. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2 + 1} = 1$ 을 만족하는 다항함수

$f(x)$ 에 대하여 $f(2)$ 를 구하면?

(2004학년도 경찰대학 19번)

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

56. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) + f(x) + 12}{x-1} = 12$$

를 만족할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 y 절편은? [3점]

(2007학년도 사관학교 이과 10번)

- ① -12 ② -10 ③ -8 ④ -6 ⑤ -4

57. 실수전체의 집합에서 정의된 다항함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하고, 모든 실수 x 에 대하여 $f(2x) = 2f(x)$ 를 만족한다. 이 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & (x \neq 0) \\ f'(0) & (x=0) \end{cases}$$

으로 정의하자. [보기]에서 함수 $g(x)$ 에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

(2006학년도 사관학교 이과 15번)

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄴ. 모든 실수 x 에 대하여 $g(2x) = g(x)$ 이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$ 는 일차함수이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

58. 최고차항의 계수가 1 이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(6)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]
(2018학년도 사관학교 나형 20번)

(가) $f(2) = f'(2) = 0$
(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq -3$ 이다.

- ① 128 ② 144 ③ 160 ④ 176 ⑤ 192

59. 다음을 만족시키는 한 자리 자연수 a 의 개수는?
(2013학년도 경찰대학 19번)

방정식 $x^3 - x^2 - ax - 3 = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가진다.

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

60. 곡선 $f(x) = x^4 - 3x^2 + 6x + 1$ 위의 서로 다른 두 점에서 접하는 직선의 방정식은?
 (2012학년도 경찰대학 24번)

- ① $y = 6x - \frac{5}{4}$ ② $y = 3x - \frac{5}{2}$ ③ $y = 6x + \frac{5}{4}$
 ④ $y = 3x + \frac{5}{4}$ ⑤ $y = 3x + \frac{5}{2}$

61. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq a) \\ 2a - f(x) & (f(x) < a) \end{cases} \quad (a \text{는 상수})$$

라 하자. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 $x = 4$ 에서만 미분가능하지 않다.
 (나) 함수 $g(x) - f(x)$ 는 $x = \frac{7}{2}$ 에서 최댓값 $2a$ 를 가진다.

$f\left(\frac{5}{2}\right)$ 의 값은? [4점]

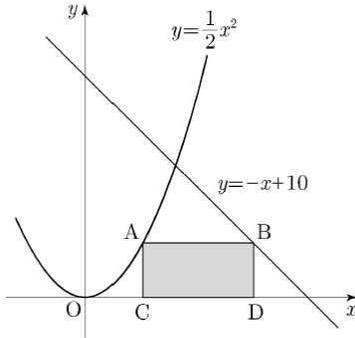
(2020학년도 사관학교 나형 20번)

- ① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ 2 ⑤ $\frac{9}{4}$

62. 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 위의 점 중에서 제1

사분면에 있는 점 $A\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ 을 지나고 x 축에 평행한 직선이 직선 $y = -x + 10$ 과 만나는 점을 B라 하고, 두 점 A, B에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. 직사각형 ACDB의 넓이가 최대일 때, $10t$ 의 값을 구하시오. (단, 점 A의 x 좌표는 점 B의 x 좌표보다 작다.) [4점]

(2015학년도 사관학교 A형 28번)



63. 다항함수 $g(x)$ 와 자연수 k 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \leq 0) \\ g(x) & (0 < x < 2) \\ k(x-2)+1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 미분가능하도록 하는 가장 낮은 차수의 다항함수 $g(x)$ 에 대하여 $\frac{1}{4} < g(1) < \frac{3}{4}$ 일 때, k 의 값을 구하여라. [4점]

(2019학년도 경찰대학 24번)

64. 함수 $f(x) = x + (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 에 대하여
 $\{f(x)\}^2 - x^2 f(x)$ 를 $f(x) - x$ 로 나눈 나머지를 $r(x)$ 라 하자. 함수 $r(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 합은? [4점]
 (2017학년도 경찰대학 12번)

- ① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{4}{27}$

65. $a \leq 35$ 인 자연수 a 와 함수 $f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 4$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를
 $g(x) = |f(x) - a|$
 라 할 때, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = b (b > 0)$ 이 서로 다른 4 개의 점에서 만난다.
 (나) 함수 $|g(x) - b|$ 가 미분가능하지 않은 실수 x 의 개수는 4 이다.

두 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하시오. [4점]
 (2018학년도 사관학교 나형 30번)

수 학 2 - 1. 적 분

66. 함수 $f(x)$ 가 다음 두 식

$$f(x+2) = -f(x), \quad \int_0^2 f(x) dx = 1$$

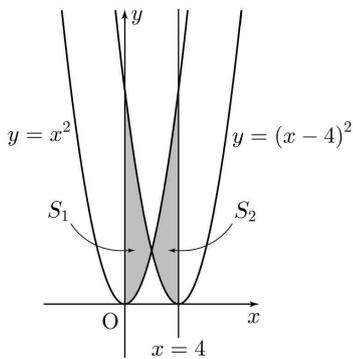
을 만족할 때, $\int_{-2}^4 f(x) dx$ 의 값을 구하면?

(2002학년도 경찰대학 14번)

67. 두 곡선 $y = x^2$, $y = (x-4)^2$ 와 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 두 곡선 $y = x^2$, $y = (x-4)^2$ 와 직선 $x = 4$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 할 때, $S_1 + S_2$ 의 값은? [3점]

(2020학년도 사관학교 나형 9번)

- ① 30
- ② 32
- ③ 34
- ④ 36
- ⑤ 38



68. 함수 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ 가 있다. 등식

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = f(-a) + f(a)$$

를 만족시키는 실수 a 에 대하여 $3a^2$ 의 값을 구하여라. [3점]

(2014학년도 사관학교 A형 25번)

69. $f(x) = x^3 + (x+a)^2$ 와 $x=1$ 과 x 축, y 축으로 둘러싸인 넓이가 최소가 될 때의 a 의 값은?
 (2002학년도 경찰대학 19번)

71. 최고차항의 계수가 양수인 5 차 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(0) = 15$ 이고, $y = f'(x)$ 의 그래프는 $x=1, x=-1$ 에서 x 축과 접한다. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{20x} \int_0^x f(t) dt = -1$ 일 때, $f(1)$ 의 값을 구하시오. [4점]
 (2003학년도 사관학교 문과 26번)

70. 정적분 $\int_2^6 \frac{x^2(x^2+2x+4)}{x+2} dx + \int_6^2 \frac{4(y^2+2y+4)}{y+2} dy$ 의 값을 구하시오. [3점]
 (2009학년도 사관학교 이과 26번)

72. 임의의 두 실수 x, y 에 대하여

$$f(x-y) = f(x) - f(y) + 3xy(x-y)$$

를 만족시키는 다항함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극댓값 a 를 가진다.

$f'(0)=b$ 일 때, $a-b$ 의 값은? [5점]

(2020학년도 경찰대학 17번)

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

73. 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오. [4점]

(2019학년도 사관학교 나형 28번)

$$(가) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2} \int_{-2}^x f(t) dt = 12$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x} = 1$$

74. 모든 실수 x 에서 정의된 함수 $f(x) = \int_1^x (x^2 - t) dt$ 에 대하여
 직선 $y = 6x - k$ 가 곡선 $y = f(x)$ 에 접할 때, 양수 k 의 값은?
 [3점]
 (2013학년도 사관학교 이과 14번/문과 14번)

- ① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

75. 세 다항함수 $f(x), g(x), h(x)$ 에 대하여 <보기>에서 옳은
 것을 모두 고른 것은 ? (단, a, b 는 상수) [3점]
 (2005학년도 사관학교 이과 5번)

< 보 기 >

ㄱ. $a \leq x \leq b$ 인 모든 x 에 대하여 $f(x) \leq g(x)$ 이면
 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ 이다.

ㄴ. $a \leq x \leq b$ 인 모든 x 에 대하여
 $\int_a^b |f(x)| dx \leq \left| \int_a^b f(x) dx \right|$ 이다.

ㄷ. 임의의 실수 x 에 대하여 $h(-x) = h(x)$ 이고
 $\int_0^a h(x) dx = \omega$ 이면 $\int_{-a}^a (x-1)h(x) dx = -2\omega$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

76. 곡선 $y = x^3$ 에 있는 점 $A(a, a^3)$ 에서의 접선이 이 곡선과 점 B에서 만나고, 점 B에서의 접선은 이 곡선과 점 C에서 만난다고 하자. 선분 BC와 이 곡선 사이의 넓이를 선분 AB와 이 곡선 사이의 넓이로 나눈 값은? (단, $a \neq 0$ 이다.)
(2013학년도 경찰대학 23번)

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

77. 좌표평면 위의 점 $P\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ 에서 곡선 $y = x^2$ 에 그은 두 접선을 l, m 이라 할 때, 두 접선 l, m 과 곡선 $y = x^2$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]
(2014학년도 경찰대학 14번)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

78. 0이 아닌 실수 k 에 대하여 다항함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가
 $f'(x) = 3(x-k)(x-2k)$

이다. 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 4) \\ \frac{f(4)-f(1)}{3}(x-1)+f(1) & (1 < x < 4) \end{cases}$$

의 역함수가 존재하도록 하는 모든 실수 k 의 값의 범위가
 $\alpha \leq k < \beta$ 일 때, $\beta - \alpha$ 의 값은? [4점]

(2021학년도 사관학교 나형 20번)

- ① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

79. 함수 $f(x) = (x-1)^4(x+1)$ 에 대하여 이차함수 $g(x), h(x)$ 가

$$f(x) = g(x) + \int_0^x (x-t)^2 h(t) dt$$

를 만족시킬 때, $g(2) + h(2)$ 의 값을 구하시오. [5점]

(2018학년도 경찰대학 25번)

80. 실수 전체의 집합에서 정의된 다항함수 $f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

I. $f(1) = 25$

II. $f(x) = \frac{1}{2} \int_x^{x+1} f(t) dt - \frac{1}{2} \int_x^{x-1} f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt$

III. 임의의 실수 x, y 에 대하여
 $f(x+y) + f(x-y) = 2\{f(x) + f(y)\}$

이때, 미분계수 $f'(1)$ 의 값을 구하시오. [4점]

(2005학년도 사관학교 이과 26번)

81. 두 함수 $f(x) = x^4(x-a)$, $g(x) = k(x-1)(x-b)$ 의 그래프가 직선 $y = x-1$ 에 접한다. 함수 $f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 함수 $g(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같을 때, 세 상수 a, b, k 에 대하여 abk 의 값은? (단, $b > 1$) [5점]

(2021학년도 경찰대학 18번)

- ① $-2 - \sqrt{5}$ ② $-1 - \sqrt{5}$ ③ $-\sqrt{5}$
 ④ $1 - \sqrt{5}$ ⑤ $2 - \sqrt{5}$

[정답]

- 1번: ③
- 2번: ④
- 3번: ③
- 4번: ⑤
- 5번: ①
- 6번: ③
- 7번: ⑤
- 8번: ②
- 9번: 32
- 10번: ①
- 11번: ③
- 12번: ②
- 13번: ①
- 14번: ②
- 15번: 75
- 16번: ⑤
- 17번: ④
- 18번: ⑤
- 19번: ⑤
- 20번: ①
- 21번: ⑤
- 22번: $\frac{3\sqrt{10}}{2}$
- 23번: ①
- 24번: ⑤
- 25번: ③
- 26번: ⑤
- 27번: ③
- 28번: ③
- 29번: ③
- 30번: ①
- 31번: ⑤
- 32번: ①
- 33번: ①
- 34번: ③
- 35번: ①
- 36번: ⑤
- 37번: ①
- 38번: ⑤
- 39번: ①
- 40번: 195
- 41번: ④
- 42번: ③
- 43번: ①
- 44번: ②
- 45번: ③
- 46번: 6
- 47번: ⑤
- 48번: ③
- 49번: 65

- 50번: ①
- 51번: ⑤
- 52번: ④
- 53번: ③
- 54번: ①
- 55번: ③
- 56번: ②
- 57번: ③
- 58번: ①
- 59번: ④
- 60번: ①
- 61번: ②
- 62번: 25
- 63번: 3
- 64번: ⑤
- 65번: 36
- 66번: -1
- 67번: ②
- 68번: 14
- 69번: $-\frac{1}{2}$
- 70번: 288
- 71번: -12
- 72번: ②
- 73번: 42
- 74번: ⑤
- 75번: ④
- 76번: ③
- 77번: ④
- 78번: ④
- 79번: 57
- 80번: 50
- 81번: ②