아드레날린 ex
공통

1. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이고 $a_{12} = \dfrac{1}{2}$일 때, $a_1 + a_4$의 값은? [2022학년도 6월 09]

① $\dfrac{3}{4}$ ② $\dfrac{9}{4}$ ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ $\dfrac{17}{4}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

1. 정답 ⑤ 〔2022학년도 6월 09〕

1) 자연수 보이면 숫자 넣기

일단 수열이 보이네요. $a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$ 라고 합니다. 이때 $a_{12}=\dfrac{1}{2}$라고 하네요. 그냥 고민없이 숫자 넣어봐야겠죠? 천천히 $n=1$부터 넣어봅시다.

$a_2=\dfrac{1}{a_1},\ a_3=8a_2=\dfrac{8}{a_1},\ a_4=\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{a_1}{8},\ a_5=8a_4=a_1,\ a_6=\dfrac{1}{a_5}=\dfrac{1}{a_1},\ a_7=8a_6=\dfrac{8}{a_1},\ a_8=\dfrac{1}{a_7}=\dfrac{a_1}{8}$

지금 보면 반복되고 있는 거 보이시죠? $a_1,\ \dfrac{1}{a_1},\ \dfrac{8}{a_1},\ \dfrac{a_1}{8}$가 계속 반복해서 나타나고 있잖아요. 4를 주기로 반복되네요.

2) 규칙 보이면 일반화

그러면 a_{12}는? 4를 주기로 반복되니까 $a_4=a_8=a_{12}$가 되겠네요. $\dfrac{a_1}{8}=\dfrac{1}{2}$이고 $a_1=4$입니다. $a_4=\dfrac{1}{2}$이죠? 따라서 $a_1+a_4=\dfrac{9}{2}$입니다. 답은 ⑤번이네요.

2. 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\ f(1)=1,\ \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)dx$의 값은?

〔2022학년도 6월 11〕

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0 \le x \le 1) \end{cases}$ (나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$　② $\frac{17}{6}$　③ $\frac{19}{6}$　④ $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{23}{6}$

2. 정답 ② 〔2022학년도 6월 11〕

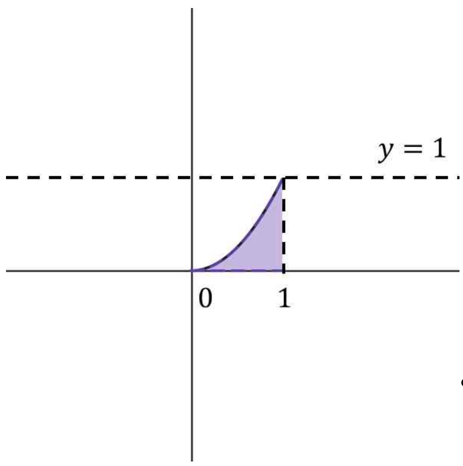
1) 문제해석, 조건해석

$0 \le x \le 1$에서 연속인 함수 $f(x)$가 있는데 $f(0)=0$, $f(1)=1$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$이라고 합니다. 그때 $g(x)$가 있는데 (가)조건에서 $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0 \le x \le 1) \end{cases}$ 라고 하네요. (나)조건에서는 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$라고 하구요.

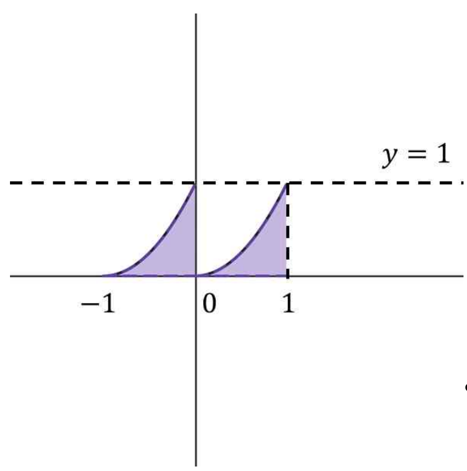
(가)조건부터 해석해봅시다. 일단 $g(x)$는 $0 \le x \le 1$에서 $f(x)$와 같아요. 그런데 $-1<x<0$에서는 $f(x)$를 왼쪽으로 1만큼 움직인 다음에, (−)를 곱해서 뒤집고, 위로 1만큼 올린 함수에요. 일단 아주 대충 그래프를 그려볼게요.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

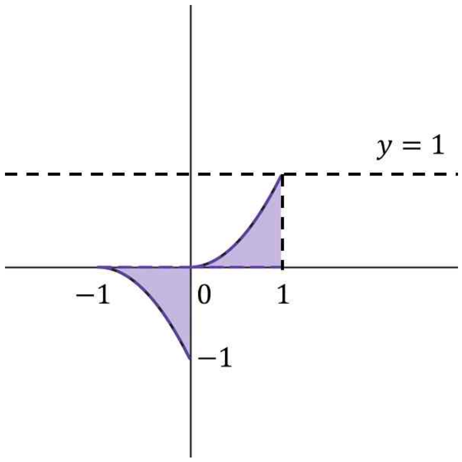
일단 $0 \le x \le 1$에서



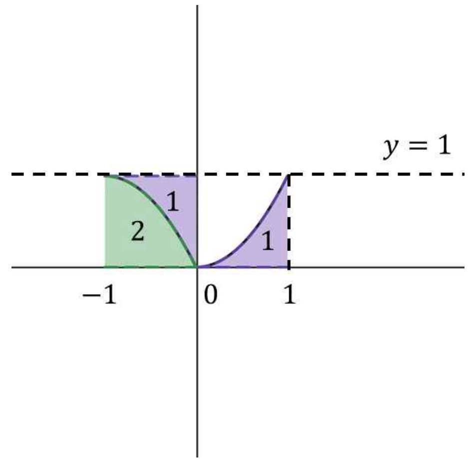
이렇게 됩니다. 보라색 부분이 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$이에요. 그리고 $-1<x<0$에서는 먼저



이렇게 왼쪽으로 1만큼 움직인 다음에



(−) 곱해서 뒤집어 준 후,



이렇게 1만큼 위로 올리면 됩니다. (가)조건에서의 $g(x)$는 다 그렸네요.

(나)조건에서는 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$라고 했었죠? 이거는 주기가 2인 함수잖아요? 그러니까 $-1<x\le 1$에서의 함수가 $1<x\le 3$에서도 형태가 반복되고, $-3<x\le -1$에서도 반복된다는 의미이죠.

3) 정적분 나누기, 정적분 관찰

이때 $\int_{-3}^{2} g(x)dx$를 구하랍니다. 일단 나눠봅시다. 지금 $g(x)$도 구간에 따라 나눠져 있으니까 나눠보면 되겠죠.

일단 $\int_{-3}^{-1} g(x)dx+\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{1}^{2} g(x)dx$로 나눌 수 있습니다.

$\int_{-1}^{1} g(x)dx$부터 구해봅시다. 일단 그래프를 보면 1이라고 써져 있는 부분과 2라고 써져 있는 부분의 합이에요. 일단 1의 값은 $\frac{1}{6}$인 거 알죠? 지금 그래프를 보면 1부분과 2부분의 합은 한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이인 1이에요. 따라서 2부분의 값은 $\frac{5}{6}$이죠. 이 둘을 합하면 $\int_{-1}^{1} g(x)dx=1$이 됩니다.

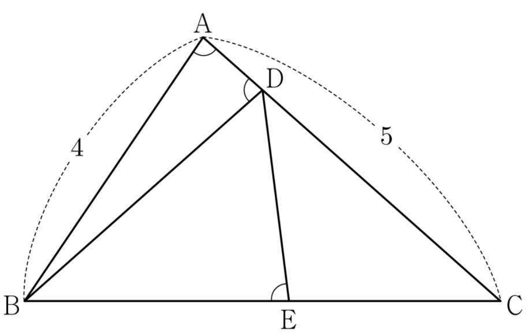
그런데 이건 $\int_{-3}^{-1} g(x)dx$도 마찬가지입니다. 왜냐하면 정적분은 평행이동해도 값이 변하지 않잖아요. 왼쪽으로 2만큼 움직였다고 정적분 값이 변하진 않아요. 따라서 $\int_{-3}^{-1} g(x)dx=1$입니다.

마지막으로 $\int_{1}^{2} g(x)dx$는 $\int_{-1}^{0} g(x)dx$과 같아요. 그래프를 오른쪽으로 2만큼 움직였어도 정적분 값은 같으니까요. 따라서 2부분과 같은 $\frac{5}{6}$입니다. 따라서 $\int_{-3}^{2} g(x)dx=\frac{17}{6}$입니다. 답은 ②번이네요.

3. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=5$이고 $\cos(\angle \mathrm{BAC})=\dfrac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{BDA} = \angle \mathrm{BED}$$

일 때, 선분 DE의 길이는? 〔2022학년도 6월 12〕

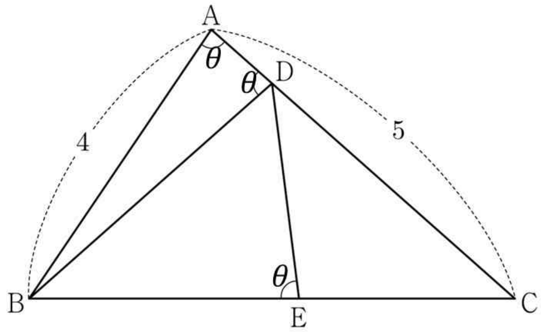


① $\dfrac{7}{3}$　② $\dfrac{5}{2}$　③ $\dfrac{8}{3}$　④ $\dfrac{17}{6}$　⑤ 3

3. 정답 ③ 〔2022학년도 6월 12〕

1) 문제해석, 그림 있으면 그림 보면서

$\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$이랍니다. $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$빼고는 그림에 표시되어 있네요. 이때 $\angle BAC=\angle BDA=\angle BED$라고 하네요. 보기 편하게 $\angle BAC=\angle BDA=\angle BED=\theta$라 할까요? 그러면 $\cos\theta=\frac{1}{8}$입니다. 이왕이면 사인값도 구해놓을까요? $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이니까 $\sin^2\theta=\frac{63}{64}$입니다. θ는 π를 넘지 않으니까 $\sin\theta$는 양수입니다. 따라서 $\sin\theta=\frac{3\sqrt{7}}{8}$이네요.



이렇게 되겠네요.

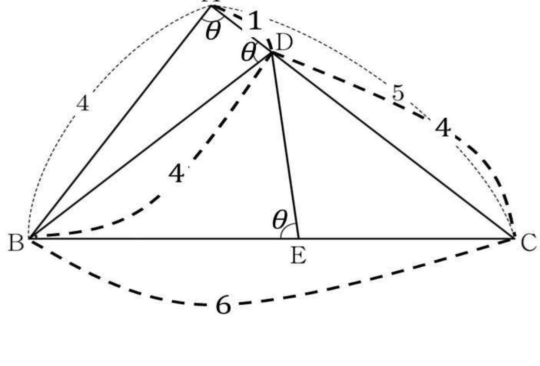
이렇게 보면 삼각형 BDA은 이등변삼각형이네요? 그러면 $\overline{BD}=4$가 됩니다.

2) 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각

삼각형 ABC는 두 변의 길이와 한 각이 주어진 삼각형이에요. 그러면 코사인법칙으로 나머지 한 변의 길이도 구할 수 있겠죠? $\cos\theta=\frac{4^2+5^2-\overline{BC}^2}{2\times4\times5}=\frac{1}{8}$이고 $\overline{BC}=6$입니다.

삼각형 BDA 역시 두 변의 길이와 한 각이 주어진 삼각형이죠. 따라서

$\cos\theta=\frac{4^2+\overline{AD}^2-4^2}{2\times4\times\overline{AD}}=\frac{\overline{AD}}{8}=\frac{1}{8}$이고 $\overline{AD}=1$입니다. 모두 정리하면



이렇게 됩니다.

그러고 보니 BCD도 이등변삼각형이네요? 그러면 $\angle \mathrm{DBE} = \angle \mathrm{BCD}$이죠? 이거를 θ_2라고 할게요.

이제 우리가 구해야 하는 건 $\overline{\mathrm{DE}}$이에요. 이걸 어떻게 구하면 될까...... $\overline{\mathrm{DE}}$를 표현할 수 있는 식은 없을까요?

사인법칙이 있긴 하네요. 삼각형 BDE 안에서 사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin\theta_2} = \dfrac{4}{\sin\theta}$가 됩니다. $\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$인 걸 알긴 알지만 $\sin\theta_2$를 모르겠어요.

음... 그리고 또 뭔가가 있어야 하는데.. θ, θ_2와 관련된 삼각형 뭐가 더 없을까요? 그러고 보니 ABC도 되네요? 사인법칙에 의하여 $\dfrac{4}{\sin\theta_2} = \dfrac{6}{\sin\theta}$입니다. 양변에 4를 나눠주면 $\dfrac{1}{\sin\theta_2} = \dfrac{3}{2\sin\theta}$이니까 이걸 $\dfrac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin\theta_2} = \dfrac{4}{\sin\theta}$에 넣으면...? $\overline{\mathrm{DE}} \times \dfrac{3}{2\sin\theta} = \dfrac{4}{\sin\theta}$이고 $\overline{\mathrm{DE}} = \dfrac{8}{3}$이네요! 답은 ③번입니다.

4. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0 < x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은? [2022학년도 6월 13]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

4. 정답 ⑤ 〔2022학년도 6월 13〕

1) 자연수 보이면 숫자 넣기

$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$ 가 있는데 $f(x+1)=f(x)$라고 합니다. 주기가 1인 함수네요?

이때 $\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$를 구하랍니다. 음..... 일단 넣어볼까요? 먼저 편하게 계산하기 위해 $\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}=a_k$라 하겠습니다.

$k=1$이면 $\frac{f(1)}{3}$입니다. $f(1)=1$이니까 $a_1=\frac{1}{3}$이네요.

$k=2$이면 $\frac{2f(\sqrt{2})}{3}$입니다. 지금 보면 $\sqrt{2}$는 $1<x<2$에 있죠? $f(x)$는 주기가 1이니까 $0<x<1$과 형태가 같을 거예요. 그러니까 $f(x)=3$이 될 거라는 말이죠. 따라서 $f(\sqrt{2})=3$입니다. $a_2=2$이네요.

$k=3$이면 $f(\sqrt{3})$입니다. $\sqrt{3}$은 $1<x<2$에 있어요. 따라서 $f(\sqrt{3})=3$입니다. $a_3=3$

$k=4$이면 $\frac{4f(2)}{3}$입니다. 2는 $x=2$에 있잖아요. 이거는 $x=1$에서의 함숫값을 그대로 오른쪽으로 1만큼 움직인 거니까 값이 같겠네요. 따라서 $f(2)=1$입니다. $a_4=\frac{4}{3}$이네요.

지금 보면 루트 값이 자연수와 자연수의 사이에 있으면 $f(x)=3$이 되고, 루트 값이 자연수가 되면 $f(x)=1$이 되는 거 같은데요? 하나만 더 해봅시다.

$k=5$이면 $\frac{5f(\sqrt{5})}{3}$입니다. $\sqrt{5}$는 $2<x<3$에 있죠. 자연수와 자연수 사이에 있어요. 이러면 $2<x<3$에서 $f(x)=3$이죠? $1<x<2$에서의 $f(x)$를 오른쪽으로 1만큼 움직인 건데 $1<x<2$에서의 $f(x)$도 $0<x<1$에서의 $f(x)$를 오른쪽으로 1만큼 움직인 거잖아요. 따라서 $f(\sqrt{5})=3$입니다. $a_5=\frac{5}{3}$입니다.

예측한 게 맞네요. 그러면 확인해봅시다.

일단 루트 값이 자연수가 되려면 제곱수여야 해요. 따라서 $k=1,\ 4,\ 9,\ 16$일 때는 $f(\sqrt{k})=1$이 되죠. 이것만 더하면 $\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\frac{9}{3}+\frac{16}{3}=10$입니다.

루트 값이 자연수와 자연수 사이에 있다면? $f(x)=3$이 되죠. 따라서 $k=1,\ 4,\ 9,\ 16$ 이외의 값일 때는

$\sum k$를 계산하면 됩니다. 이거는 1부터 20까지 다 더한 다음에 $k=1,\ 4,\ 9,\ 16$만 빼버리면 되겠죠? 일단 $\sum_{k=1}^{20} k = \frac{20\times21}{2} = 210$인데 $1+4+9+16=30$이니까 $210-30=180$입니다. 결국 구하는 값은 $180+10=190$이네요. 답은 ⑤번입니다.

5. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? 〔2022학년도 6월 14〕

(가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=\|xf(x-p)+qx\|$이다.
(나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

5. 정답 ③ 〔2022학년도 6월 14〕

1) 문제해석, 조건해석, 절댓값은 범위 나누고 풀기

양수 p, q가 있고 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$가 있는데 $g(x)$는 연속이고 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$랍니다.

$f(x)$가 인수분해되는지부터 볼까요? 음..... 되는 것 같진 않네요. 미분하면

$3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$이니까 $x=-1$에서 극대, $x=3$에서 극소인 함수입니다.

그리고 절댓값을 좀 정리해볼게요. $xg(x)=|xf(x-p)+qx|=|x(f(x-p)+q)|$잖아요? 그럼 안쪽의 x만 밖으로 빼내서 $xg(x)=|x|\times|f(x-p)+q|$가 됩니다.

이때 $|x|$의 범위를 나누고 풀면 $x\geq 0$일 때는 $xg(x)=x\times|f(x-p)+q|$이니까 $g(x)=|f(x-p)+q|$가 됩니다.

$x<0$일 때는 $xg(x)=-x\times|f(x-p)+q|$이니까 $g(x)=-|f(x-p)+q|$가 됩니다. 정리하면

$g(x)=\begin{cases} |f(x-p)+q| & (x\geq 0) \\ -|f(x-p)+q| & (x<0)\end{cases}$ 이네요.

2) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인, 조건해석

그런데 $g(x)$는 연속이어야 하잖아요? 따라서 $x=0$에서 좌극한 우극한 함숫값이 같아야 합니다.

$|f(-p)+q|=-|f(-p)+q|$이고 $f(-p)+q=0$이네요. $g(0)=0$이어야 합니다.

(나)조건에서 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점은 1개랍니다. 음... 일단 $x=0$이 의심스러워요. 그리고 함수에 절댓값이 씌워져 있으니까 x축과 만나는 부분도 의심해봐야 할 것 같구요.

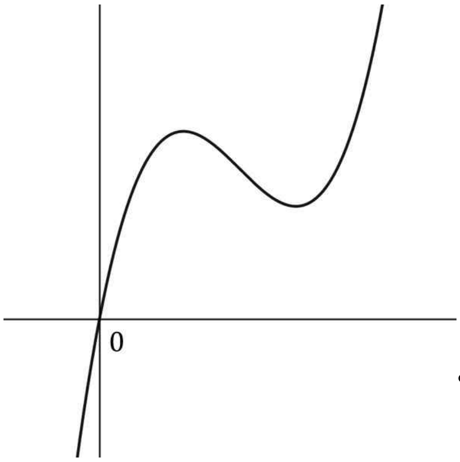
그 전에 $g(x)$가 어떤 함수인지 좀 관찰해봅시다. 먼저 $f(x)$는 극점 두 개가 있는 지렁이 모양의 삼차함수입니다. 그런데 $f(x-p)+q$는? 그 삼차함수를 p만큼 x축의 방향으로 움직이고 q만큼 위아래로 움직인 함수이죠. 모양은 그대로 유지한 채로요. 그냥 이동만 하는 거예요.

이 그래프를 $x\geq 0$에서는 절댓값을 씌워서 접어 올립니다. 그런데 $x<0$에서는 절댓값을 씌우고 접어 올리는 게 끝이 아니라 $(-)$를 곱해서 또 접어 올려야 해요. 또 $g(x)$는 원점을 지나야 하죠. 아까 $g(0)=0$이어야 한다고 했으니까요.

일단 막 그려봅시다. 그런데 그릴 때 최소한 x축과 3개의 점에서 만나는 그래프는 그리면 안 돼요. 그러면 그래프가 접어 올라가서 미분불가능한 점이 1개보다는 더 나오겠죠?

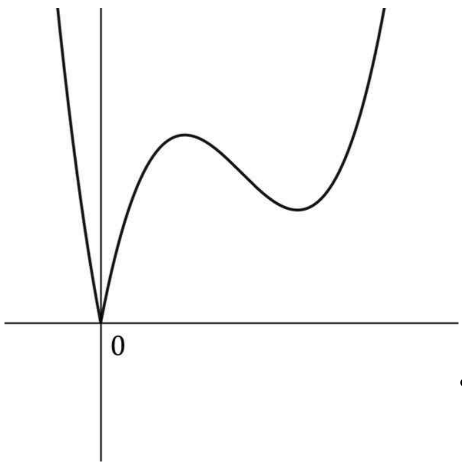
3) 케이스 분류, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

천천히 기준을 나눠봅시다. 먼저 두 극점의 x좌표가 $x>0$ 부분에 있다면?

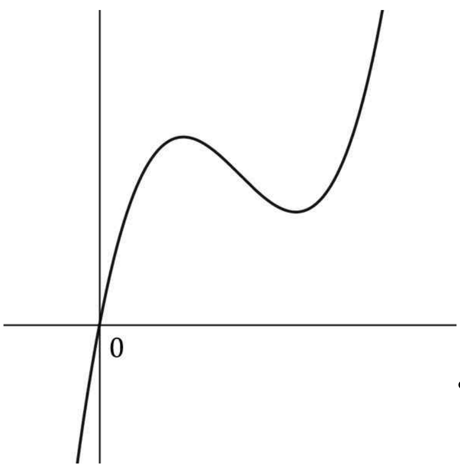


이런 그래프가 가능하죠. 이 경우 $x>0$ 부분은 절댓값을 씌우고,

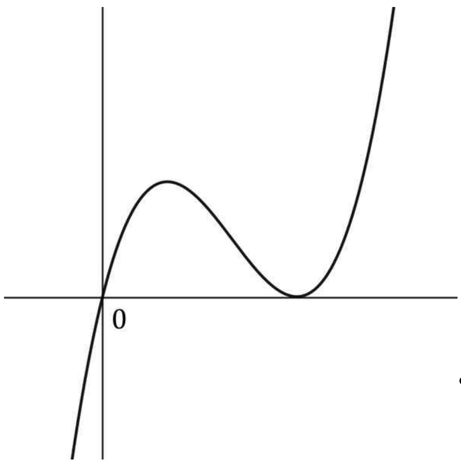
$x<0$ 부분은 절댓값을 씌워서



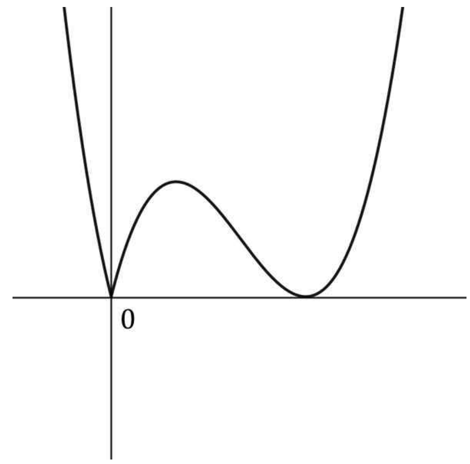
이렇게 한 후에 $(-)$를 곱해서



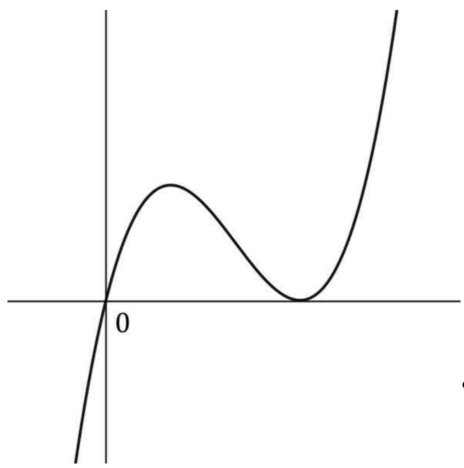
이렇게 바꿔줍니다. 똑같네요? 이건 미분불가능한 점이 없는데요?



이런 그래프도 가능해요. 이때

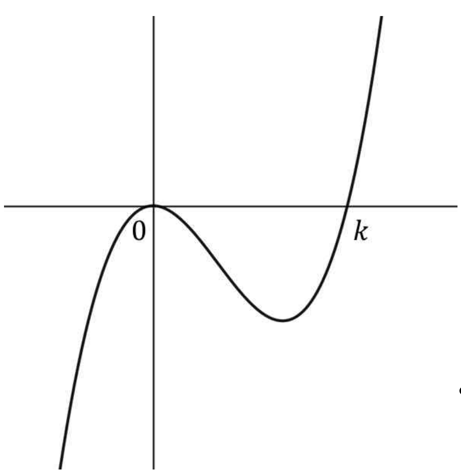


접어 올린 후에 $x < 0$ 부분만 $(-)$를 곱하면

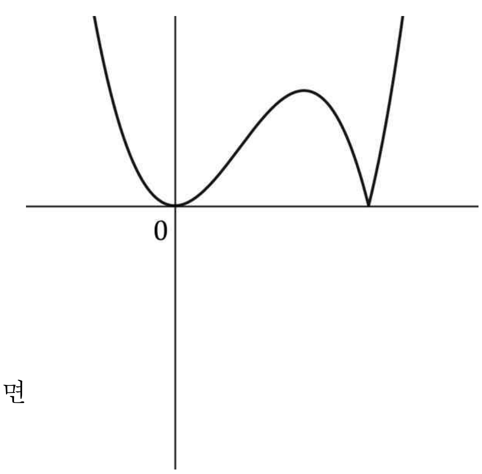


이렇게 됩니다. 이것도 마찬가지로 미분불가능한 점이 하나도 없네요. 그리고 아까 말했듯이 x축과 3개의 점에서 만나는 건 안 됩니다. 접어 올리면 두 점에서 미분불가능합니다. 이건 한 번 해보세요.

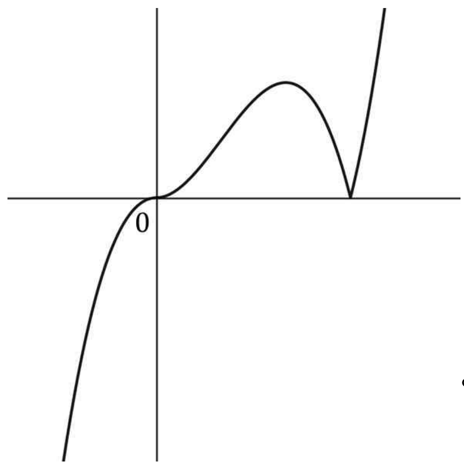
극대점이 $x = 0$에 있다면? x축과 세 점에서 만나는 건 안 되니까 결국 $x = 0$에서 x축과 접해야 합니다.



이렇게 되네요. 접어 올리면



이렇게 되구요. $x < 0$ 부분만 $(-)$를 곱하면



이렇게 되네요. 어? 이건 되는데요? 한 개의 점에서만 미분불가능하잖아요.

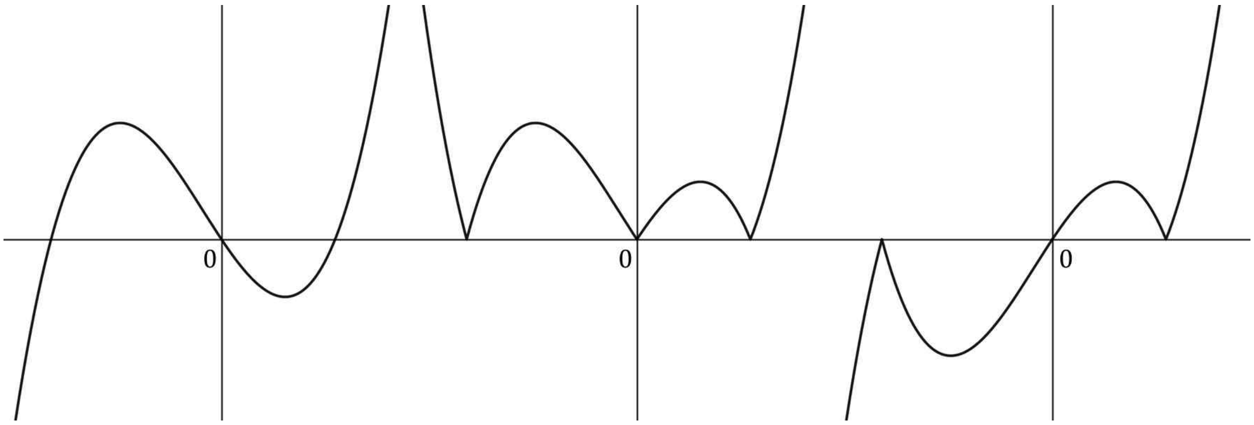
바로 가봅시다. 우리는 $p+q$의 값을 구해야 해요. p, q 각각을 구하라는 이야기죠. 지금 그래프를 보면 함수식을 바로 구할 수 있죠? $f(x-p)+q=x(x-k)^2$입니다. 그런데 $f(x-p)+q$는 $f(x)$의 모양을 유지한 채로 위아래, 좌우로 움직인 그래프라고 했었잖아요. 그 말은 극점의 간격은 같다는 이야기죠. 아까 극점이 $x=-1$, 3였으니까 이거도 마찬가지여야 합니다. 지금 삼차함수의 비율관계에 의해 x축에 접하는 점의 x좌표와 그냥 만나는 점의 x좌표의 $2:1$내분점이 극소점의 x좌표여야 하잖아요? 따라서 극소점의 x좌표는 $\frac{2}{3}k$입니다.

극점의 x좌표의 차이가 4니까 $\frac{2}{3}k=4$여야 하고 $k=6$이네요. 극점이 -1, 3에서 0, 4로 바뀌었죠? 따라서 $f(x-p)+q$는 원래 함수 $f(x)$에서 오른쪽으로 1만큼 움직여야 합니다. $p=1$이네요.
$f(x-1)+q=x(x-6)^2$이네요.

q는..... 그냥 아무런 숫자 하나만 넣어봅시다. $x=0$을 넣어볼까요? 그러면 $f(-1)+q=0$이 됩니다.
$f(x)=x^3-3x^2-9x-12$이니까 $f(-1)=-7$이네요. $q=7$입니다. $p+q=8$이네요. 답은 ③번입니다.

참고!

나머지 그래프는 왜 안 되는지 확인해봅시다. 일단 x축과 세 점에서 만나면 안 되니까 $f(x-p)+q$는 감소하는 부분에서 x축과 만날 수 없습니다. 그래도 확인해보자면



이렇게 해서 두 개의 점에서 미분 불가능합니다.

다음은 극소점이 $x=0$에 있을 때네요. 그런데 여기부터는 불가능해요. p, q는 양수라고 했었죠? p가 양수라는 건 $f(x-p)+q$는 최소한 $f(x)$보다는 오른쪽에 있어야 한다는 말이에요. 극점도 마찬가지죠. 우리가 $f(x)$를 분석할 때 극대점이 $x=-1$에 있고 극소점이 $x=3$에 있다고 했었잖아요. 극소점은 $x=3$보다 왼쪽에 있을 수 없어요. 이렇게 해서 극대점이 $x=0$에 있을 때만 가능합니다.

6. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x \le 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 〔2022학년도 6월 15〕

<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다.

ㄴ. $\{t \mid \beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t \mid 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2=\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 정답 ② 〔2022학년도 6월 15〕

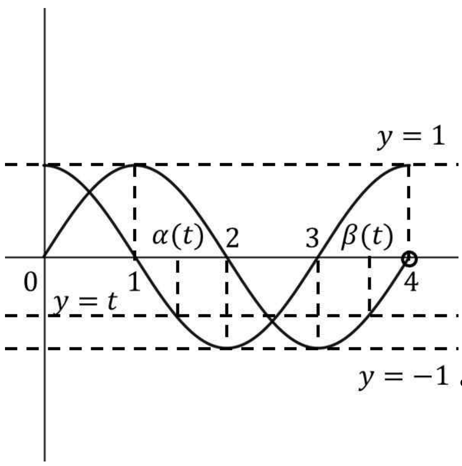
1) 문제해석

$-1 \le t \le 1$인 t가 있는데 $\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$를 만족시키는 x 중에서 $0 \le x < 4$에 있는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라고 한답니다.

일단 $\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$를 만족시키려면 $\sin\frac{\pi x}{2}=t$이거나 $\cos\frac{\pi x}{2}=t$이면 되겠죠? 다시 말하면 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$와 $y=t$가 만나는 점이거나 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$와 $y=t$가 만나는 점이 되는 거예요.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

이거 그래프로 그려보면



이렇게 됩니다. 결국 $\sin\frac{\pi x}{2}$와 $\cos\frac{\pi x}{2}$를 그린 후에 $y=t$를 그리고 $y=t$와 왼쪽부터 처음으로 만나는 점의 x좌표를 $\alpha(t)$, 마지막에 만나는 점의 x좌표를 $\beta(t)$라고 하는 거네요.

ㄱ에서 $-1 \le t < 0$이면 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이냐고 물어봅니다. 딱 그림에 있는 상황이네요! 그런데 더해서 5가 되는지를 어떻게 확인하죠?

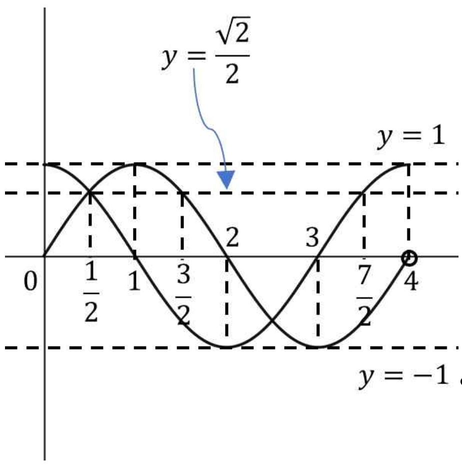
사인과 코사인 그래프를 확인할 때는 대칭을 확인하는 것이 매우 중요합니다. 지금 그래프를 보면 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$와 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$가 $x=\frac{5}{2}$에 대하여 대칭이죠? 지금은 대칭이 아닌 것 같아도 그래프를 옆으로 확장해보면 대칭입니다. 사인 그래프를 옆으로 옮기면 코사인 그래프와 같게 되잖아요. 반대도 마찬가지이구요.

$-1 \le t < 0$이면 $\alpha(t)$는 코사인 그래프 상에 있구요, $\beta(t)$는 사인 그래프 상에 있어요. 둘의 중점의 x좌표는

$\dfrac{5}{2}$가 되겠죠. 대칭이니까요. 따라서 $\dfrac{\alpha(t)+\beta(t)}{2}=\dfrac{5}{2}$이고 $\alpha(t)+\beta(t)=5$입니다. 맞네요! ㄱ은 맞습니다.

ㄴ에서 $\{t|\beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t|0 \le t \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$이냐고 물어보네요. 일단 $\alpha(0)$과 $\beta(0)$은 $t=0$을 그어서 확인하면 되겠죠? 그림을 보면 $\alpha(0)=0$이고 $\beta(0)=3$이네요. $x=4$는 등호가 없어서 포함되지 않으니까요. 그러니까 결국 $0 \le t \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$에서 $\alpha(t)$와 $\beta(t)$의 차이가 3이 되는지를 묻고 있는 거예요.

일단 범위부터 확인해봅시다. $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$는 뭘까요? $\sin\dfrac{\pi x}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$인 x는 $\dfrac{1}{2}$이 있고, $x=1$에 대하여 대칭임을 이용하면 $\dfrac{3}{2}$도 되네요. 그리고 $\cos\dfrac{\pi x}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$인 x는 $\dfrac{1}{2}$이 있고, $x=2$에 대하여 대칭임을 이용하면 $\dfrac{7}{2}$도 됩니다. 어? $x=\dfrac{1}{2}$이면 $\sin\dfrac{\pi x}{2}=\cos\dfrac{\pi x}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이네요? 그러니까



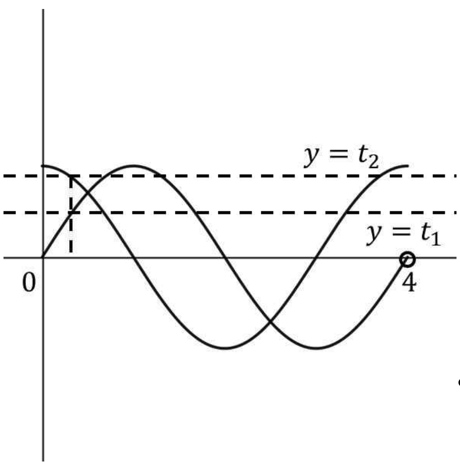
이렇게 되는 거죠?

지금 보면 $0 \le t \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$일 때 $\alpha(t)$는 사인 그래프 상에 있고 $\beta(t)$는 코사인 그래프 상에 있어요. 그런데 $0<x<\dfrac{1}{2}$일 때 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$의 그래프와 $3<x<\dfrac{7}{2}$일 때 $y=\cos\dfrac{\pi x}{2}$는 모양이 일치합니다. 그럴 수밖에 없는 게 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$를 3만큼 오른쪽으로 밀어버리면 $y=\cos\dfrac{\pi x}{2}$가 되거든요. 그러니까 $y=t$라는 수평선을 그어서 만나는 x좌표의 차이도 일정하게 되겠죠. 단지 3만큼 오른쪽으로 움직였으니까요. 따라서 ㄴ도 맞습니다.

ㄷ에서 $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\dfrac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2=\dfrac{1}{3}$이냐고 물어봅니다.

일단 $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$라는 게 뭘까요? 먼저 $\alpha(t_1)$은 $y=t_1$이 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$와 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점의 x좌표에요. $\alpha(t_2)$는 $y=t_2$이 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$와 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점의 x좌표이죠. $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이니까 t_1, t_2는 달라요. 그러면 결국 가장 작은 x좌표가 같게 되는 두 직선의 차이가 $\frac{1}{2}$가 난다는 이야기네요.

그래프를 잘 보면



이렇게 되어야 하겠네요. 그러면 결국 $x=\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=k$에서 코사인값과 사인값의 차이가 $\frac{1}{2}$이 되어야 한다는 말이 됩니다. $t_2=\cos\frac{\pi k}{2}$이고 $t_1=\sin\frac{\pi k}{2}$이니까요.

$\cos\frac{\pi k}{2}-\sin\frac{\pi k}{2}=\frac{1}{2}$가 되네요. 그런데 이때 $\cos^2\frac{\pi k}{2}+\sin^2\frac{\pi k}{2}=1$이잖아요? $\cos\frac{\pi k}{2}-\sin\frac{\pi k}{2}=\frac{1}{2}$를 제곱하면 $\cos^2\frac{\pi k}{2}-2\cos\frac{\pi k}{2}\sin\frac{\pi k}{2}+\sin^2\frac{\pi k}{2}=\frac{1}{4}$가 됩니다. $\cos^2\frac{\pi k}{2}+\sin^2\frac{\pi k}{2}=1$이니까 $-2\cos\frac{\pi k}{2}\sin\frac{\pi k}{2}=-\frac{3}{4}$이고 $\cos\frac{\pi k}{2}\sin\frac{\pi k}{2}=\frac{3}{8}$이네요. $t_1\times t_2=\frac{3}{8}$인데요? ㄷ은 아닙니다. 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이고 답은 ②번이네요.

7. 실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. 〔2022학년도 6월 20〕

7. 정답 8 〔2022학년도 6월 20〕

1) 문제해석, 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

$f(x)=x^3-12x^2+45x+3$가 있는데 $g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4dt$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하랍니다. 네제곱???? 음......

일단 정적분의 위끝에 변수가 있잖아요? 위끝과 아래끝이 같아지는 $x=a$를 넣으면 $g(a)=0$이 됩니다.

$g(x)$가 오직 하나의 극값을 갖는다는 건 $g'(x)$의 부호가 단 한 번만 바뀌어야 한다는 말이죠. 다시 말하면 $g'(x)$는 x축과 접하지 않은 상태로 한 점에서 만나야 하구요, 그 이외에는 아예 만나지 않거나 만나도 방향을 바꾸면서 접해야 합니다. 그러니까 인수를 짝수 개 가져야 한다는 말이죠.

그럼 미분해봅시다. 그런데 바로 하지는 못하겠네요. 정적분 식 안에 변수가 두 개잖아요. 그러면 일단 x는 밖으로 빼야겠죠. 따라서 $g(x)=f(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt-\int_a^x\{f(t)\}^5dt$입니다. 이 상태로 미분하면

$g'(x)=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt+f(x)^5-f(x)^5=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt$입니다.

$f'(x)=3x^2-24x+45=3(x-3)(x-5)$잖아요? 따라서 $g'(x)=3(x-3)(x-5)\int_a^x\{f(t)\}^4dt$의 부호가 단 한 번만 바뀌어야 합니다.

어? 그런데 이미 x축과 만나는 점이 두 개 있는데요? $x=3$에서도 만나고 $x=5$에서도 만나잖아요. 그러면 이 둘 중 하나는 중근을 가져야겠네요. 중근을 가지면 방향을 바꾸면서 접하게 될 테니까요.

그런데..... $\int_a^x\{f(t)\}^4dt$는..... $f(x)$가 삼차함수니까 네제곱하면 12차함수인데....

여러분 천천히 생각해보세요. 네제곱하면 $\{f(x)\}^4$의 함숫값은 무조건 0보다 크거나 같겠죠? 그걸 적분하면? 정적분값 역시 무조건 0보다 크거나 같게 될 거예요. 다시 말하면 $g'(x)=3(x-3)(x-5)\int_a^x\{f(t)\}^4dt$에서

$\int_a^x\{f(t)\}^4dt$는 $x=a$에서 0이 되는데 이 $x=a$가 $x=3$ 또는 $x=5$랑 겹쳐야 한다는 이야기죠. 그래야 둘 중 하나가 중근을 가지면서 오직 하나의 극값을 가지게 될 테니까요. 따라서 $a=3$ 혹은 $a=5$이고 합은 8입니다.

8. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. 〔2022학년도 6월 21〕

(가) x에 대한 방정식 $(x^n - 64)f(x) = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

8. 정답 24〔2022학년도 6월 21〕

1) 조건해석, 자연수 보이면 숫자 넣을 준비, 인수정리

최고차항의 계수가 1인 이차함수가 있는데 (가)조건에서 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고 각각의 실근은 중근이라고 합니다. n은 자연수이구요. (나)조건에서는 $f(x)$의 최솟값이 음의 정수라네요. 숫자 넣을 준비는 하고 있어야 해요.

이차함수의 최솟값이 음의 정수라는 건 이미 x축과 두 개의 점에서 만나고 있다는 말이겠죠? 그래프 그려보면 바로 알 수 있어요. 두 실근을 α, β라 하면 인수정리에 의해 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$라 할 수 있겠네요.

x^n-64는 자체적으로 중근을 가질 수 없습니다. n이 홀수라면 $y=x^n$은 계속 증가하는 그래프인데 그러면 만나는 점이 하나가 되죠. $x^n-64=0$은 오직 하나의 실근을 가지게 됩니다. 이러면 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$를 곱해도 중근 두 개를 가질 수 없어요.

n이 짝수라면 $y=x^n$은 $x=0$에서 방향을 바꾸면서 x축에 접하는 그래프입니다. $y=x^2$와 아주 유사한 그래프이죠. 그러면 $y=x^n$과 $y=64$가 만나는 점은 두 개가 됩니다. 그리고 그게 $x=\alpha$, $x=\beta$가 되어야 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$와 합쳐서 중근을 가지게 되겠죠? 따라서 따라서 $\alpha^n=64$, $\beta^n=64$입니다.

α, β는 같으면 안 되니까(같으면 $f(x)=(x-\alpha)^2$로 최솟값이 0이 되겠죠?) 하나는 양수, 하나는 음수이고 서로의 부호는 반대가 되어야겠네요. $\alpha=-\beta$입니다. $f(x)=(x-\alpha)(x+\alpha)=x^2-\alpha^2$이네요. 최솟값은 $-\alpha^2$인데 이게 음의 정수여야 하죠? 일단 기억해두자구요.

결국 $\alpha^n=64$를 만족하고 $-\alpha^2$가 음의 정수가 되는 짝수 n을 찾아야 합니다. 천천히 자연수에 숫자 넣어볼까요?

2) 자연수 보이면 숫자 넣기

$n=2$이면 $\alpha^2=64$입니다. $-\alpha^2=-64$로 음의 정수이죠? 되네요.

$n=4$이면 $\alpha^4=64$입니다. $-\alpha^2=-8$로 음의 정수이네요. 됩니다.

$n=6$이면 $\alpha^6=64$입니다. $-\alpha^2=-4$로 음의 정수입니다. 되네요.

$n=8$이면 $\alpha^8=64$입니다. $-\alpha^2=-2^{\frac{3}{2}}$로 음의 정수가 아니네요? 안 됩니다.

$n=10$이면 $\alpha^{10}=64$입니다. $-\alpha^2=-2^{\frac{6}{5}}$로 음의 정수가 아닙니다. 안 되겠네요.

$n = 12$이면 $\alpha^{12} = 64$입니다. $-\alpha^2 = -2$로 음의 정수이네요. 됩니다.

이거보다 더 작아지려면 $-\alpha^2 = -1$이어야 하는데 그러면 $\alpha^n = 64$가 될 리가 없죠? 여기가 끝이네요. 따라서 모든 자연수의 합은 $2 + 4 + 6 + 12 = 24$입니다.

9. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

〔2022학년도 6월 22〕

9. 정답 61 〔2022학년도 6월 22〕

1) 조건해석, 합성함수는 치환

삼차함수 $f(x)$가 있답니다. (가)조건에서 $f(x)=0$의 서로 다른 실근이 2개라네요. 너무 뻔하죠? 한 점에서 x축에 접해야 합니다. 그리고 (나)조건에서 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이라네요. 형태 참 기괴하네요.

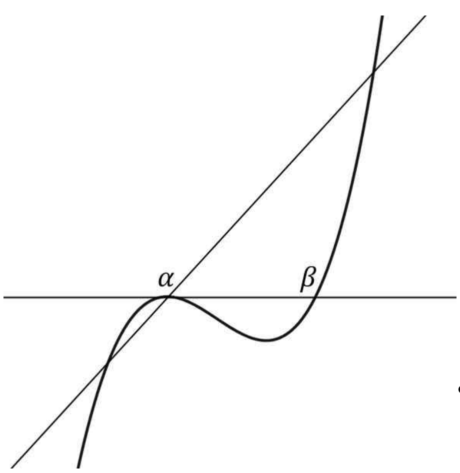
먼저 합성함수를 보면 해야 할 일이 있죠? 바로 치환하는 거예요. $x-f(x)=t$라 하면 $f(t)=0$이 됩니다. 일단 먼저 $f(t)=0$이 되는 t값을 찾고, $x-f(x)=t$이 되는 x값을 찾는, 사실상 문제를 두 번 푸는 셈이 됩니다.

일단 먼저 $f(x)$부터 설정해볼게요. $f(x)$는 한 점에서 접해야 하니까 $f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$라 할게요. 그러면 $f(t)=0$이 되는 t는 α, β이 됩니다.

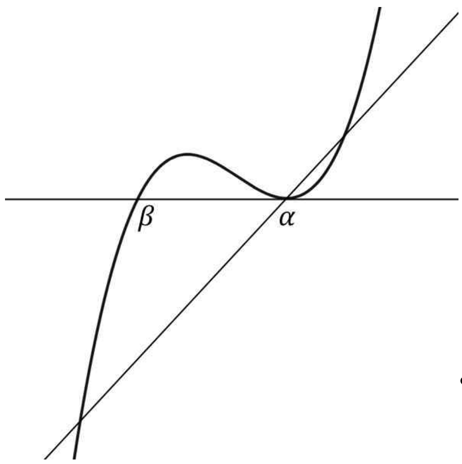
2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

다음으로 가봅시다. 이번에는 $x-f(x)=\alpha$, $x-f(x)=\beta$가 되는 x가 3개가 되도록 해야 해요. 저거 넘기면 $f(x)=x-\alpha$, $f(x)=x-\beta$이니까 정리하면 $y=f(x)$와 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$가 만나는 점의 개수의 합이 3이 되도록 해야 해요.

$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 x축과 만나죠? 그런데 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$도 마찬가지이네요? 일단 두 점은 확정으로 있습니다. 나머지 하나가 어디에 있는지만 찾으면 돼요. 그런데 그래프를 그려보세요.

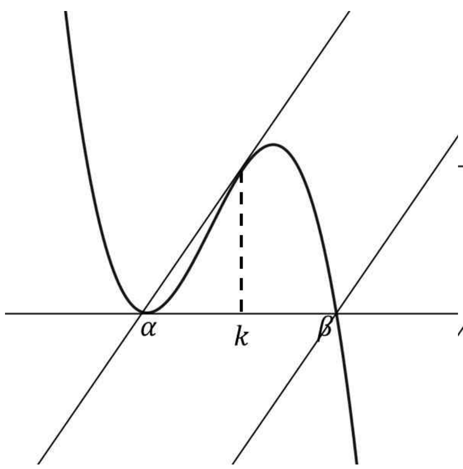


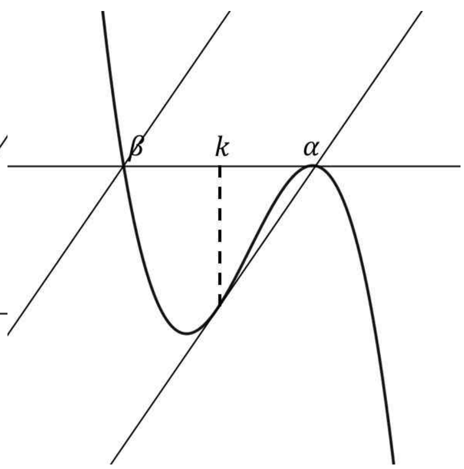
이건 이거 하나만으로 3개의 점에서 만나니까 불가능하죠?



이거도 이거 하나만으로 3개의 점에서 만납니다. 최고차항의 계수가 양수일 때는 아예 안 되네요. 일단 3개의 점에서 만나는 게 안 된다면? 그러면 두 개+한 개가 되어야 총 세 개가 되겠네요.

삼차함수와 일차함수가 두 개의 점에서 만난다는 건 접해야 한다는 거죠. 최고차항의 계수를 음수로 바꿔서 접하도록 그려봅시다.





이렇게 두 가지가 가능하겠네요.

이때 $f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$이어야 한답니다. 모든 것을 의심하세요. 왜 하필 $f(1)=4$일까요? 아직은 모르겠네요. 왜 하필 $f'(1)=1$일까요? 지금 $x=1$에서의 접선의 기울기가 1이라는 건데 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$의 기울기도 1이죠? 위에 그래프를 보세요. 접하는 건 $x=k$이니까 $k=1$이 되어야겠어요. 지금 보면 $y=f(x)$와 $y=x-\alpha$가 $x=1$에서 접하고, 그 함숫값이 4잖아요? 따라서 $1-\alpha=4$이고 $\alpha=-3$입니다. $f(x)=k(x+3)^2(x-\beta)$입니다. 그리고 오른쪽 그래프는 불가능하겠네요. 접하는 점에서의 함숫값이 음수니까요. $f(1)=4$을 이래서 알려준 거였군요.

그리고 $f(1)=4$이어야 하잖아요? 따라서 $f(1)=16k(1-\beta)=4$이고 $f'(1)=1$이어야 하니까 미분하고 값을

집어 넣으면 $k(8(1-\beta)+16)=8k(1-\beta)+16k=1$입니다. $8k(1-\beta)=2$이죠? 아까 $f(1)=16k(1-\beta)=4$라 했잖아요. 따라서 $k=-\dfrac{1}{16}$입니다. $f(1)=16k(1-\beta)=4$이니까 $\beta=5$이네요.

$f(x)=-\dfrac{1}{16}(x+3)^2(x-5)$입니다.

잠깐! $f'(0)>1$ 맞나요? 미분하면 값을 집어 넣으면 $\dfrac{21}{16}$으로 1보다 큰 거 맞네요. 따라서 $f(0)=\dfrac{45}{16}$입니다.

$p=16,\ q=45$이니까 $p+q=61$이네요.