by. 박진우, 이다희, 지승현

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

$$2^{\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})} = 2^2 = \boxed{4}$$

2. 함수 $f(x)$가

$$f'(x) = 3x^2 - 2x, \quad f(1) = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x) = x^3 - x^2 + C$

$f(1) = 1$ $1 - 1 + C = 1$

$\boxed{C = 1}$

$f(x) = x^3 - x^2 + 1$

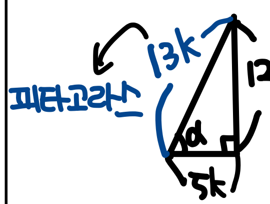
$f(2) = 8 - 4 + 1 = \boxed{5}$

3. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta = \frac{12}{5}$일 때, $\sin\theta + \cos\theta$의 값은? [3점] → $\sin\theta < 0$, $\cos\theta < 0$

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$에 대해

$\tan\alpha = \frac{12}{5}$라 하면



$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$

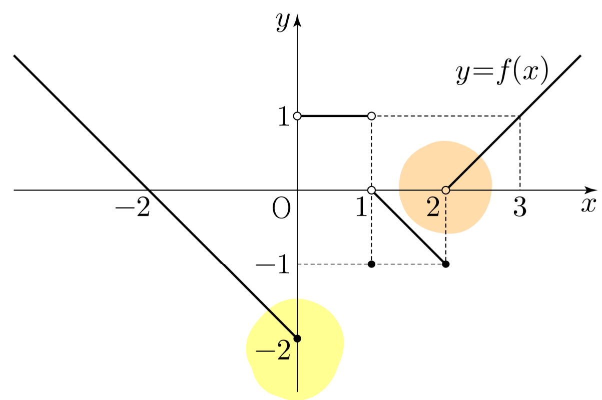
이때, $\theta = \alpha + \pi$

$\therefore \sin\theta = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha = -\frac{12}{13}$

$\cos\theta = \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{5}{13}$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta = \boxed{-\frac{17}{13}}$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

① $\lim_{x\to 0-} f(x) = -2$

② $\lim_{x\to 2+} f(x) = 0$

$\therefore \lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 2+} f(x) = \boxed{-2}$

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\left(x^2+3\right)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

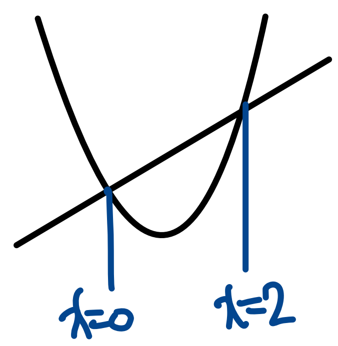
$$g'(x)=2xf(x)+(x^2+3)f'(x)$$

$$g'(1)=2f(1)+4f'(1)$$

$$=2\times2+4\times1=\boxed{8}$$

6. 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



$3x^2-x=5x$

$3x^2-6x=0$

$3x(x-2)=0$

$x=0$ or $x=2$

$$\int_0^2 |3x^2-x-5x|\,dx=\int_0^2|3x^2-6x|\,dx$$

$$=-\int_0^2(3x^2-6x)\,dx=-\left[x^3-3x^2\right]_0^2=\boxed{4}$$

*별해 넓이 공식 → mentor 칼럼참고!

$$\frac{|3|(2-0)^3}{6}=\boxed{4}$$

7. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

↳ $a_n=2+(n-1)d$

$$a_6=2\left(S_3-S_2\right)$$

일 때, S_{10}의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

$$a_6=2(S_3-S_2)$$

$$=2a_3$$

$$\therefore 2+5d=2(2+2d)$$

$$=4+4d$$

$$d=2$$

$$\Rightarrow a_n=2+(n-1)2$$

$$=2n$$

$$S_{10}=\frac{10\times(a_1+a_{10})}{2}=5\times(2+20)$$

$$=\boxed{110}$$

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x\ge a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$\lim_{x\to a}\{f(x)\}^2=\{f(a)\}^2$

$\{f(x)\}^2=\begin{cases}(-2x+6)^2 & (x<a)\\(2x-a)^2 & (x\ge a)\end{cases}$

$4a^2-24a+36=4a^2-4a^2+a^2$

$\therefore 3a^2-24a+36=0$

근과 계수의 관계 이용하여 $-\frac{-24}{3}=\boxed{8}$

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \frac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이고 $a_{12}=\frac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점] ⇒ 역방향으로 찾기!

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

a_n에 대하여 정리

$a_n=\begin{cases}\frac{1}{a_{n+1}} & (n\text{이 홀수})\\ \frac{a_{n+1}}{8} & (n\text{이 짝수})\end{cases}$

⇒ 나열! $a_{12}=\frac{1}{2}$, $a_{11}=2$, $a_{10}=\frac{1}{4}$, $a_9=4$, $a_8=\frac{1}{2}$ ...

이후는 주기적으로 반복 (주기는 4,

$a_{12}=a_8=a_4=\frac{1}{2}$, $a_9=a_5=a_1=4$

$\therefore \frac{1}{2}+4=\boxed{\frac{9}{2}}$

10. $n\ge 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x,\quad y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

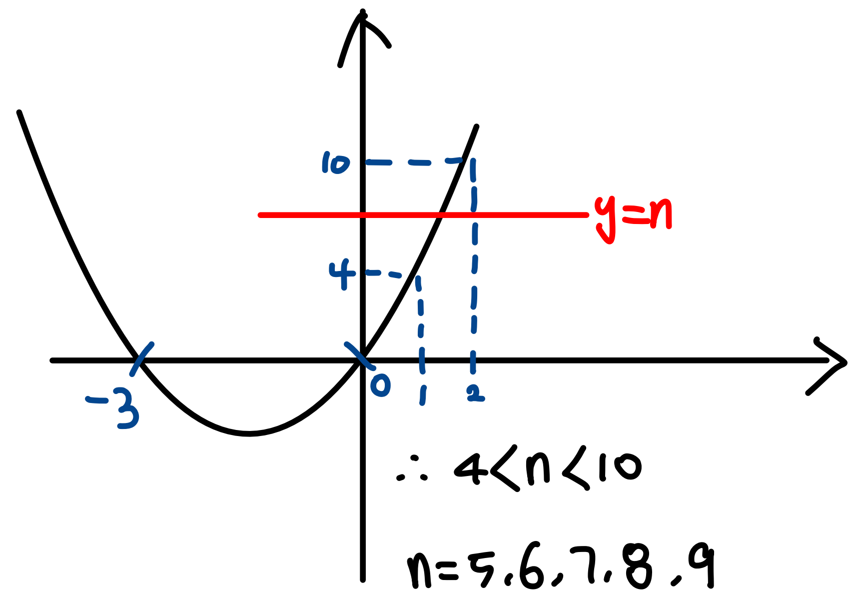
① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

$\log_n x=-\log_n(x+3)+1$

$\log_n x+\log_n(x+3)=1$

$\log_n(x^2+3x)=1$

$\therefore x^2+3x=n$ → 그래프에서 해석



$\therefore 4<n<10$

$n=5,6,7,8,9$

⇒ n값들의 합 $=35$

11. 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0, \quad f(1)=1, \quad \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$의 값은? [4점]

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0 \le x \le 1) \end{cases}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

$$\int_{-3}^{2} g(x)\,dx = \int_{-3}^{-1} g(x)\,dx + \int_{-1}^{1} g(x)\,dx + \int_{1}^{2} g(x)\,dx$$

$$= 2\int_{-1}^{1} g(x)\,dx + \int_{-1}^{0} g(x)\,dx$$

$$= 3\int_{-1}^{0} (-f(x+1)+1)\,dx + 2\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= 3 - 3\int_0^1 f(x)\,dx + 2\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= 3 - \int_0^1 f(x)\,dx = \boxed{\frac{17}{6}}$$

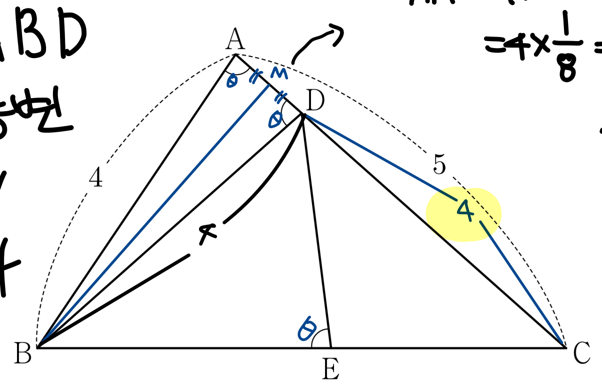
12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$ = θ라 하자!

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]

△BMA에서
$\overline{AM} = 4\times\cos\theta$
$=4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$
$\therefore \overline{AD}=1$
$\Rightarrow \overline{DC}=4$

△ABD
이등변
⇓
$\overline{BD}=4$



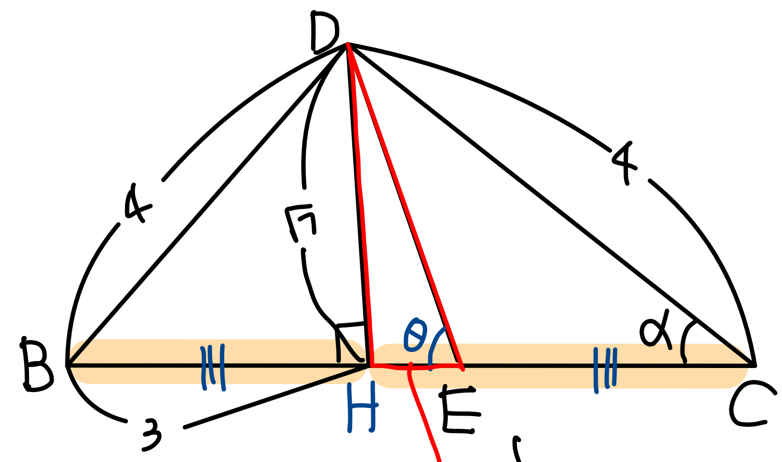
① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

△DBC도 이등변

△ABC에서 코사인 법칙으로 $\overline{BC}$ 구하기

$\Rightarrow \overline{BC}^2 = 16+25-2\times4\times5\times\frac{1}{8}=36$

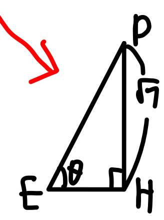
$\therefore \overline{BC}=6$



$\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\sin\theta = \sqrt{1-\frac{1}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

(∵ θ가 예각)



$\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{\overline{DE}}$

$\overline{DE} = \sqrt{7}\times\frac{1}{\sin\theta} = \sqrt{7}\times\frac{8}{3\sqrt{7}} = \boxed{\frac{8}{3}}$

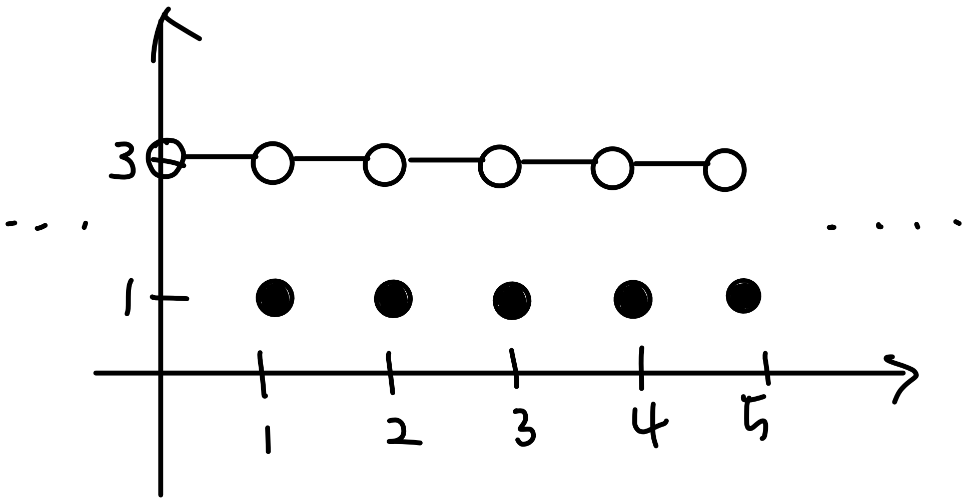
13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0, 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases}3 & (0<x<1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다. → 주기는 1.

$\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190



$f(n)=1$ (이때, n은 정수)

$f(p)=3$ (이때, p는 정수가 아닌 실수)

$\Rightarrow f(\sqrt{1}), f(\sqrt{4}), f(\sqrt{9}), f(\sqrt{16})$

$\Rightarrow \boxed{1}$

이외 $f(\sqrt{k})=\boxed{3}$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$

$=\frac{1}{3}(1+4+9+16)+\frac{1}{3}\times 3\{1+2\cdots+20-(1+4+9+16)\}$

$=10+(210-30)=\boxed{190}$

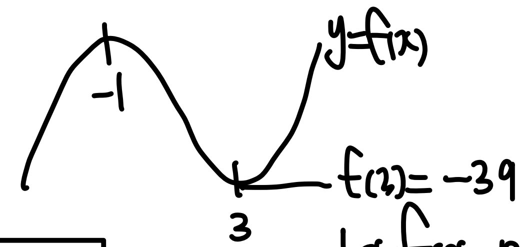
14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
(나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$=3(x^2-2x-3)=3(x-3)(x+1)$



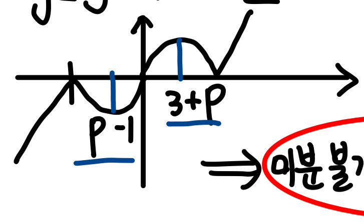
$\boxed{x\neq 0}$ $g(x)=\frac{|xf(x-p)+qx|}{x}$

$g(x)=\begin{cases}|f(x-p)+q| & (x>0)\\ -|f(x-p)+q| & (x<0)\end{cases}$

$\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$ 이여야 하므로 → 연속

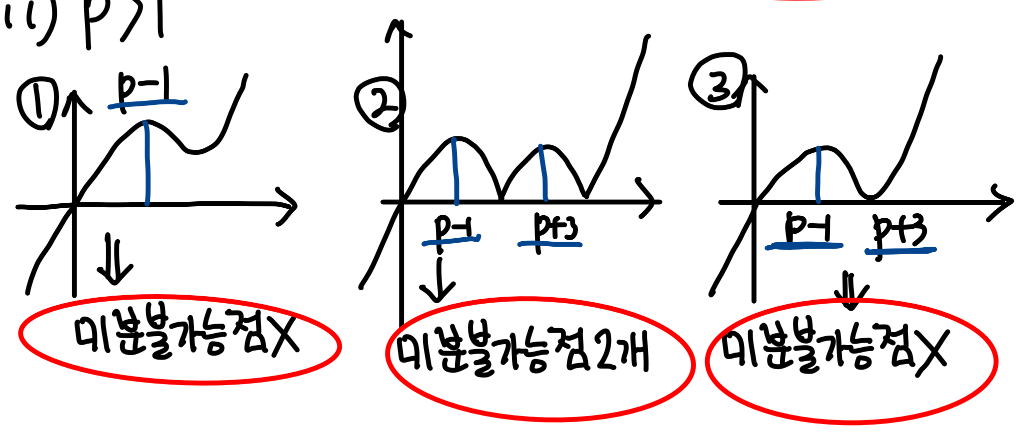
$g(0)=f(-p)+q=0$

i) $0<p<1 \Rightarrow$ $y=g(x)$ 그래프



⇒ 미분불가능점 2개

ii) $p>1$



$\therefore p=1$, $f(-p)+q=0$에서 $f(-1)=-7$ $q=7$

$p+q=\boxed{8}$

15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

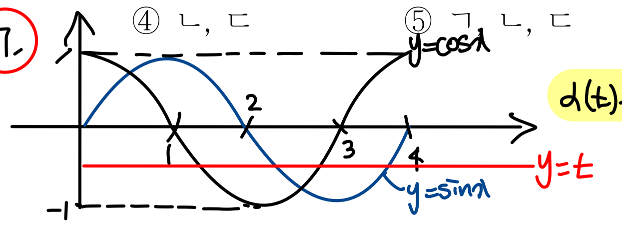
ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다.

ㄴ. $\{t \mid \beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2 = \frac{1}{3}$이다.

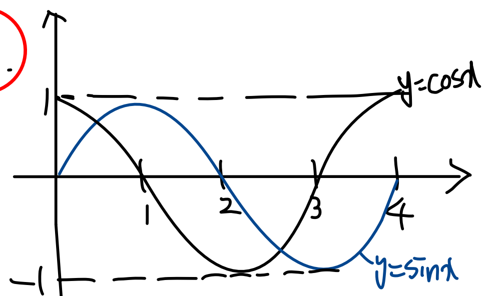
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ.



$\alpha(t)$와 $\beta(t)$가 $x=\frac{5}{2}$ 대칭
$\therefore \alpha(t)+\beta(t)=5$

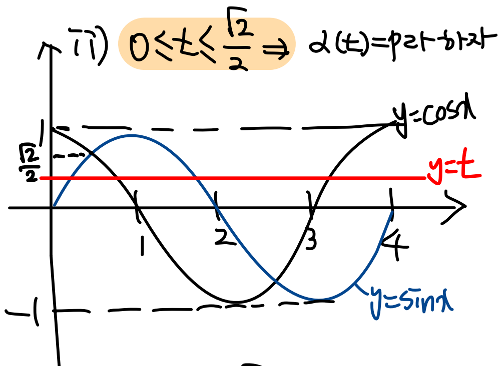
ㄴ.



$B(0)=3$, $\alpha(0)=0 \Rightarrow B(0)-\alpha(0)=3$

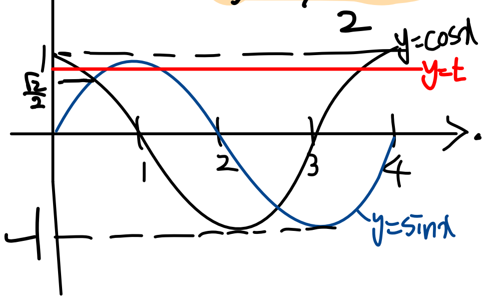
i) $-1 \le t < 0 \Rightarrow \alpha(t)>1$, $B(t)<4$
$\therefore B(t)-\alpha(t)<3$

ii) $0 \le t < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha(t)=p$라 하자



그래프 개형과 주기성에 의해
$B(t)-3=p$
$\therefore B(t)-\alpha(t)=3$ 성립.

iii) $t>\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha(t)<\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$B(t)>B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\therefore B(t)-\alpha(t)>3$



~~ㄷ~~ $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=\theta$라 하자.
주어진 조건을 만족시키기 위해 $0<\theta<\frac{1}{2}$이어야 함!
$\therefore t_2=\cos\frac{\pi}{2}\theta$
$t_1=\sin\frac{\pi}{2}\theta$. $t_2-t_1=\frac{1}{2}$에서
$t_1^2+t_2^2-2t_1t_2=\frac{1}{4}$이므로 $t_1 \times t_2=\boxed{\frac{3}{8}}$ ($\because t_1^2+t_2^2=1$)

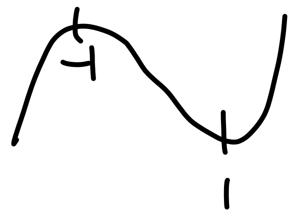
단답형

16. $\log_4\frac{2}{3}+\log_4 24$의 값을 구하시오. [3점]

$\log_4\left(\frac{2}{3}\times 24\right)=\log_4 16$
$=\log_4 4^2=\boxed{2}$

17. 함수 $f(x)=x^3-3x+12$가 $x=a$에서 극소일 때, $a+f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

$f'(x)=3x^2-3$
$f'(a)=3a^2-3=0$
$3a^2=3$
$a^2=1$ $a=\pm1$
$\boxed{\therefore a=1}$



$f(1)=1-3+12$
$=\boxed{10}$
$\therefore a+f(a)=\boxed{11}$

18. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

↳ $a_n = a_1 \times r^{n-1}$

$$a_2 = 36,\quad a_7 = \frac{1}{3}a_5$$

일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

$a_1 r = 36$, $\frac{a_7}{a_5} = \frac{1}{3}$

$\boxed{r^2 = \frac{1}{3}}$

$a_6 = a_1 r^5 = a_1 r \times r^4$

$= a_1 r \times (r^2)^2 = 36 \times \frac{1}{9}$

$= \boxed{4}$

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

$v(t) = 3t^2 - 4t + k$

위치 $x = t^3 - 2t^2 + kt + C$

$t=0$에서 위치는 0이므로 $C=0$

∴ $x = t^3 - 2t^2 + kt$

$t=1$에서 위치 -3이므로

$1 - 2 + k = -3$ $\boxed{\therefore k = -2}$

$t=3$에서 위치는

$3^3 - 2\times 3^2 + 3\times -2 = 3$

∴ 위치변화량 $3 - (-3) = \boxed{6}$

20. 실수 a와 함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3$에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

$g(a) = 0$

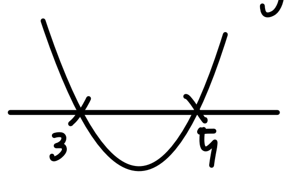
$g(x) = f(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt - \int_a^x f(t)\times\{f(t)\}^4 dt$

$g'(x) = f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt + f(x)\times\cancel{\{f(x)\}^4} - f(x)\times\cancel{\{f(x)\}^4}$

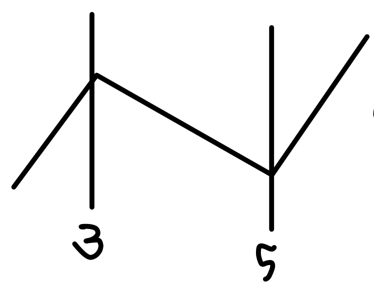
$g'(x) = f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45$

$= 3(x-3)(x-5)$



$f'(x)$는 $x=3$ & $x=5$에서 부호변화 O



∴ $\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$에서

$a=3$ or $a=5$ 여야

$g(x)$가 하나의 극값을 가짐

∴ $3+5 = \boxed{8}$

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은
> 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

n이 홀수일 때, 방정식 $x^n-64=0$의 근의 개수는 항상 1개이다.

이때, (가)조건을 만족시키기 위해선 $f(x)$가 근을 3개 가져야 함. but $f(x)$는 이차함수라 불가능함.

$\boxed{\text{따라서 } n\text{은 짝수}}$

이때 $x^n=64$의 두 근은 $x=\pm 2^{\frac{6}{n}}$이다.

(가) 조건에 의해 $f(x)$도 두 근 가져야 함.

↳ $x=\pm 2^{\frac{6}{n}}$

$\therefore f(x)=(x-2^{\frac{6}{n}})(x+2^{\frac{6}{n}})$

$=x^2-2^{\frac{12}{n}}$

조건 (나): $f(x)$의 최솟값은 $f(0)$이고 $f(0)=-2^{\frac{12}{n}}$이다.

$\therefore f(0)$이 음의 정수이므로 $2^{\frac{12}{n}}$이 정수임.

$\therefore \frac{12}{n}$가 정수이고

$n=2, 4, 6, 12$이다.

$\therefore n$의 합 $=\boxed{24}$

22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

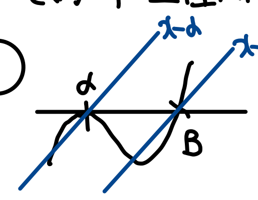
방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 할 때, 조건 (나)를 만족하기 위해선

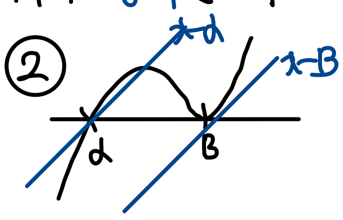
방정식 $\begin{cases} x-f(x)=\alpha \\ x-f(x)=\beta \end{cases}$ 를 만족하는 x의 개수가 3이여야 함.

식 정리하면

$f(x)=x-\alpha$ or $x-\beta$를 만족하는 x의 개수가 3

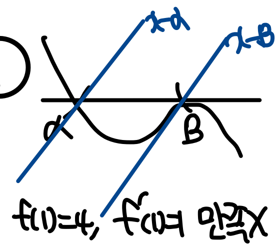
i) $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때

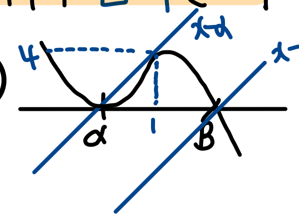
① 

② 

조건 (나) 만족X

ii) $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때

① 

② 

$f(1)=4$, $f'(1)$ 만족X

$\therefore f(x)=a(x+3)^2(x-\beta)$

$f(x)=-\frac{1}{16}(x+3)^2(x-5)$

$f'(0)>1$이므로

직선 $y=x-\alpha$가 점$(1,4)$를 지나고 $\alpha=-3$

$f(1)=4$, $f'(1)=1$ 연립하면 $a=-\frac{1}{16}$, $\beta=5$

$\therefore f(0)=\frac{45}{16}$ $p+q=16+45=\boxed{61}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

by 이다희

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(2x+1)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는? [2점]

① 20 ② 40 ③ 60 ④ 80 ⑤ 100

$${}_5C_r \cdot (2x)^{5-r} \cdot 1^r$$

$$= {}_5C_r \cdot 2^{5-r} \cdot x^{5-r}$$

$\boxed{r=2}$ $\quad {}_5C_2 \cdot 2^3 \cdot x^3$

$$\therefore {}_5C_2 \times 2^3 = 10 \times 8 = \boxed{80}$$

24. 어느 동아리의 학생 20명을 대상으로 진로활동 A와 진로활동 B에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 진로활동 A와 진로활동 B 중 하나를 선택하였고, 각각의 진로활동을 선택한 학생 수는 다음과 같다.

(단위 : 명)

구분	진로활동 A	진로활동 B	합계
1학년	7	5	12
2학년	4	4	8
합계	11	9	20

이 조사에 참여한 학생 20명 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B를 선택한 학생일 때, 이 학생이 1학년일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{11}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

진로활동 선택한 학생 = A

1학년인 학생 = B

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{20}}{\frac{9}{20}} = \boxed{\frac{5}{9}}$$

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 선택할 때, 선택한 수가 3500보다 클 확률은? [3점]

① $\frac{9}{25}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{11}{25}$ ④ $\frac{12}{25}$ ⑤ $\frac{13}{25}$

전체) 4개 택해 일렬로 나열 : 5^4

3500 보다 큰 경우

① 35_ _ ⇒ 5^2

② 4_ _ _ ⇒ 5^3

③ 5_ _ _ ⇒ 5^3

∴ $\frac{5^2+2\times5^3}{5^4} = \boxed{\frac{11}{25}}$

26. 빨간색 카드 4장, 파란색 카드 2장, 노란색 카드 1장이 있다. 이 7장의 카드를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생이 있도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 카드끼리는 서로 구별하지 않고, 카드를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 78 ② 84 ③ 90 ④ 96 ⑤ 102

노란색 카드가 한장 밖에 없음

⇒ 3가지 색의 카드를 각각 한장이상 받는 학생이 한명 밖에 없음!

그 한명 선택하는 경우의 수 $= {}_3C_1 = \boxed{3}$

(3가지 색의 카드를 각각 한장씩 한명에게 나눠준 후 → 빨 3, 파 1 남음)

① 빨간색카드 나누어 주는 경우

$a+b+c=3$

${}_3H_3 = {}_5C_2 = \boxed{10}$

② 파란색 카드 나누어주는 경우

a, b, c 中 하나 택 $= {}_3C_1 = \boxed{3}$

∴ $3\times10\times3 = \boxed{90}$

27. 주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때, 나오는 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 같을 확률은? [3점]

① $\frac{3}{64}$ ② $\frac{5}{96}$ ③ $\frac{11}{192}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{13}{192}$

1이상 ⟹ 1개~4개

<주사위의 곱>	<앞면 개수>
① (1,1) $\frac{1}{36}$	1 ${}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{16}$
② (1,2),(2,1) $\frac{2}{36}$	2 ${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}$
③ (1,3) (3,1) $\frac{2}{36}$	3 ${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{4}{16}$
④ (1,4) (2,2) (4,1) $\frac{3}{36}$	4 ${}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

∴ ①+②+③+④

$$=\frac{1\times4+2\times6+2\times4+3\times1}{36\times16}$$

$$=\boxed{\frac{3}{64}}$$

28. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이하이면 나온 눈의 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4 이상이면 0점을 얻는다. 이 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 할 때, 얻은 네 점수의 합이 4가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [4점]

① 187 ② 190 ③ 193 ④ 196 ⑤ 199

1,2,3 → 나온 눈의 수를 점수로

4,5,6 → 0점

네 점수의 합 = 4.

"0"기준으로 case 분류

① 0점이 0개

(1,1,1,1) ⟹ $\boxed{1가지}$

② 0점이 1개

↳ 구성은 (1,1,2)

$\underset{\downarrow}{3}\times\underset{\downarrow}{4}\times\underset{\downarrow}{3}=\boxed{36가지}$

0점이 하나니까 4,5,6 中 한번 / a,b,c,d 中 0점인거 택 / (1,1,2) 배열

③ 0점이 2개

↳ 구성은 (1,3) (2,2)

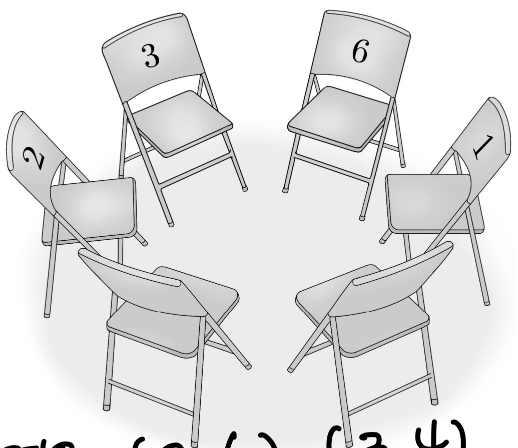
$3^2\times{}_4C_2\times3=\boxed{162가지}$

0점이 두개니까 4,5,6 中 두번 / a,b,c,d 中 0점인거 택 / (1,3) (2,2) (3,1)

$1+36+162=\boxed{199}$

단답형

29. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



곱이 12인 경우 (2,6) (3,4)

* (2.6 이웃X) & (3,4이웃X)

$\Rightarrow$ $(2.6\text{이웃})^c \cap (3.4\text{이웃})^c$

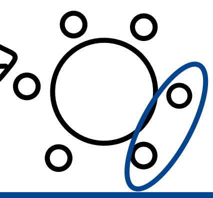
$= \boxed{(\underbrace{2.6\text{이웃}}_{A} \cup \underbrace{3.4\text{이웃}}_{B})^c}$

$=(A\cup B)^c$ 을 구해야 함.

∴ 전체 − (A∪B)

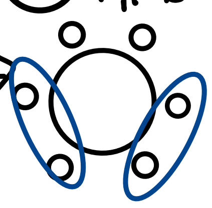
① 전체 $\frac{6!}{6} = \boxed{5!}$

② 2.6이웃 (=3.4이웃)



$\Rightarrow$ $\frac{5!}{5}\times 2 = \boxed{48}$

③ A∩B (2.6이웃∩3.4이웃)



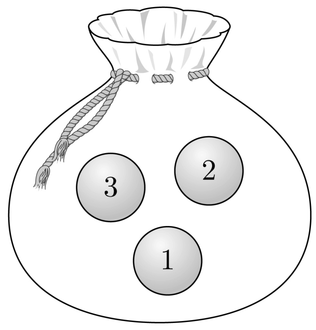
$\Rightarrow$ $\frac{4!}{4}\times 2\times 2 = \boxed{24}$

∴ $5! - (48+48-24)$

$= \boxed{48}$

30. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 5번 반복하여 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2,3이 무조건 1번이상!



∴ 전체 − ((1,2)로만 구성 (1,3)으로만 구성)

① 전체 = _ _ _ _ _ ⇒ 3^5

② (1,2)로만 구성+(1,3)으로만 구성

$2^5+2^5-1 = 63$

(11111 제외) ⇒ 두번 계산됨

∴ $1 - \frac{63}{3^5} =$

$1 - \frac{\cancel{3}\times\cancel{3}\times 7}{\cancel{3}\times\cancel{3}\times 3\times 3\times 3} = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$

∴ $p+q = \boxed{47}$

* 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

by. 이희태. 박상우. 진남현.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}\times\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{(n^2+n+1)-n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{n+1}$$

$$\frac{\times\frac{1}{n}}{\times\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1+1}{1}$$

$$=\boxed{2}$$

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^t+\cos t,\quad y=\sin t$$

에서 $t=0$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

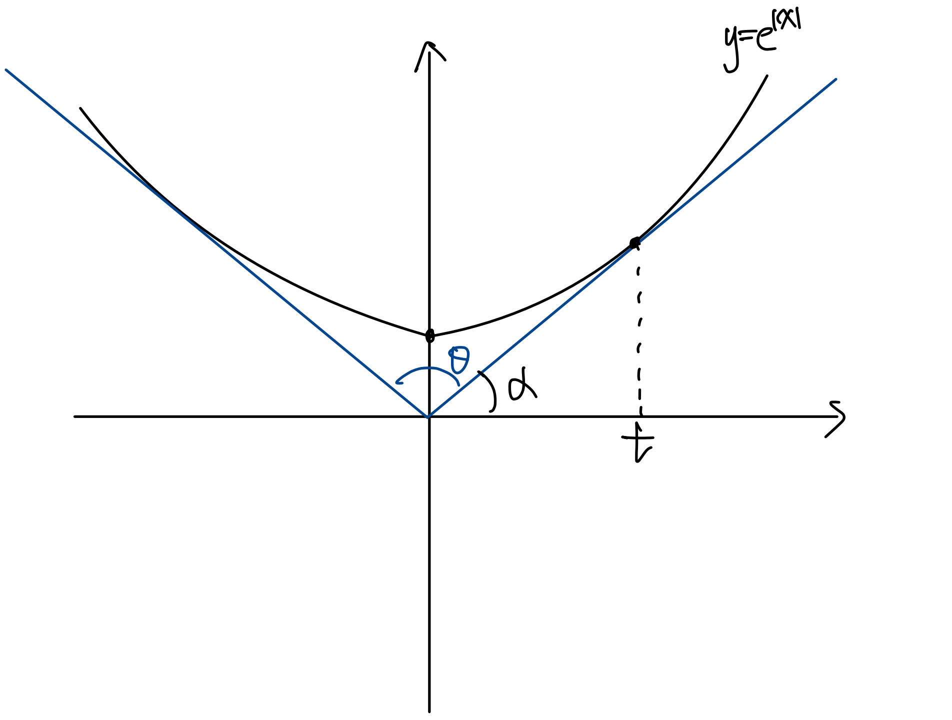
$$\frac{dx}{dt}=e^t-\sin t \qquad \frac{dx}{dt}(t=0)=1$$

$$\frac{dy}{dt}=\cos t \qquad \frac{dy}{dt}(t=0)=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{1}=\boxed{1}$$

25. 원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{e}{e^2+1}$ ② $\frac{e}{e^2-1}$ ③ $\frac{2e}{e^2+1}$ ④ $\frac{2e}{e^2-1}$ ⑤ 1



원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$에 그은 접선에서의 접점의 x좌표를 t라 하자. $(t>0)$

이때 $\frac{e^t}{t}=e^t \Rightarrow t=1$ 이므로 접점의 좌표는 $(1,e)$ 이다.

따라서 $\tan\alpha=e$, $\theta=\pi-2\alpha$

$\tan\theta=\tan(\pi-2\alpha)=-\tan 2\alpha$

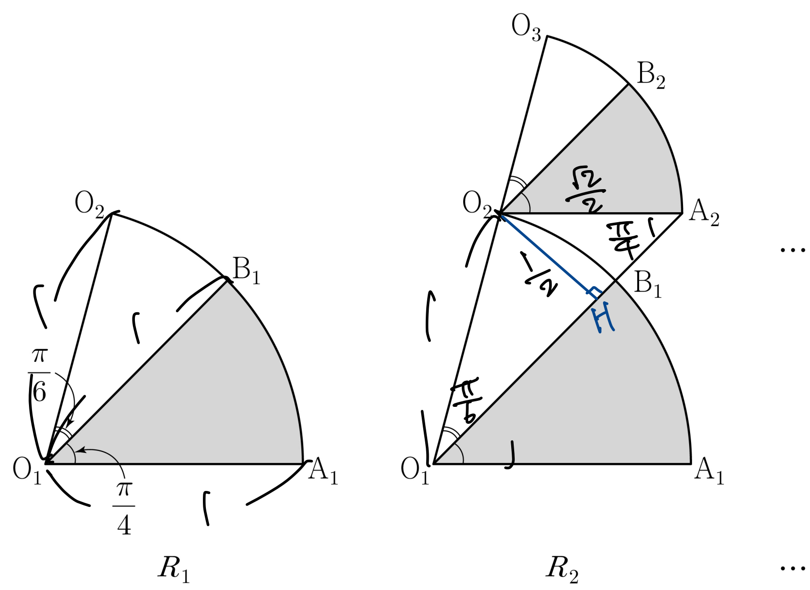
$-\tan(2\alpha)=-\tan(\alpha+\alpha)=-\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\times\tan\alpha}$

$=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha-1}=\boxed{\frac{2e}{e^2-1}}$

26. 그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_1A_1O_2$가 있다. 호 A_1O_2 위에 점 B_1을 $\angle A_1O_1B_1=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_1A_1B_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 O_2를 지나고 선분 O_1A_1에 평행한 직선이 직선 O_1B_1과 만나는 점을 A_2라 하자. 중심이 O_2이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_2A_2O_3$을 부채꼴 $O_1A_1B_1$과 겹치지 않도록 그린다. 호 A_2O_3 위에 점 B_2를 $\angle A_2O_2B_2=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_2A_2B_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{3\pi}{16}$ ② $\frac{7\pi}{32}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{9\pi}{32}$ ⑤ $\frac{5\pi}{16}$

부채꼴 $O_1A_1B_1=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{4}=\boxed{\frac{\pi}{8}}$

점 O_2에서 $\overline{O_1B_1}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{O_2H}=\frac{1}{2}$, $\overline{O_2A_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

$\overline{O_1A_1}:\overline{O_2A_2}=1:\frac{\sqrt{2}}{2}$

부채꼴 $O_1A_1B_1$ 와 부채꼴 $O_2A_2B_2$ 의 반지름의 비가 $1:\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

넓이비는 $1:\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{8}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{8}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{\pi}{4}}$

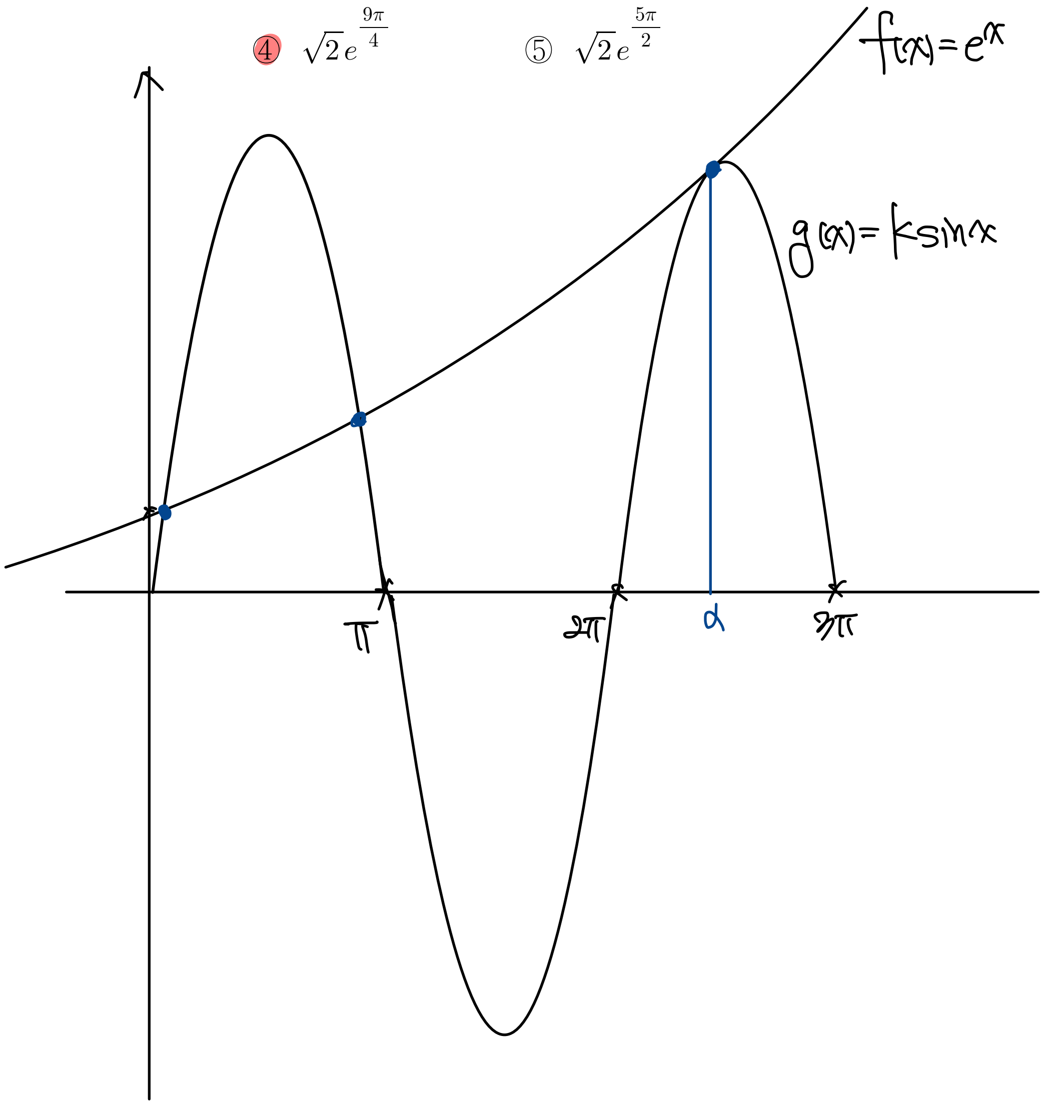
27. 두 함수

양의 실근의 개수가 홀수 ⇒ 접할때 등

$$f(x)=e^x, \quad g(x)=k\sin x$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$ ④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$



$f(\alpha)=g(\alpha) \Rightarrow e^{\alpha}=k\sin\alpha \cdots (1)$

$f'(\alpha)=g'(\alpha) \Rightarrow e^{\alpha}=k\cos\alpha \cdots (2)$

$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow 1=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ 이므로

$\tan\alpha=1 \quad \alpha=\frac{9}{4}\pi$

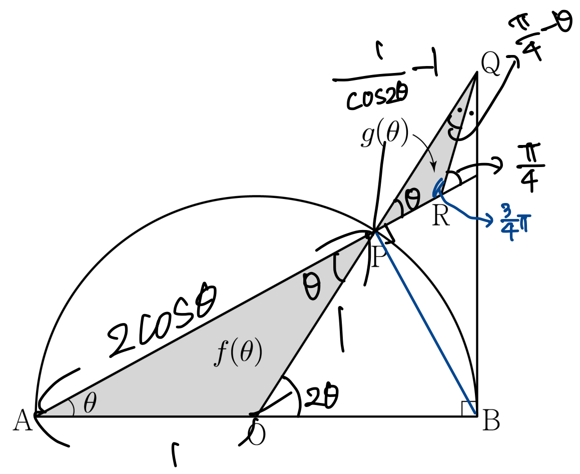
식 (1)에 대입하면 $e^{\frac{9}{4}\pi}=k\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\boxed{k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$$

((2)식에 대입해도 같은 결과가 나온다)

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, $\angle OQB$의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. $\angle OAP=\theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim\limits_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin(\pi-2\theta)$

$=\frac{1}{2}\sin2\theta$

$\triangle PQR$ 에서 $\frac{\overline{PQ}}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\frac{\overline{QR}}{\sin\theta}$, $\sqrt{2}\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)=\frac{\overline{QR}}{\sin\theta}$.

$\overline{QR}=\sqrt{2}\sin\theta\,\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}$

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\times\sqrt{2}\sin\theta\,\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\times\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{(1-\cos2\theta)^2}{\cos^2 2\theta}\times\sin\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}=\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{(1-\cos2\theta)^2}{\cos^2 2\theta}\times\sin\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\theta^4\times\frac{1}{2}\sin2\theta}$ 1 $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos2\theta)^2\sin\theta}{\theta^4\sin2\theta}$

$=\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{\sin^4 2\theta\times\sin\theta}{\theta^4\sin2\theta\times(1+\cos2\theta)^2}$ $\frac{\times\frac{1}{\theta^5}}{\times\frac{1}{\theta^5}}$

$=\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\left(\frac{\sin2\theta}{\theta}\right)^4}{\frac{\sin2\theta}{\theta}\times(1+\cos2\theta)^2}=\frac{1\times2^4}{2\times2^2}$

$=\boxed{2}$

단답형

29. $t > 2e$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $f(x) = t(\ln x)^2 - x^2$ 이 $x = k$ 에서 극대일 때, 실수 k 의 값을 $g(t)$ 라 하면 $g(t)$ 는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha) = e^2$ 인 실수 α 에 대하여 $\alpha \times \{g'(\alpha)\}^2 = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$f'(x) = \frac{2t\ln x}{x} - 2x \qquad f'(k) = \frac{2t\ln k}{k} - 2k = 0$

$2t\ln k - 2k^2 = 0 \qquad \boxed{t = \frac{k^2}{\ln k}}$

$g^{-1}(t)$의 존재여부는 시험장에서 확인할 필요X

$g(t)$가 위의 식을 만족시키므로 * $\boxed{g^{-1}(t) = \frac{t^2}{\ln t}}$

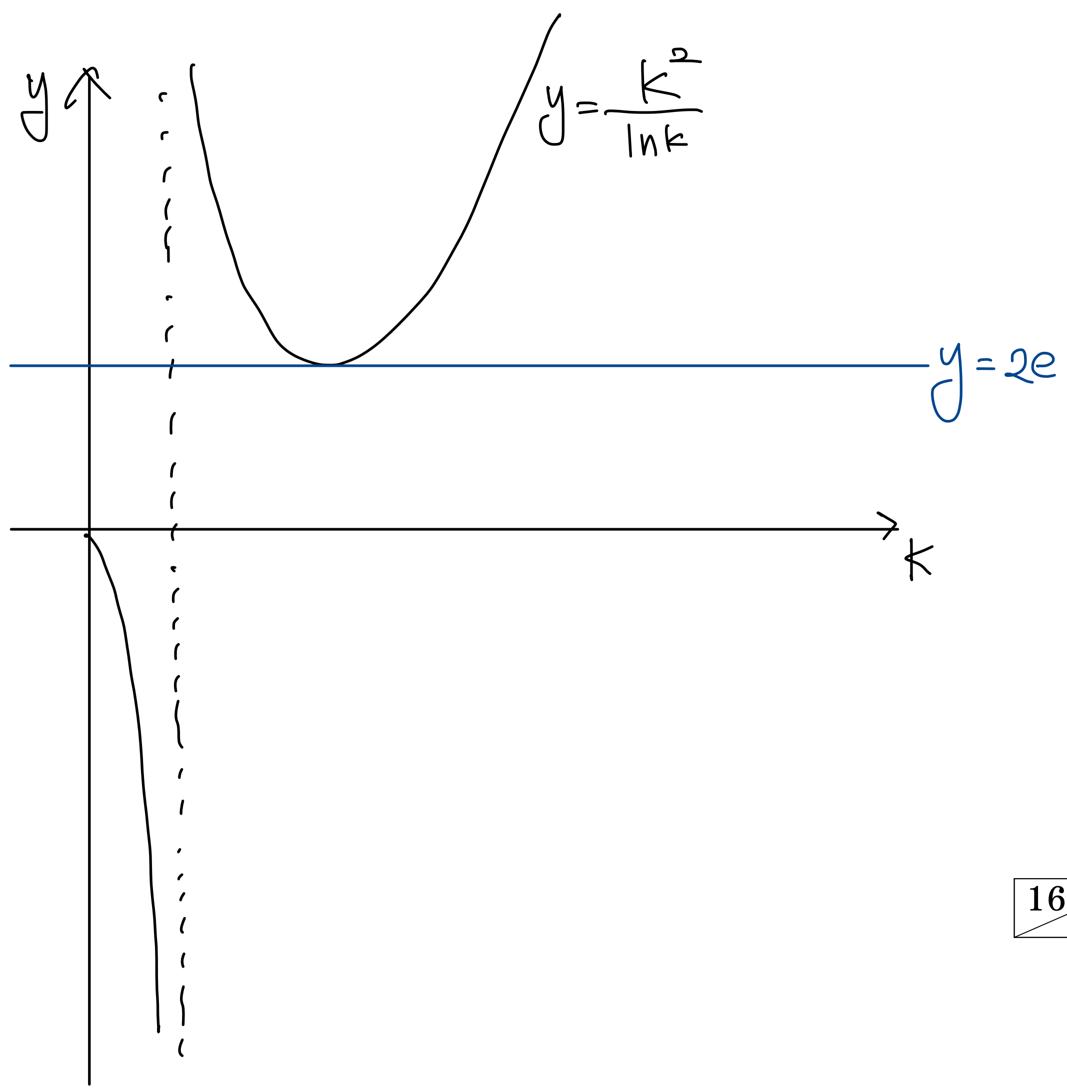
$\underset{\alpha}{g^{-1}(g(\alpha))} = \frac{e^4}{\ln e^2} = \frac{1}{2}e^4$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}e^4$

$\left(g^{-1}(t)\right)' = \frac{2t\ln t - t}{(\ln t)^2} \qquad g'(\alpha) = \frac{1}{\left(g^{-1}(g(\alpha))\right)'}$

$\left(g^{-1}(e^2)\right)' = \frac{3e^2}{4} \qquad = \frac{1}{\left(g^{-1}(e^2)\right)'} = \frac{4}{3e^2}$

$\alpha \times \{g'(\alpha)\}^2 = \frac{e^4}{2} \times \frac{16}{9e^4} = \frac{8}{9} \qquad \boxed{\therefore 9+8=17}$



ⓥ 별해

$\frac{k^2}{\ln k} = t, \quad k^2 = t\ln k \xrightarrow[k=e^2,\ t=\frac{e^4}{2}]{t\text{에 대한미분}} 2kk' = \ln k + \frac{k'}{k}t$

$2e^2k' = 2 + \frac{k'}{e^2} \times \frac{e^4}{2}, \quad 2e^2k' = 2 + \frac{1}{2}e^2k'$

$\frac{3}{2}e^2k' = 2 \qquad k' = \frac{4}{3e^2}$

Sol 1) $\ln(1+e^{2x}-e^{-2t}) = x+t$

⇒ 이식을 만족시키는 x는 $\alpha(t), \beta(t)$라 하자. $(\alpha(t)<\beta(t))$

$t=\ln 2$ 에서만 관찰!

$\ln(1+e^{2x}-\frac{1}{4}) = x+\ln 2$

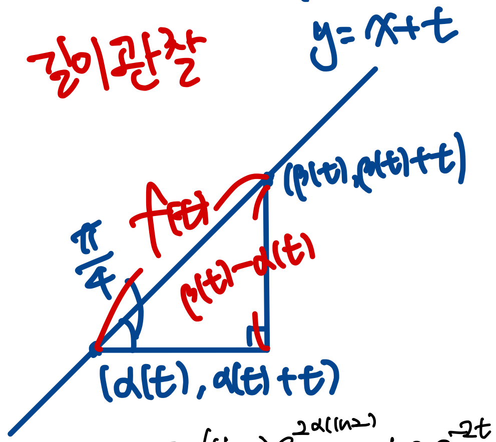
$\frac{3}{4}+e^{2x}=2e^{x}$, $4e^{2x}-8e^{x}+3=0$ $(2e^{x}-1)(2e^{x}-3)=0$

⇒ $\boxed{e^{x}=\frac{1}{2} \text{ OR } \frac{3}{2}}$ $e^{\alpha(\ln 2)}=\frac{1}{2}$, $e^{\beta(\ln 2)}=\frac{3}{2}$.

㉮ : $\boxed{f(\ln 2)=\sqrt{2}(\beta(\ln 2)-\alpha(\ln 2))}$ $\xRightarrow{미분}$ $f'(t)=\sqrt{2}(\beta'(t)-\alpha'(t))$

$f'(\ln 2)=\sqrt{2}(\beta'(\ln 2)-\alpha'(\ln 2))$

길이관찰



① $x=\alpha(\ln 2)$ 일때,

$\ln(1+e^{2\alpha(\ln 2)}-e^{-2t})=\alpha(\ln 2)+t \xRightarrow{미분} \frac{2\alpha'(\ln 2)e^{2\alpha(\ln 2)}+2e^{-2t}}{1+e^{2\alpha(\ln 2)}-e^{-2\ln t}}=\alpha'(\ln 2)+1$

$\frac{\cancel{2}\alpha'(\ln 2)\frac{1}{\cancel{4}}+\frac{2}{4}}{1+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{4}}}=\alpha'(\ln 2)+1$, $\frac{1}{2}\alpha'(\ln 2)+\frac{1}{2}=\alpha'(\ln 2)+1$ $\boxed{\alpha'(\ln 2)=-1}$

② $x=\beta(\ln 2)$ 일때,

$\frac{2\beta'(\ln 2)e^{2\beta(\ln 2)}+2e^{-2t}}{1+e^{2\beta(\ln 2)}-e^{-2t}}=\beta'(\ln 2)+1$ $\frac{2\times\frac{9}{4}\times\beta'(\ln 2)+\frac{1}{2}}{1+\frac{9}{4}-\frac{1}{4}}=\beta'(\ln 2)+1$

$\frac{\frac{9}{2}\beta'(\ln 2)+\frac{1}{2}}{3}=\beta'(\ln 2)+1$ $\frac{9}{2}\beta'(\ln 2)+\frac{1}{2}=3\beta'(\ln 2)+3$

$\frac{3}{2}\beta'(\ln 2)=\frac{5}{2}$ $\boxed{\beta'(\ln 2)=\frac{5}{3}}$

㉮ : $\sqrt{2}(\beta'(\ln 2)-\alpha'(\ln 2))=\sqrt{2}(\frac{5}{3}-(-1))=\frac{8}{3}\sqrt{2}$

$p=3$ $q=8$ $\boxed{p+q=11}$

30. $t>\frac{1}{2}\ln 2$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)=\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Sol 2)

$\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})=x+t$

$1+e^{2x}-e^{-2t}=e^{x+t}$ $e^{x}=X$ $e^{t}=T$

$1+X^2-\frac{1}{T^2}=XT$

$(X^2T^2-1)+(T^2-XT^3)=0$

$(XT+1)(XT-1)-T^2(XT-1)=0$

$(XT-1)(XT+1-T^2)=0$

$(e^{x+t}-1)(e^{x+t}-e^{2t}+1)=0$

$e^{x+t}=1$ $x=-t$ ⋯① ⇒ 교점의좌표 $(-t,0)$

$e^{x+t}=e^{2t}-1$

$x+t=\ln(e^{2t}-1)$

$x=\ln(e^{2t}-1)-t$ ⋯② ⇒ 교점의좌표 $(\ln(e^{2t}-1)-t, \ln(e^{2t}-1))$

두 점사이 거리 : $\sqrt{2}\ln(e^{2t}-1)$ ($\because t>\frac{1}{2}\ln 2$ 이므로 $\ln(e^{2t}-1)>0$ 이다)

$f(t)=\sqrt{2}\ln(e^{2t}-1)$

$f'(t)=\sqrt{2}\frac{2e^{2t}}{e^{2t}-1}$ $f'(\ln 2)=\sqrt{2}\frac{8}{3}$ ∴ $p=3$, $q=8$

$\boxed{11}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인 하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

by. 조은혜. 김낭적

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(k+3,\ 3k-1)$과 $\vec{b}=(1,\ 1)$이 서로 평행할 때, 실수 k의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

i) $(k+3,\ 3k-1)=t(1,1)$

ii) $t=k+3=3k-1 \quad \therefore k=2$

24. 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(2,\ \sqrt{2})$에서의 접선의 x절편은? [3점]

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

i) $\frac{2}{8}x+\frac{\sqrt{2}}{4}y=1$

ii) $y=0 \Rightarrow \frac{1}{4}x=1 \quad \therefore x=4$

25. 좌표평면 위의 두 점 A(1, 2), B(−3, 5)에 대하여

$$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AB}|$$

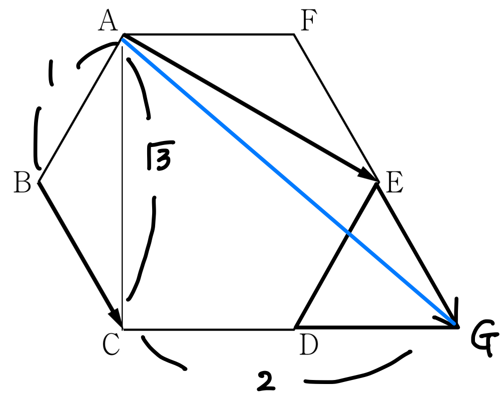
를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 10π ② 12π ③ 14π ④ 16π ⑤ 18π

i) $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AB}|=5$

ii) P는 반지름=5 인원 ⇒ 10π

26. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}|$의 값은? [3점]

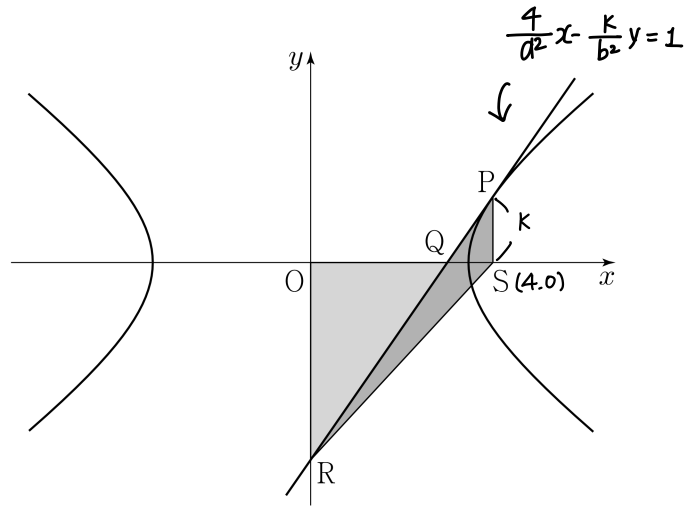


① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

i) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AG}$

ii) $|\overrightarrow{AG}|=\sqrt{3+4}=\sqrt{7}$

27. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ k)\ (k>0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, y축과 만나는 점을 R라 하자. 점 $\mathrm{S}(4,\ 0)$에 대하여 삼각형 QOR의 넓이를 A_1, 삼각형 PRS의 넓이를 A_2라 하자. $A_1 : A_2 = 9:4$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, O는 원점이고, a와 b는 상수이다.) [3점]



① $2\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{14}$

i) 접선 : $\frac{4}{a^2}x-\frac{k}{b^2}y=1$ $\begin{cases} x\text{절편} : \frac{a^2}{4} \\ y\text{절편} : -\frac{b^2}{k} \end{cases}$

$\Rightarrow A_1 = \frac{a^2}{4} \times \frac{b^2}{k} \times \frac{1}{2} = \frac{a^2b^2}{8k}$

ii) $A_2 = k \times 4 \times \frac{1}{2} = 2k$

iii) $A_1 : A_2 = \frac{a^2b^2}{8k} : 2k = 9:4 \Rightarrow a^2b^2 = 36k^2 \cdots ㉠$

iv) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 이 $(4.k)$을 지남

$\Rightarrow \frac{16}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}=1 \cdots ㉡$

㉠에 의해 $b^2=\frac{36k^2}{a^2}$ 이고, 이를 ㉡에 대입하면

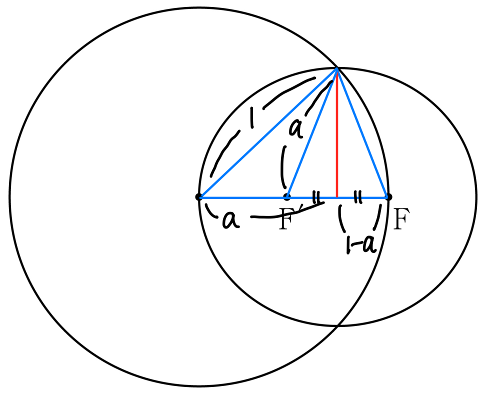
$\frac{16}{a^2}-\frac{a^2}{36}=1$, $a^4+36a^2-36\cdot16=0$

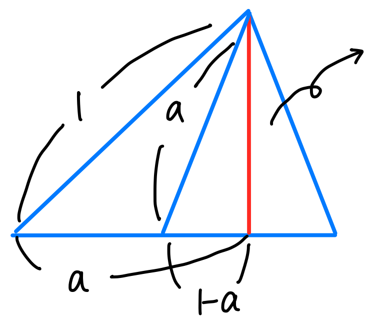
$(a^2-12)(a^2+48)=0$

$a=2\sqrt{3}$ $\therefore 2a=4\sqrt{3}$

28. 두 초점이 F, F$'$이고 장축의 길이가 $2a$인 타원이 있다. 이 타원의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 이 타원의 서로 다른 두 꼭짓점과 한 초점을 지날 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$ ③ $\sqrt{3}-1$ ④ $2\sqrt{2}-2$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$





피타고라스 정리에 의해

$a^2-(1-a)^2 = 1-a^2$

$a^2-1-a^2+2a = 1-a^2$

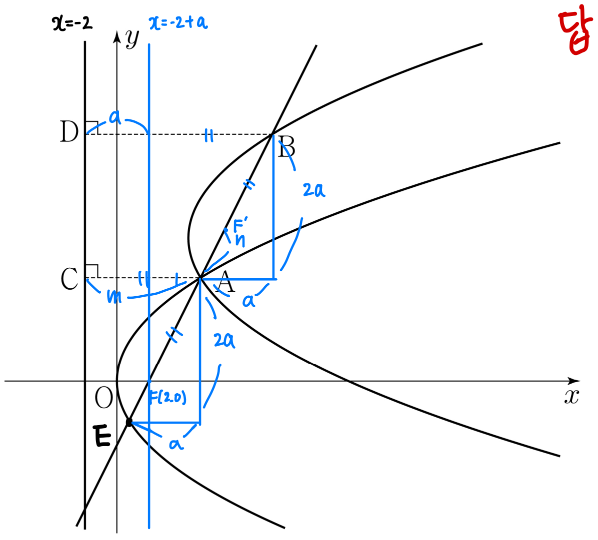
$a^2+2a-2=0$

$\therefore a=\sqrt{3}-1$

단답형

29. 포물선 $y^2=8x$와 직선 $y=2x-4$가 만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점을 A라 하자. 양수 a에 대하여 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 점 A를 지날 때, 직선 $y=2x-4$와 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, $\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=k$이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]

답)80



i) $(y-2a)^2=8(x-a)$의 초점 $F'(2+a, 2a)$은 직선 $y=2x-4$를 지남

⇒ 점A는 점E를 x축으로 $+a$, y축으로 $+2a$만큼 평행이동한점

ii) $\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}$

$= m+a+m-(m+n)$

$= m+a-n$

$a+n=m \Rightarrow a+n+a-n=2a$

iii) a는 $y^2=8x$ 와 $y=2x-4$ 의 두 교점의 x좌표의 차

$(2x-4)^2=8x$, $4(x^2-6x+4)=0$

$\rightarrow \alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$

$36-16=20 \quad \therefore a=\sqrt{20}$

$\Rightarrow k^2=4a^2=80$

30. 좌표평면 위의 네 점 A$(2, 0)$, B$(0, 2)$, C$(-2, 0)$, D$(0, -2)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 네 변 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AD})=0$
> (나) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} \geq -2$이고 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP} \geq 0$이다.
> (다) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ} \geq -2$이고 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ} \leq 0$이다.

점 R$(4, 4)$에 대하여 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

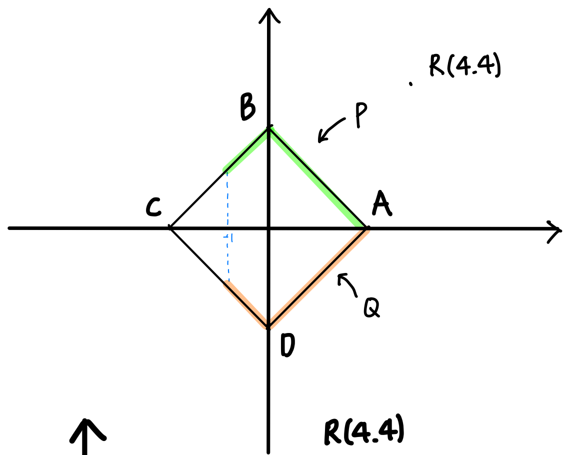
답)48

경우I 경우II

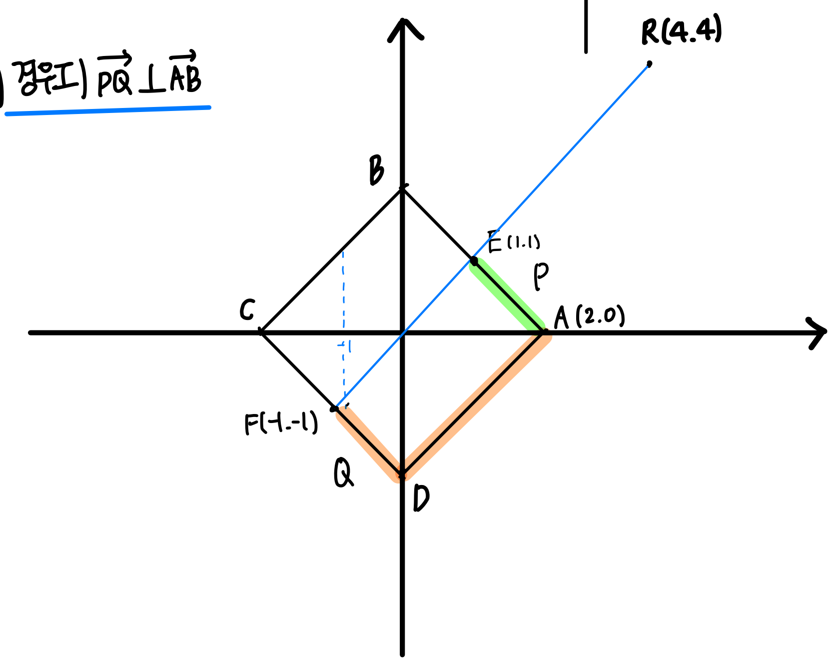
(가) $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{AB}$ or $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{AD}$

i) (나) 점P위치

(다) 점Q위치



ii) 경우I) $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{AB}$



①점P=점A → 점Q는 $\overline{AD}$위에 존재

$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{RP}\cdot(\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{PQ})=|\overrightarrow{RP}|^2+\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{PQ}=20+\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{PQ}$

M: 점Q=점D → $20+3\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}=32$

m: 점Q=점A → 20

②점P≠점A → 점Q는 $\overline{DF}$위에 존재

$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=|\overrightarrow{RP}|^2+\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{PQ}=|\overrightarrow{RP}|^2+2\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}=|\overrightarrow{RP}|^2+12$

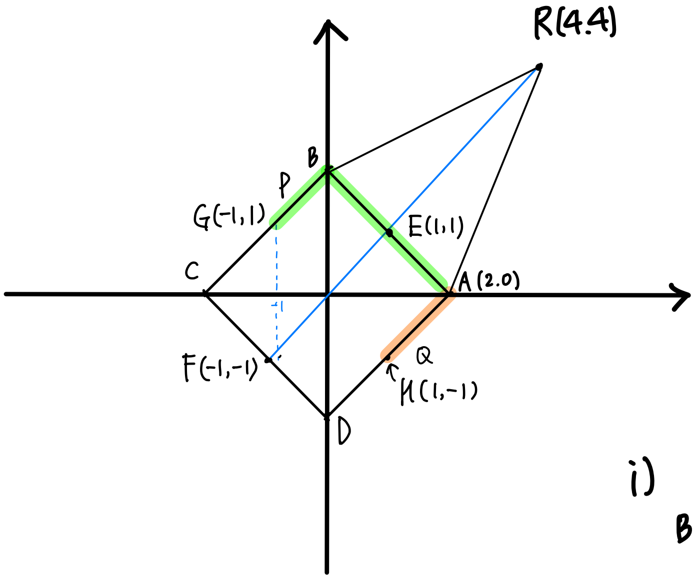
점P의 위치에 따라 점Q는 정해짐

M: 없음 (점P=점A 일때 최대)

m: 점P=점E → 18+12=30

> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

경우ii) $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AD}$



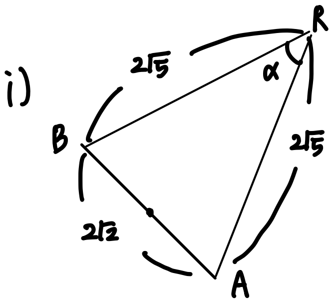
① 점Q = 점A → 점P는 $\overline{AB}$ 위에 존재

$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RA}$

M : 점P = 점A → 20

m : 점P = 점B → 16

i)



cos 법칙에 의해

$(2\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 - 2\cdot 2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\cos\alpha$

$\therefore \cos\alpha = \frac{4}{5}$

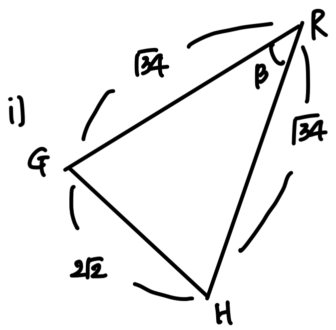
ii) $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RA}\cdot\overrightarrow{RB} = |\overrightarrow{RA}||\overrightarrow{RB}|\cos\alpha = 20\cdot\frac{4}{5} = 16$

② 점Q≠점A → 점P는 $\overline{BG}$ 위에 존재

M : 점P = 점G, 점Q = 점H → 30

m : 없음 (점Q = 점A 일때 최소)

i)



cos 법칙에 의해

$(2\sqrt{2})^2 = (\sqrt{34})^2 + (\sqrt{34})^2 - 2\cdot\sqrt{34}\sqrt{34}\cos\beta$

$\therefore \cos\beta = \frac{15}{17}$

ii) $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RG}\cdot\overrightarrow{RH} = |\overrightarrow{RG}||\overrightarrow{RH}|\cos\beta = 34\cdot\frac{15}{17} = 30$

iii) 최대 32, 최소 16 $\therefore M+m=48$