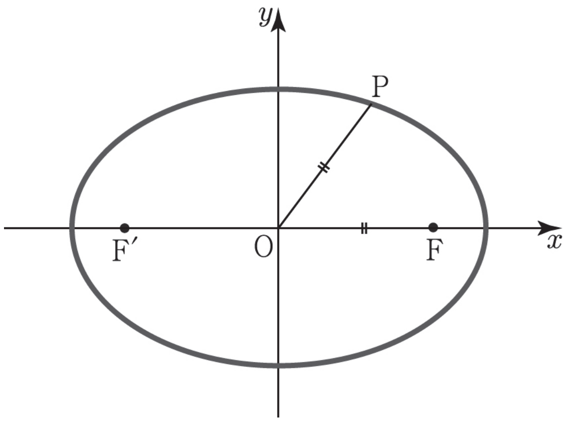
07

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$의 x좌표가 양수인 초점을 F라고 하자. 이 타원 위 제1사분면의 한 점P에서 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OF}}$일 때, $\cos(\angle\mathrm{AOF})=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수)



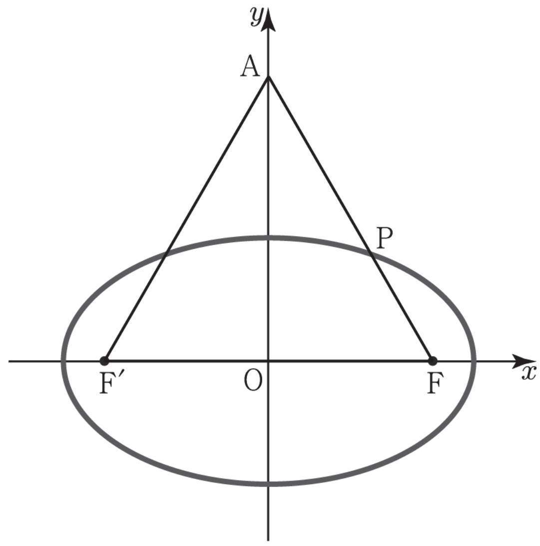
08

다음 물음에 답하시오.

(1)

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 두 초점 F, F′을 꼭짓점으로 하고 y축 양의 방향에 나머지 꼭짓점이 있는 정삼각형 $\triangle\mathrm{AF'F}$에서 $\overline{\mathrm{AF}}$와 타원의 교점을 P라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7



(2)

점 $(0, 8)$을 지나고, 기울기가 1 인 직선이 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$ 과 만나는 두 점 A, B 와 점 C $(0, -8)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 둘레의 길이는?

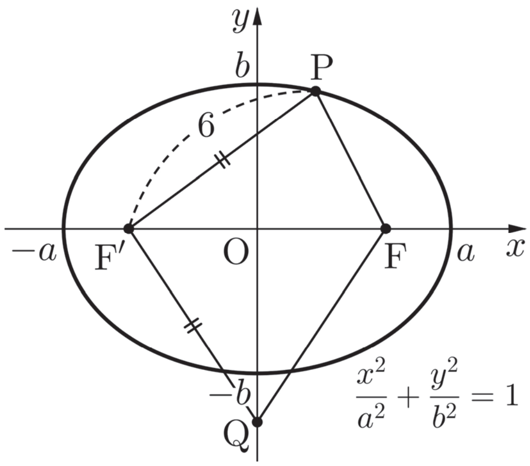
① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

25

그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하자. 타원 위의 제1사분면에 있는 점 P와 y축 위의 점을 $\mathrm{Q}(0,\ -a)$가 다음 조건을 만족시킨다.

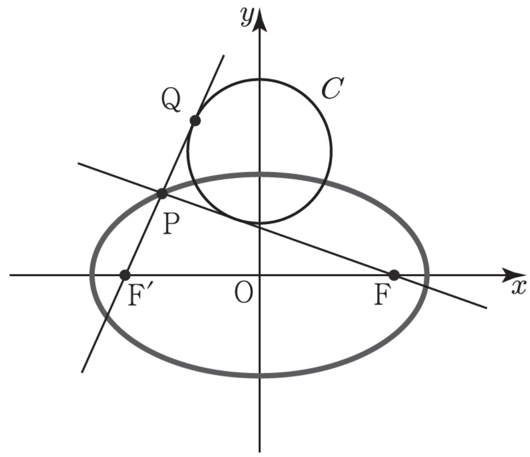
(가) $\overline{\mathrm{PF}'}=\overline{\mathrm{QF}'}=6$
(나) 삼각형 $\mathrm{PF}'\mathrm{F}$와 삼각형 $\mathrm{QF}'\mathrm{F}$의 둘레의 차는 2이다.

c^2의 값을 구하시오.



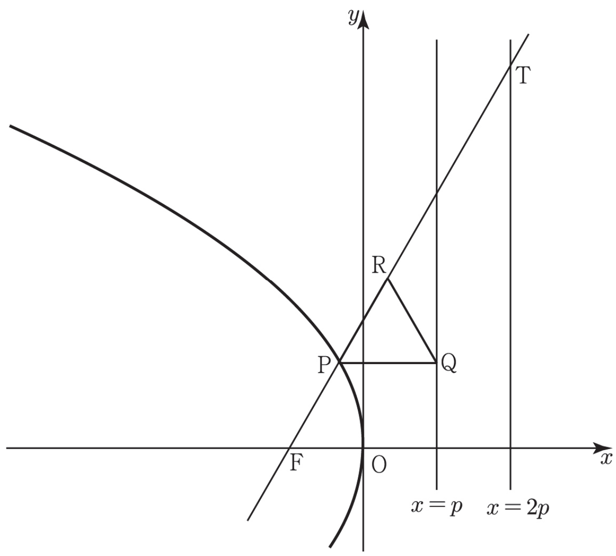
26

그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1$ $(a>3)$ 위의 점 P에 대하여 직선 FP와 직선 F′P에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 C가 있다. 직선 F′P와 원 C의 접점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{F'Q}}=5$일 때, $a+\overline{\mathrm{F'F}}$의 값을 구하시오.



48

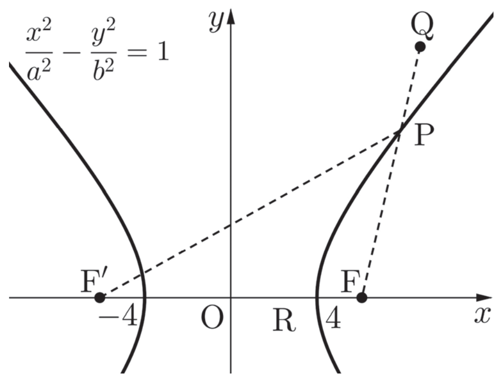
그림과 같이 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 $\mathrm{F}(-p,\ 0)$ $(p>0)$인 포물선이 있다. 포물선 위의 점 P, 직선 $x=p$위의 점 Q와 제1사분면 위의 점 R에 대하여 직선 PQ가 x축과 평행하고 삼각형 PQR는 정삼각형이다. 직선 FP가 점 $\mathrm{T}(2p,\ 9)$을 지날 때, 점 R의 좌표는 $(a,\ b)$이다. $\dfrac{b^2}{a^2}$의 값을 구하시오. (단, $a>0$, $b>2$인 실수이고 점 P는 제2사분면 위의 점이다.)



49

그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이고, 주축의 길이가 8인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$과 쌍곡선 위에 있지 않은 제1사분면에 있는 점 Q가 있다. 제1사분면에 있는 쌍곡선 위를 움직이는 점 P와 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF}'}$가 최소일 때, 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점의 좌표가 $\mathrm{R}\left(\dfrac{c}{3},\ 0\right)$이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF}'}$의 최솟값이 20일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이를 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{QF}}$와 쌍곡선은 한 점에서 만난다.)



77

다음 물음에 답하시오.

(1)

초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$위 제1사분면에 있는 점A가 중점이고, x축, y축에 동시에 접하는 원이 있다. 이원 위의 동점 P에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{F'P}}+\overrightarrow{\mathrm{FP}}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면 $Mm=\frac{q}{p}$이다. 이때 $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

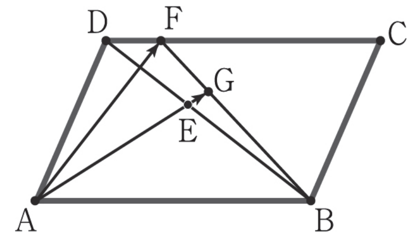
(2)

좌표평면에서 점 A$(1, -1)$과 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, O는 원점이다.)

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

78

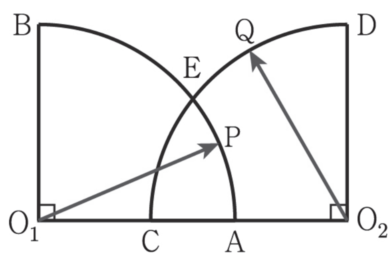
그림과 같이 평행사변형 ABCD에서 $5\overrightarrow{\mathrm{BE}}=3\overrightarrow{\mathrm{BD}}$인 점을 E, $5\overrightarrow{\mathrm{CF}}=4\overrightarrow{\mathrm{CD}}$인 점을 F라 하자. 직선 AE와 선분 BF가 만나는 점을 G라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{AF}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$이다. 상수 t의 값은?



① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{11}{15}$ ④ $\frac{15}{22}$ ⑤ $\frac{17}{27}$

114

그림과 같이 선분 O_1O_2위에 $\overline{O_1A}=\overline{O_2C}=1$인 두 점 A, C가 있다. 두 선분 O_1A, O_2C를 각각 반지름으로 하는 두 사분원의 호 AB, CD가 만나는 점을 E라 하고, 두 사분원의 중심을 각각 O_1, O_2라 하자. 호 AE 위를 움직이는 점 P와 호 DE 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\left|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}\right|$의 최댓값이 $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$일 때, 선분 O_1O_2의 길이는 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $1<\overline{O_1O_2}<2$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



115

좌표평면 위의 두 점 $A(-1, \sqrt{3})$, $B(-2, 0)$에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\left|\overrightarrow{AP}\right|=2$
> (나) $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OQ}$인 실수 k가 존재한다.
> (다) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-4$

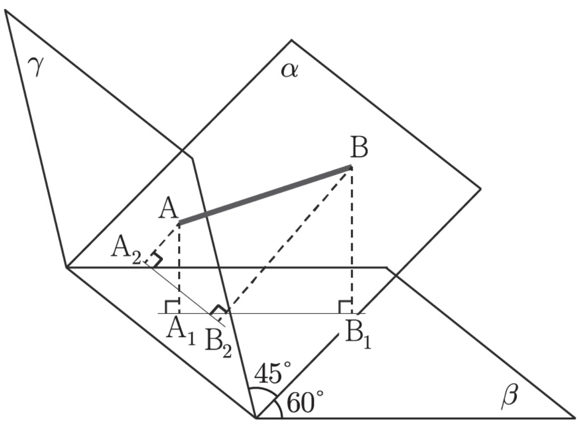
점 Q가 나타내는 도형 위의 점 X가 $\left|\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OX}\right|\le 4$을 만족시킬 때, 점 X가 나타내는 도형의 길이를 l이라 하자. $3l^2$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고 $k\neq 0$, $k\neq 1$인 상수이다.)

공간도형
—
킬러극킬

174

그림과 같이 두 점 A, B를 포함하는 평면을 α라 하고 평면 α와 이루는 예각이 $60°$ 인 평면을 β, β와 반대편 쪽으로 α와 $45°$ 의 각을 이루는 평면을 γ라 하자. 두 점 A, B에서 평면 β에 내린 수선의 발을 각각 A_1, B_1라 하고 평면 γ에 내린 수선의 발을 각각 A_2, B_2라 할 때, 평면 α, β, γ와 그 평면 위의 점들은 다음을 만족시킨다.

$\overline{AB}=6$, $\overline{AA_1}=3\sqrt{3}$, $\overline{BB_1}=5\sqrt{3}$, $\overline{AA_2}=3$, $\overline{BB_2}=6$



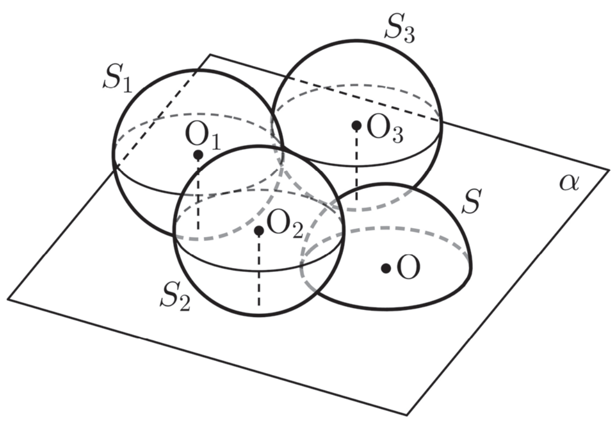
이때, 평면 AA_1B_1B와 α가 이루는 각을 θ_1, 평면 AA_2B_2B와 α가 이루는 각을 θ_2라 하면 $\sin\theta_1\sin\theta_2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

175

그림과 같이 평면 α 위에 있는 반구 S와 세 구 S_1, S_2, S_3가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 세 구의 반지름의 길이와 반구의 반지름의 길이는 모두 2이다. (나) 세 구는 모두 α에 접하고 반 구 S의 밑면은 α에 포함된다. (다) S_1은 S_2, S_3와 접하며 반 구 S는 S_2, S_3와 접하고 S_2, S_3의 중심사이 거리는 $4\sqrt{2}$이다.

S, S_1, S_2, S_3 의 중심을 각각 O, O_1, O_2, O_3 이라 하자. 세 점 O, O_2, O_3을 지나는 평면을 β라 하자. 구 S_1의 평면 β 위로의 정사영을 P, P의 α위로의 정사영을 Q라 하자. 도형 P, Q의 넓이를 각각 m, n이라 할 때, $m+n$의 값은?



① 4π ② $(4+\sqrt{2})\pi$ ③ $(9+\sqrt{2})\pi$
④ $(4+2\sqrt{2})\pi$ ⑤ $(4+3\sqrt{2})\pi$