2021학년도 3월 고3 전국연합학력평가 문제지

제 2 교시

수험생 여러분 고생하셨어요~
3모 ≠ 수능 이니까
공부 파이팅하세요!!

수학 영역

by 지민!

개인적으로 이번 3평은 비범한 두뇌,
엄청난 계산력 등으로 결정나는 게 아니라,
기초 개념을 정확히 알면 풀수있는 시험이었다고
생각해요!! 충분히 모두 풀 수 있는 문항이고
그만한 가치가 있는 문항들이니 꼭 전문항 복습하시길!

5지선다형

1. $\log_8 16$의 값은? [2점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

$\log_8 16 = \log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3}\log_2 2$

$= \boxed{\frac{4}{3}}$

2. 공차$\to d$가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4 = 100$일 때, a_1의 값은? [2점]

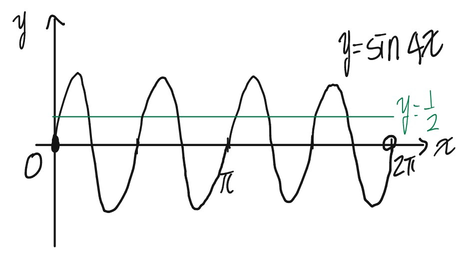
① 91 ② 93 ③ 95 ④ 97 ⑤ 99

$a_4 = a_1 + 3d = a_1 + 3\times3 = 100$

$\therefore \boxed{a_1 = 91}$

3. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\sin 4x = \frac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10



교점의 개수 = $\boxed{8}$

<별해>
$\sin 4x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{6}$ or $\frac{5}{6}\pi$ or $\frac{13}{6}\pi$ or $\cdots$

$= \underbrace{\frac{\pi}{6} + 2n\pi}_{①}$ or $\underbrace{\frac{5}{6}\pi + 2n\pi}_{②}$

$0 \le x < 2\pi \Rightarrow 0 \le 4x < 8\pi$

①,② 식에 $n=0 \sim n=3$ 대입한 x까지 가능 $\therefore \boxed{8\text{개}}$

4. $\int_{2}^{-2} (x^3 + 3x^2)\,dx$의 값은? [3점]

① -16 ② -8 ③ 0 ④ 8 ⑤ 16

$\int_2^{-2} (x^3 + 3x^2)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3\right]_2^{-2}$

$= (4-8) - (4+8)$

$= \boxed{-16}$

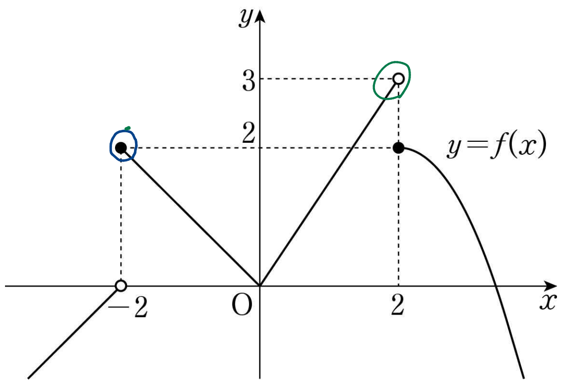
$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ 와 같이 적분구간이 $x=0$ 대칭일 때,
① $f(x)$: y축 대칭 : $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$
② $f(x)$: 원점 대칭 : $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

<sol2> $\Rightarrow \int_2^{-2} (x^3 + 3x^2)\,dx = 2\int_0^{-2} 3x^2\,dx$

$= 2\left[x^3\right]_0^{-2}$

$= \boxed{-16}$

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to-2+} f(x) + \lim_{x\to 2-} f(x)$의 값은? [3점]

① 6　② 5　③ 4　④ 3　⑤ 2

① $\lim_{x\to-2+} f(x) = 2$　② $\lim_{x\to2-} f(x) = 3$

$\therefore \lim_{x\to-2+} f(x) + \lim_{x\to2-} f(x) = \boxed{5}$

6. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax+b}{x-3} & (x<3) \\ \dfrac{2x+1}{x-2} & (x\ge 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

$f(x)$는 $x\neq3$ 인 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=3$에서 연속이면 모든 실수에서 연속이 된다.

$\lim_{x\to3-} f(x) = \lim_{x\to3+} f(x) = f(3)$

$\lim_{x\to3-} \dfrac{x^2+ax+b}{x-3} = \lim_{x\to3+} \dfrac{2x+1}{x-2} = 7$

$\lim_{x\to3-} \dfrac{x^2+ax+b}{x-3}$ → 분모→0 이므로 분자→0

$\therefore 9+3a+b=0 \Rightarrow b=-9-3a$

$\lim_{x\to3-} \dfrac{x^2+ax-9-3a}{x-3} = \lim_{x\to3-} \dfrac{(x-3)(x+a+3)}{x-3} = a+6=7$

$\therefore a=1,\ b=-12$　$\therefore a-b=\boxed{13}$

7. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n=\begin{cases} \dfrac{(n+1)^2}{2} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{n^2}{2}+n+1 & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [3점]

① 235　② 240　③ 245　④ 250　⑤ 255

a_n은 n이 홀수/짝수 일 때에 따라 달라지므로

홀수/짝수 일 때를 구분해 더한다.

$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{k=1}^{5} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{5} a_{2k}$

$= \sum_{k=1}^{5} \dfrac{(2k)^2}{2} + \sum_{k=1}^{5} \left\{\dfrac{(2k)^2}{2} + 2k+1\right\}$

$= \sum_{k=1}^{5} (4k^2+2k+1)$

$= 4\times\dfrac{5\cdot6\cdot11}{6} + 2\times\dfrac{5\cdot6}{2} + 5$

$= 220+30+5$

$= \boxed{255}$

<별해>

n이 짝수일 때,

$a_n = \dfrac{n^2}{2}+n+1 = \dfrac{(n+1)^2}{2}+\dfrac{1}{2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} \dfrac{(n+1)^2}{2} + \dfrac{1}{2}\times5$

$= \dfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{11} n^2 + \dfrac{5}{2}$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{11\cdot12\cdot23}{6}-1\right)+\dfrac{5}{2}$

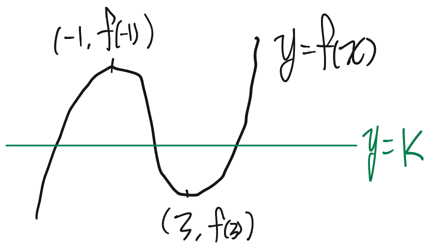
$= \dfrac{505}{2}+\dfrac{5}{2} = \boxed{255}$

8. 곡선 $y=x^3-3x^2-9x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 정수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은? [3점]

① 27 ② 28 ③ 29 ④ 30 ⑤ 31

$f(x)=x^3-3x^2-9x$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$



$\begin{cases} f(-1)=-1-3+9=5 \\ f(3)=27-27-27 \end{cases}$

$y=f(x)$와 $y=K$가 세 점에서 만나려면

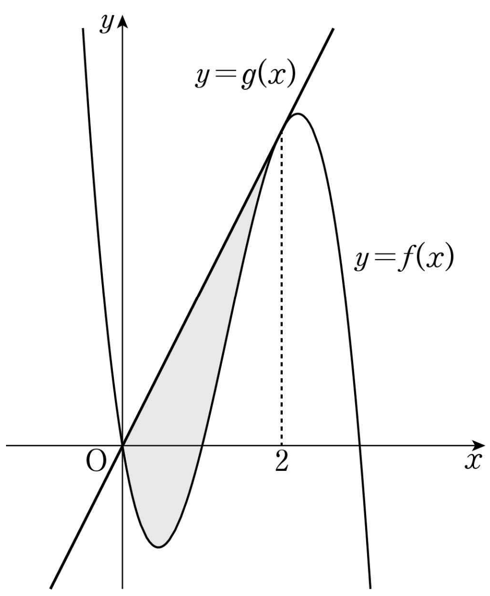
그림과 같이 K가 $f(x)$의 극댓값, 극솟값 사이여야 한다.

$-27<K<5 \Rightarrow M=4, m=-26$

$M-m=\boxed{30}$

9. 최고차항의 계수가 -3인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$와 원점에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$



$h(x)=g(x)-f(x)$ 라 하면,

$h(x)$는 최고차항의 계수가 3인 삼차함수고, $x=0$ or $x=2$에서 근을 갖는다.

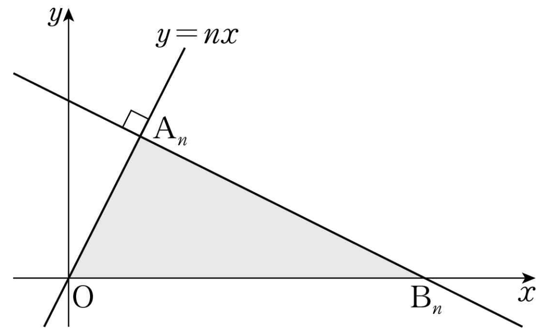
$\therefore h(x)=3x(x-2)^2=3x^3-12x^2+12x$

$S=\int_0^2 h(x)\,dx=\left[\frac{3}{4}x^4-4x^3+6x^2\right]_0^2$

$=12-32+24=\boxed{4}$

〈참고〉 삼차함수에서의 넓이공식 $\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4=\frac{1}{4}\cdot 2^4=4$ → 프린트 같이 참고해주세요!

10. 자연수 n에 대하여 점 $A_n(n, n^2)$을 지나고 직선 $y=nx$에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B_n이라 하자.



다음은 삼각형 A_nOB_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{n^3}$의 값을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)

> 점 $A_n(n, n^2)$을 지나고 직선 $y=nx$에 수직인 직선의 방정식은
>
> $y=$ (가) $\times x+n^2+1$
>
> 이므로 두 점 A_n, B_n의 좌표를 이용하여 S_n을 구하면
>
> $S_n=$ (나)
>
> 따라서
>
> $\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{n^3}=$ (다)
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 r라 할 때, $f(1)+g(2)+r$의 값은? [4점]

① 105 ② 110 ③ 115 ④ 120 ⑤ 125

(가)? 해당 조건을 만족시키는 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{n}(x-n)+n^2=-\frac{1}{n}x+n^2+1$ 이다.

$\therefore$ (가) $=\boxed{-\frac{1}{n}=f(n)}$

(나)? 점 B_n은 $y=-\frac{1}{n}x+n^2+1$이 x축과 만나는 점이므로

$B_n(n^3+n, 0)$ 이다.

따라서 $S_n=\frac{1}{2}\cdot(n^3+n)\cdot n^2=\frac{1}{2}n^5+\frac{1}{2}n^3$

$\therefore$ (나) $=\boxed{\frac{1}{2}n^5+\frac{1}{2}n^3=g(n)}$

(다)? $\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{n^3}=\sum_{n=1}^{8}\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{8\cdot 9\cdot 17}{6}+4$

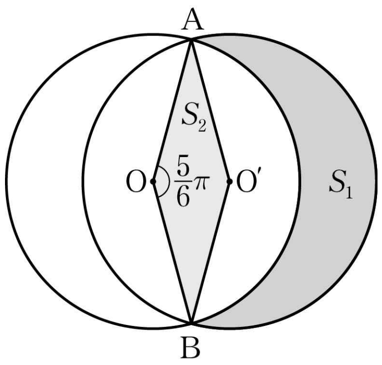
$=106$

$\therefore$ (다) $=\boxed{106=r}$

$\therefore f(1)+g(2)+r=-1+(16+4)+106$

$=\boxed{125}$

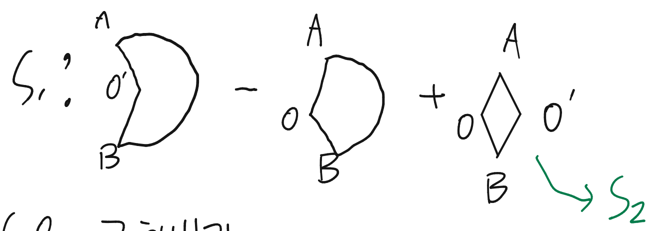
11. 그림과 같이 두 점 O, O′을 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 두 원 O, O'이 한 평면 위에 있다. 두 원 O, O'이 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, $\angle \mathrm{AOB} = \frac{5}{6}\pi$이다.



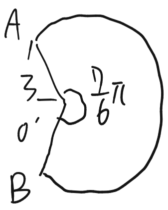
원 O의 외부와 원 O'의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1, 마름모 AOBO′의 넓이를 S_2라 할 때, $S_1 - S_2$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{4}\pi$ ② $\frac{4}{3}\pi$ ③ $\frac{17}{12}\pi$ ④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ $\frac{19}{12}\pi$

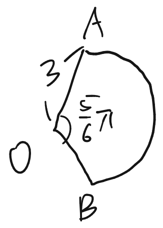
S_1 :



S_1을 구해보자.



$(넓이) = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{7}{6}\pi = \frac{21}{4}\pi$



$(넓이) = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{5}{6}\pi = \frac{15}{4}\pi$

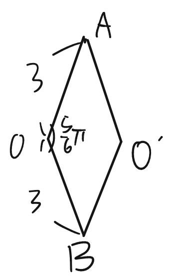
$\therefore S_1 = \frac{21}{4}\pi - \frac{15}{4}\pi + S_2$

$= \boxed{\frac{3}{2}\pi + S_2}$

$\therefore S_1 - S_2 = \boxed{\frac{3}{2}\pi}$

<참고>

S_2는 다음과 같이 구할 수 있다.



$S_2 = 2 \cdot \triangle AOB$

$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3^2 \sin \frac{5}{6}\pi\right)$

$= \boxed{\frac{9}{2}}$

12. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - g(x)}{x - 1} = 5$

(나) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) + g(x) - 2f(1)}{x - 1} = 7$

두 실수 a, b에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - a}{x - 1} = b \times g(1)$일 때, ab의 값은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

(가) : 극한식의 분모→0 이므로 분자→0

$\therefore \boxed{f(1) = g(1)}$

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - g(x)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\{f(x) - f(1)\} - \{g(x) - g(1)\}}{x - 1}$

$= \boxed{f'(1) - g'(1) = 5}$ … ①

(나) : 극한식의 분모→0 이므로 분자→0

$\therefore f(1) + g(1) = 2f(1) \Rightarrow$ 위 조건과 중복.

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) + g(x) - 2f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\{f(x) - f(1)\} + \{g(x) - g(1)\}}{x - 1}$

$= \boxed{f'(1) + g'(1) = 7}$ … ②

①② 를 연립하면 $\boxed{f'(1) = 6,\ g'(1) = 1}$ 이다.

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - a}{x - 1} = b\,g(1)$ 에서

$a = f(1)$, $f'(1) = b\,g(1)$ 임을 알 수 있고,

$f'(1) = 6$, $f(1) = g(1)$ 이므로

$6 = b f(1) = ab$

$\therefore ab = \boxed{6}$

13. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^x & (x<3) \\ \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{3+a}+8 & (x \ge 3) \end{cases}$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 23일 때, 정수 a의 값은? [4점]

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

i) $x<3$

$\lim_{x\to 3-} f(x)=8$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)=0$ 이고,

이 범위에서 증가하므로

$0<y<8$ 이다.

따라서 y좌표가 정수인 점의 개수는

$\boxed{7}$ 이다.

ii) $x \ge 3$

이 범위에서 y값이 정수이려면

$\left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}$ 이 정수여야 하고,

그러한 점의 개수가 $\boxed{16}$이어야 한다.

$f(3)=8$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=8-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}$ 이고,

$f(x)$는 이 범위에서 감소하므로

$8-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}<y\le 8$ 에 포함되

정수 y의 개수가 16 이어야 한다.

$15<\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}\le 16$

$15<\frac{4^{-a}}{4^3}\le 16$

$15\times 4^3<4^{-a}\le 4^5$ $\therefore \boxed{a=-5}$

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f'(x)|$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=g(0)=0$
(나) 방정식 $f(x)=0$은 양의 실근을 갖는다.
(다) 방정식 $\lvert f(x)\rvert=4$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$g(3)$의 값은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

(가): $f(0)=0$, $g(0)=f(0)+|f'(0)|=0$

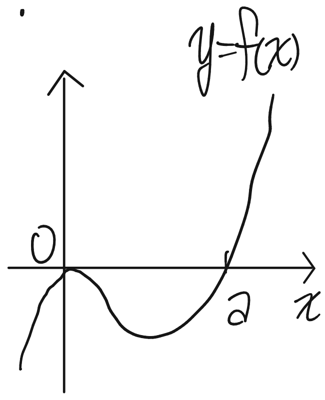
$\Rightarrow f'(0)=0$

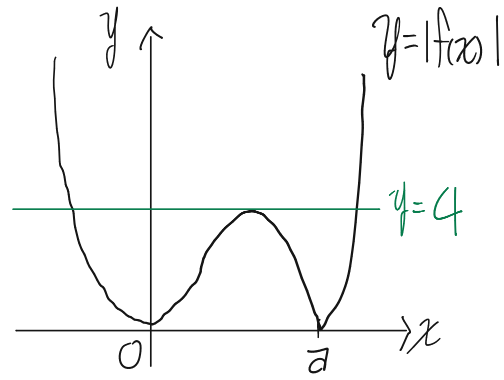
(나): (가)에서 방정식 $f(x)=0$은 $x=0$에서

중근을 가짐을 알 수 있었고, 양의 실근을 a라 하면,

$f(x)=x^2(x-a)$ 라 할 수 있다.

(다):





$y=|f(x)|$와 $y=4$의 교점의 개수가 3이려면

그림과 같이 $f(x)$의 극솟값이 -4 여야 한다.

$f'(x)=3x^2-2ax$ $\therefore x=\frac{2}{3}a$에서 극소

삼차함수의 비율관계를 통해서도 알 수 있다.

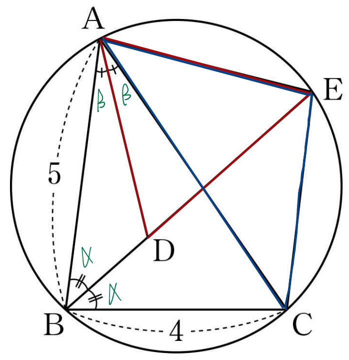
$f\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{8}{27}a^3-\frac{4}{9}a^3=-\frac{4}{27}a^3=-4$

$\therefore \boxed{a=3}$

$g(3)=f(3)+|f'(3)|=f(3)+f'(3)=f'(3)$

$=27-18=\boxed{9}$

15. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. ∠ABC의 이등분선과 ∠CAB의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD의 연장선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 E라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $\overline{AC}=6$

ㄴ. $\overline{EA}=\overline{EC}$

ㄷ. $\overline{ED}=\frac{31}{8}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

△ABC에서 코사인 법칙을 쓰면,

$\overline{AC}^2=25+16-2\cdot5\cdot4\cdot\frac{1}{8}=36$

$\therefore \overline{AC}=6$ ··· $\boxed{ㄱ(참)}$

$\angle ABE=\angle ACE$ (∵원주각) 이고, 마찬가지로 $\angle EBC=\angle EAC$ 이다.

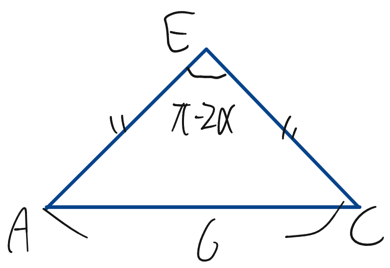
따라서 $\triangle EAC$는 $\overline{EA}=\overline{EC}$ 인 이등변삼각형이다. ··· $\boxed{ㄴ(참)}$

$\angle EBC=\angle EAC=\alpha$ ⇒ $\angle EAD=\alpha+\beta$ 이고,

$\triangle ABD$에서 $\angle DBA=\alpha$, $\angle DAB=\beta$ 이므로

삼각형의 외각인 $\angle ADE=\alpha+\beta$이다.

따라서 $\triangle EAD$는 $\overline{EA}=\overline{ED}$인 이등변삼각형이다.



코사인 법칙을 써서 $\overline{EA}$를 구하면,

$36=2\overline{EA}^2-2\overline{EA}^2\cos(\pi-2\alpha)$

$=\frac{9}{4}\overline{EA}^2$ $\therefore \overline{EA}=\overline{ED}=4$ ··· $\boxed{ㄷ(거짓)}$

단답형

16. 두 함수 $f(x)=2x^2+5x+3$, $g(x)=x^3+2$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수를 구하시오. [3점]

10

$h(x)=f(x)g(x)$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

$\begin{cases} f'(x)=4x+5 \\ g'(x)=3x^2 \end{cases}$ 이므로

$h'(0)=5\cdot2+3\cdot0$

$=\boxed{10}$

17. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$$3x^2-2(\log_2 n)x+\log_2 n>0$$

이 성립하도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오. [3점]

6

$f(x)=3x^2-2(\log_2 n)x+\log_2 n$ 이라 하면,

방정식 $f(x)=0$ 의 판별식 D가 $D<0$ 이어야 한다.

$D=4(\log_2 n)^2-12\log_2 n<0$

$4(\log_2 n)(\log_2 n-3)<0$

$0<\log_2 n<3$

$1<n<8$

$\therefore n$: $\boxed{6개}$

18. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $F(x)$의 도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}-2x & (x<0)\\ k(2x-x^2) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이다. $F(2)-F(-3)=21$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

9

$F(x)=\int f(x)dx$ 이므로,

$F(2)-F(-3)=\int_{-3}^{2} f(x)dx=\int_{-3}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx$

↳ $x=0$에서 함수식이 바뀌므로 꼭 나눠줘야 함

$\int_{-3}^{0} -2x\,dx+\int_{0}^{2} k(2x-x^2)dx$

$=[-x^2]_{-3}^{0}+[kx^2-\frac{k}{3}x^3]_{0}^{2}$

$=9+4k-\frac{8}{3}k=9+\frac{4}{3}k=21$

$\therefore \boxed{k=9}$

19. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1=2$, $a_2=4$이고 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}S_n=a_nS_{n+1}$$

이 성립할 때, S_5의 값을 구하시오. [3점]

162

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ 을 이용해 주어진 식을 정리하자.

최종적으로 S_5를 구해야 하므로 S_n에 대한 식을 얻는 것이 유리할 수 있다.

$(S_{n+1}-S_n)S_n=(S_n-S_{n-1})S_{n+1}$ $(n\geq 2)$

$S_n^2=S_{n-1}S_{n+1}$ ⇒ S_n이 등비수열

$S_1=2$, $S_2=6$ 이므로,

S_n은 $S_1=2$, $r=3$인 등비수열이다.

$\therefore S_5=2\times 3^4=\boxed{162}$

<comment> 생소한 비주얼 + 19번 + S_5 때문에 대입해서 S_5까지 구해나가서 푸신 분들이 많을 텐데 흠잡을 데 없는 풀이고, 잘 짜여진 관계식이어서 학습할 가치가 있겠다는 생각에 위 풀이를 삽입하였습니다!

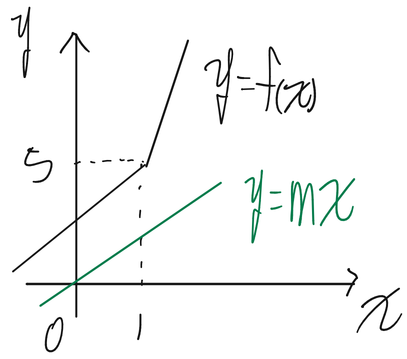
20. 실수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수

$$f(x)=2x+3+|x-1|$$

의 그래프의 교점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(5)$의 값을 구하시오. [4점]

8

$f(x)=\begin{cases}x+4 & (x<1)\\ 3x+2 & (x\geq 1)\end{cases}$



$g(m)$은 $y=mx$가 $(1,5)$를 지날 때나, $f(x)$와 평행한 지점을 기점으로 관찰해야 한다.

$g(m)=\begin{cases}1 & (m<1)\\ 0 & (1\leq m\leq 3)\\ 1 & (m>3)\end{cases}$

(1,5)를 지날 때 (m=5)가 y=3x+2와 평행할 때보다 가팔라서 m=5에서는 아무 일도 일어나지 않는다.

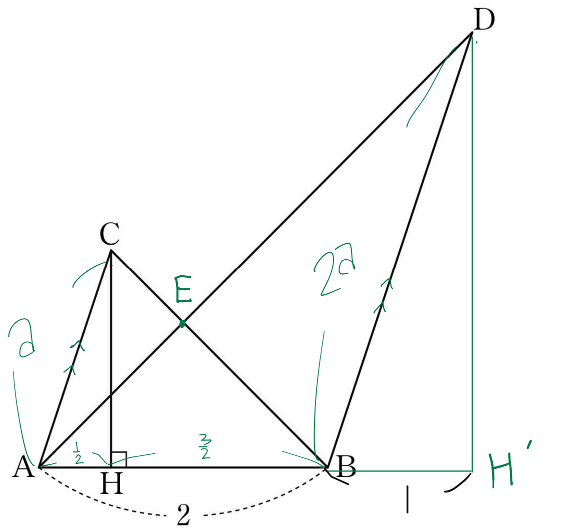
$g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면,

$h(x)$는 $x=1$, $x=3$ 을 근으로 가져야 한다.

$\therefore h(x)=(x-1)(x-3)$

$\boxed{h(5)=8}$

21. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}\,/\!/\,\overline{BD}$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다.



두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle CAB)=51$이다. $\overline{AC}^2$의 값을 구하시오. (단, $\angle CAB<\frac{\pi}{2}$) [4점]

15

$\overline{AC} /\!/ \overline{BD}$ 이고, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$ 이므로

$\triangle AEC$ 와 $\triangle DEB$ 는 $1:2$ 닮음이다.

한편, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle CAB)$ 를 해석하기 위해

$\frac{a}{\sin\theta}=2R$ 를 이용해 길이에 대한 조건으로 바꿀 것을 생각해볼 수 있다.

$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle CAB)}=2r$ $\quad\therefore \boxed{4r^2\sin^2(\angle CAB)=\overline{BC}^2}$

$\angle CAE=\angle BDE$ 이므로

$\angle CAB=\angle EAB+\angle BDE$

$\therefore \angle ABD=\pi-\angle CAB$

$\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)}=2R$ $\quad\therefore \boxed{4R^2\sin^2(\angle CAB)=\overline{AD}^2}$

$\therefore 4(R^2-r^2)\sin^2(\angle CAB)=\boxed{\overline{AD}^2-\overline{BC}^2=51}$

$\triangle ACH$와 $\triangle ADH'$는 $1:2$ 닮음이므로

$\overline{CH}=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}$ $\Rightarrow$ $\overline{DH'}=\sqrt{4a^2-1}$

$\therefore \boxed{\overline{AD}^2=4a^2+8}$, $\boxed{\overline{BC}^2=a^2+2}$

$\overline{AD}^2-\overline{BC}^2=3a^2+6=51$ $\quad\therefore \boxed{a^2=15}$

22. 양수 a와 일차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x (t^2-4)\{|f(t)|-a\}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
> (나) $g(2)=5$

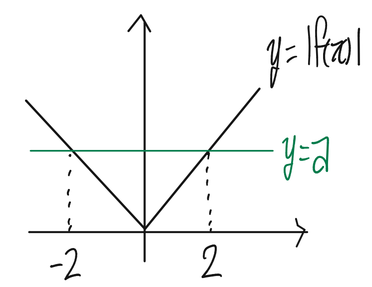
$g(0)-g(-4)$의 값을 구하시오. [4점]

16

$g'(x)=(x^2-4)\{|f(x)|-a\}$

x^2-4는 $x=\pm2$ 에서 0인데, $g(x)$가 극값을 갖지 않으려면

$|f(x)|-a$ 역시 $x=\pm2$ 에서 0 이어야 한다.



$\Rightarrow f(0)=0$, $|f(2)|=|f(-2)|=a$

$\Rightarrow f(x)=\frac{a}{2}x$ or $f(x)=-\frac{a}{2}x$

i) $f(x)=\frac{a}{2}x$

$g(2)=\int_0^2 (t^2-4)(\frac{a}{2}t-a)\,dt=\frac{a}{2}\int_0^2 (t^3-2t^2-4t+8)\,dt$

$=\frac{a}{2}\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3-2t^2+8t\right]_0^2=\frac{a}{2}(4-\frac{16}{3}-8+16)$

$=\frac{10}{3}a=5$ $\quad\therefore \boxed{a=\frac{3}{2}}$

ii) $f(x)=-\frac{a}{2}x$

$g(2)=\int_0^2 (t^2-4)(\frac{a}{2}t-a)\,dt$: i)과 동일

위 식과 동일하게 $a=\frac{3}{2}$이 도출된다.

$g(0)-g(-4)=\int_{-4}^0 (t^2-4)\{|f(t)|-a\}\,dt$

$=\int_{-4}^0 (t^2-4)(-\frac{3}{4}t-\frac{3}{2})\,dt$

$=-\frac{3}{4}\int_{-4}^0 (t^3+2t^2-4t-8)\,dt=\boxed{16}$

모의고사 본 날 놀면
저처럼 재수해요ㅠㅠ
오답 공부 합시다!!
세상은 덕후가 바꾼다!
확통 덕후 됩시다ㅎ
수고하셨습니다~!

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계) by 다희

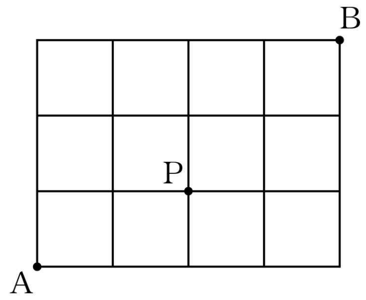
5지선다형

23. $_3H_6$의 값은? [2점]

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

$$_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = \frac{\cancel{8}^{4}\times 7}{\cancel{2}\times 1} = \boxed{28}$$

24. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]



① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$A \to P \to B$

$\boxed{A \to P} \times \boxed{P \to B}$

$\to\to\uparrow$ $\quad\quad$ $\to\to\uparrow\uparrow$

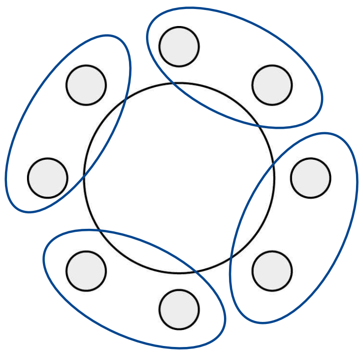
$$\Rightarrow \frac{3!}{2!} \times \frac{4!}{2!2!} = 3 \times 6 = \boxed{18}$$

+별해

$$_3C_1 \times {}_2C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = 18$$

25. 어느 고등학교 3학년의 네 학급에서 대표 2명씩 모두 8명의 학생이 참석하는 회의를 한다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 같은 학급 학생끼리 서로 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 92 ② 96 ③ 100 ④ 104 ⑤ 108



원탁나열 $\Rightarrow \frac{4!}{4} = 3! = 6$

같은학급학생끼리
순서바꿈 $\Rightarrow 2! \times 2! \times 2! \times 2! = 16$

$\therefore 6 \times 16 = \boxed{96}$

26. 같은 종류의 연필 6자루와 같은 종류의 지우개 5개를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 각 학생이 적어도 한 자루의 연필을 받도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 지우개를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 210 ② 220 ③ 230 ④ 240 ⑤ 250

1) 학생 세 명이 같은종류 연필 6자루

$a+b+c=6$
$\geq 1 \quad \geq 1 \quad \geq 1$

$a=a'+1$
$b=b'+1$
$c=c'+1$

→ a', b', c'는 음이아닌 정수

$a'+1+b'+1+c'+1=6$

$a'+b'+c'=3$

$\Rightarrow {}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$

2) 학생 세 명이 같은 종류 지우개 5개
(단 조건 보기!)

$x+y+z=5$ (x, y, z는 음이 아닌 정수)

$\Rightarrow {}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$

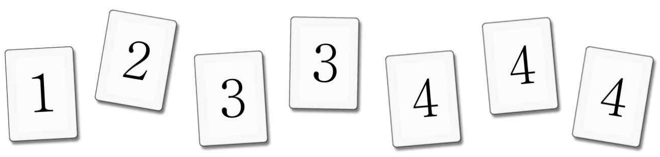
$\therefore 10 \times 21 = \boxed{210}$

*적어도, (단, ~) 주의하기!

n개 이상(이하)
⇒ 여사건 의심!

27. 숫자 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드 사이에 두 장 이상의 카드가 있도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 180 ② 185 ③ 190 ④ 195 ⑤ 200



$\boxed{1}\boxed{2}$ 사이에 두 장 이상 > 두 장 미만

∴ $\boxed{\text{전체} - (1,2 \text{ 사이에 두 장미만})}$

1) 전체 $\frac{7!}{2!3!} = 420$

2-1) $\boxed{1}\boxed{2}$ 사이에 0장 = $\boxed{1}\boxed{2}$ 이웃

($\boxed{1}\boxed{2}$) 3 3 4 4 4

⇒ $\frac{6!}{2!3!} \times 2! = 120$

↳ 1,2자리 바꾸기

2-2) $\boxed{1}\boxed{2}$ 사이에 1장

i) ($\boxed{1}\boxed{3}\boxed{2}$) 3 4 4 4

⇒ $\frac{5!}{3!} \times 2! = 40$

↳ 1,2자리 바꾸기

ii) ($\boxed{1}\boxed{4}\boxed{2}$) 3 3 4 4

⇒ $\frac{5!}{2!2!} \times 2! = 60$

↳ 1,2자리 바꾸기

∴ $420 - (120 + 40 + 60) = \boxed{200}$

28. 두 집합

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는? [4점]

(가) $f(2) < f(3) < f(4)$
(나) $f(1) > f(3) > f(5)$

f(3) 기준!

① 100 ② 102 ③ 104 ④ 106 ⑤ 108

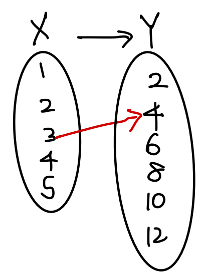
※ 안되는 경우
f(3)=2 ∵ f(2) 존재X
f(3)=12 ∵ f(1) 존재X

1) f(3)=4인경우

가) f(2)=2 & f(4)=6,8,10,12

나) f(1)=6,8,10,12 & f(5)=2

∴ $1\times4\times4\times1 = 16$

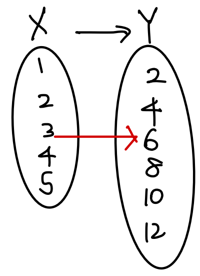


2) f(3)=6인경우

가) f(2)=2,4 & f(4)=8,10,12

나) f(1)=8,10,12 & f(5)=2,4

∴ $2\times3\times3\times2 = 36$



3) f(3)=8 ⇒ f(3)=6 인경우와 동일

4) f(3)=10 ⇒ f(3)=4 인 경우와 동일

∴ $16\times2 + 36\times2$

$= \boxed{104}$

단답형

29. 5 이하의 자연수 a, b, c, d에 대하여 부등식

$$a \le b+1 \le c \le d$$

를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

$1\le a\le b+1\le c\le d\le 5$

$b+1=b'$ (b는자연수이므로 $b'\ge 2$)

$1\le a\le b'\le c\le d\le 5$

a, b', c, d → $1, 2, 3, 4, 5$ $\Rightarrow {}_5H_4={}_8C_4=70$

$\boxed{\text{but}}$ 이 경우의 수에는 $b'=1$인경우, 즉, $b+1=1$ $b=0$인경우도 포함

$\therefore$ $b'=1$인경우를 빼줘야 함

a, b' → 1; c, d → $1, 2, 3, 4, 5$ $\Rightarrow {}_5H_2={}_6C_2=15$

$\therefore 70-15=\boxed{55}$

30. 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

> (가) 숫자 1은 한 번 이상 나온다.
> (나) 이웃한 두 수의 차는 모두 2 이하이다. ⇒ 두 수의 차가 3이상인것은 1과 4

$\therefore$ ~~1과 4를 다루는 것이 편리~~ ⇝ 1과 4는 이웃X

1) 1이 한 번 나오는 경우

i) $1\ \binom{2}{3}\ \binom{2}{3}\binom{}{4}\ \binom{2}{3}\binom{}{4}$: $2\times3\times3$　　ii) __ __ __ 1

iii) $\binom{2}{3}\ 1\ \binom{2}{3}\ \binom{2}{3}\binom{}{4}$: $2\times2\times3$　　iv) __ __ 1 __

i) = ii), iii) = iv)

$\Rightarrow (18+12)\times2=60$

2) 1이 두번 나오는 경우

i) $1\ 1\ \binom{2}{3}\ \binom{2}{3}\binom{}{4}$: 2×3　　ii) __ __ 1 1

iii) $1\ \binom{2}{3}\ 1\ \binom{2}{3}$: 2×2　　iv) __ 1 __ 1

v) 1 __ __ 1　　vi) __ 1 1 __

i) = ii)　　iii) ~ vi) 동일

$\Rightarrow 6\times2+4\times4=12+16=28$

3) 1이 세 번 나오는 경우

i) $1\ 1\ 1\ \binom{2}{3}$　　ii) 1 1 __ 1

iii) 1 __ 1 1 : $\boxed{2}$　　iv) __ 1 1 1

$\Rightarrow 2\times4=8$

4) 1이 네 번 나오는경우 ⇒ 1

$\therefore 60+28+8+1=\boxed{97}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.

교육청 모의고사에서 획득한 점수에 기뻐하지도, 슬퍼하지도 마세요! 수능날까지 파이팅~!

제 2 교시

수학 영역(미적분)

by 백호

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3+\sim}{2n^3+\sim}=5$

24. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n=\left(\frac{x^2-4x}{5}\right)^n$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수는? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

등비수열이 수렴하려면, 공비가 $(-1<r\le1)$!!!

$\Rightarrow -1<\frac{x^2-4x}{5}\le 1$

$\begin{cases} x^2-4x-5\le 0 \\ x^2-4x+5>0 \end{cases} \Rightarrow -1\le x\le 5$

$\hookrightarrow D<0$ 항상 양수

$\boxed{\text{정수 닫힌구간 개수세기! } a\le x\le b \Rightarrow b-a+1}$

$\therefore 5-(-1)+1=7$

25. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = a_1 a_n$$ ~> 공비가 a_1인 등비수열!

을 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty} \frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1} = 12$일 때, a_1의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$a_n = a_1 \times (a_1)^{n-1}$

$= (a_1)^n$

*** 여기서 답이 나올확률 99%

i) $a_1 > 1$ 인경우

$\lim_{n\to\infty} \frac{3 \times (a_1)^{n+3} - 5}{2 \times (a_1)^n + 1}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 \times a_1^3 (a_1)^n - 5}{2 \times (a_1)^n + 1}$

$\Rightarrow \frac{3a_1^3}{2} = 12$

$a_1 = 2$ ok!

ii) $a_1 = 1$ 인경우

$a_n = 1^n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{3 \times 1^{n+3} - 5}{2 \times 1^n + 1}$

$= \frac{-2}{3} \neq 12$ (x)

iii) $0 < a_1 < 1$ 인경우

$\lim_{n\to\infty} \frac{3 \times \cancel{(a_1)^{n+3}} - 5}{2 \times \cancel{(a_1)^n} + 1} = -5 \neq 12$ (x)

0 0

$\boxed{a_1 = 2}$

26. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2n^2 - 3 < a_n < 2n^2 + 4$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^3}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ 1 ⑤ $\frac{7}{6}$

$\sum_{k=1}^{n} 2k^2 - 3 < S_n < \sum_{k=1}^{n} 2k^2 + 4$

$\Rightarrow 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3n < S_n < 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4n$

$\Rightarrow \frac{2}{3}n^3 + \sim < S_n < \frac{2}{3}n^3 + \sim$

$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{3}n^3 + \sim}{n^3}}_{= \frac{2}{3}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^3} \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{3}n^3 + \sim}{n^3}}_{= \frac{2}{3}}$

by 샌드위치 정리 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^3} = \frac{2}{3}$

27. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(k-1)!} = \frac{3}{(n+2)!}$$

을 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}(a_1+n^2a_n)$의 값은? [3점]

① $-\frac{7}{2}$ ② -3 ③ $-\frac{5}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{3}{2}$

수열 b_n의 1항부터 n항까지의 합

$$b_n = \frac{a_n}{(n-1)!} \Rightarrow S_n = \frac{3}{(n+2)!}$$

*** $0! = 1$

$\Rightarrow n=1$

$\frac{a_1}{0!} = \frac{3}{3!} = \frac{1}{2}$

$a_1 = \frac{1}{2}$

Basic $S_{n-1} = \frac{3}{(n+1)!}$

$$\boxed{S_n - S_{n-1} = \frac{3-3(n+2)}{(n+2)!}} \quad (n \ge 2)$$

$$\frac{a_n}{\cancel{(n-1)!}} = b_n = \frac{-3n-3}{\cancel{(n+2)!}} \quad = -3\cancel{(n+1)} \quad n\cancel{(n+1)}(n+2)$$

$$a_n = \frac{-3}{n(n+2)}$$

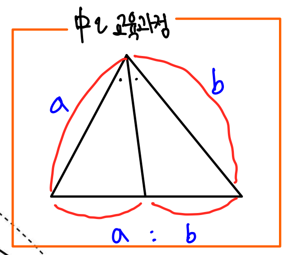
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-3n^2}{n(n+2)} + \frac{1}{2}\right)$$

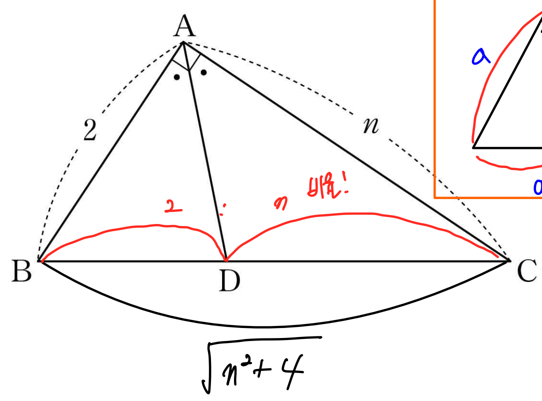
$$= -\frac{5}{2}$$

28. 자연수 n에 대하여 $\angle A = 90°$, $\overline{AB}=2$, $\overline{CA}=n$인 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. 선분 CD의 길이를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(n-a_n)$의 값은?

[4점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4





$$\overline{CD} = \frac{n}{n+2} \times \sqrt{n^2+4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n - \frac{n\sqrt{n^2+4}}{n+2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n-n\sqrt{n^2+4}}{n+2}$$

유리화
or
**
로피탈 → 무리함수 미분 주의!

유리화

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\{(n^2+2n) - n\sqrt{n^2+4}\}\{n^2+2n+n\sqrt{n^2+4}\}}{(n+2)\{n^2+2n+n\sqrt{n^2+4}\}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^4} + 4n^3 + \cancel{4n^2} - n^2(\cancel{n^2}+\cancel{4})}{\underbrace{n^3 + n^2\sqrt{n^2+4}}_{\fallingdotseq 2n^3} + \sim} = 2$$

로피탈

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2n}+2 - \underbrace{\sqrt{n^2+4}}_{\fallingdotseq n} - \frac{n}{\cancel{2}} \times \underbrace{\frac{\cancel{2}n}{\sqrt{n^2+4}}}_{\fallingdotseq n}}{1}$$

$= 2$

l'hopital's raw → 미분가능한 함수 $f(x), g(x)$ 일때!

$$\lim_{x\to0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to0} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

(단, $\lim_{x\to0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to0} g(x) = 0$)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

(단, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty$)

단답형

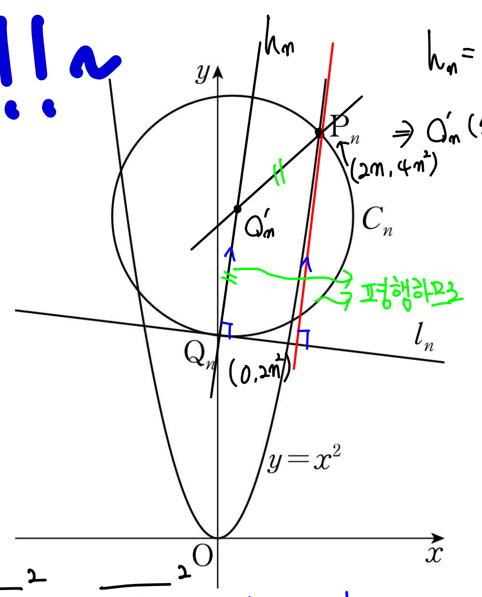
29. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(2n,\ 4n^2)$에서의 접선과 수직이고 점 $\mathrm{Q}_n(0,\ 2n^2)$을 지나는 직선을 l_n이라 하자. 점 P_n을 지나고 점 Q_n에서 직선 l_n과 접하는 원을 C_n이라 할 때, 원점을 지나고 원 C_n의 넓이를 이등분하는 직선의 기울기를 a_n이라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$의 값을 구하시오. [4점]

계산!!~

기울기 $=2x|_{x=2n}=4n$

$h_n = 4nx + 2n^2$

$\Rightarrow O_n'(x_1,\ 4nx_1+2n^2)$



방정식 세우기! $\Rightarrow \overline{Q_nO_n'}^2 = \overline{O_n'P_n}^2$ 〈거리가 같다〉

$\Rightarrow x_1^2 + (4nx_1)^2 = (x_1-2n)^2 + (4nx_1-2n^2)^2$

$\cancel{x_1^2} + \cancel{16n^2x_1^2} = \cancel{x_1^2} - 4nx_1 + 4n^2 + \cancel{16n^2x_1^2} - 16n^3x_1 + 4n^4$

$\Rightarrow 4n^4 - 16n^3x_1 - 4nx_1 + 4n^2 = 0$

$\cancel{4}n^{\cancel{4}3} + \cancel{4}n^{\cancel{2}} = x_1(\cancel{16}^{4}n^{\cancel{3}2} + \cancel{4n})$

$\dfrac{n^3+n}{4n^2+1} = x_1$

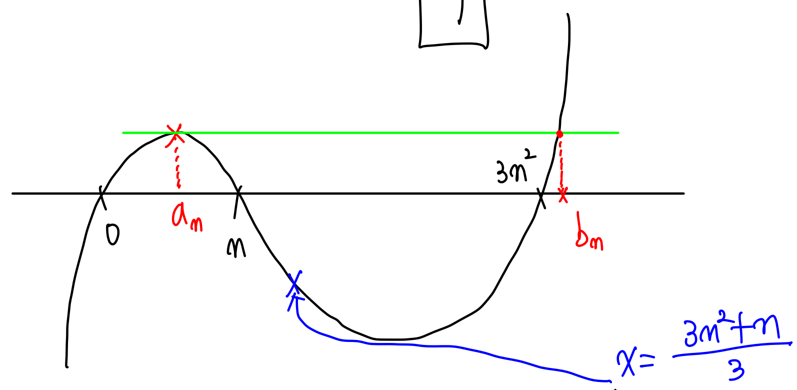
$O_n'\left(\dfrac{n^3+n}{4n^2+1},\ \dfrac{4n(n^3+n)}{4n^2+1}+2n^2\right)$

$\therefore a_n = \dfrac{y_1-0}{x_1-0} = \dfrac{\dfrac{4n(n^3+n)+8n^4+2n^2}{\cancel{4n^2+1}}}{\dfrac{n^3+n}{\cancel{4n^2+1}}} = \dfrac{12n^4+6n^2}{n^3+n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n} = \boxed{12}$

30. 자연수 n에 대하여 삼차함수 $f(x)=x(x-n)(x-3n^2)$이 극대가 되는 x를 a_n이라 하자. x에 대한 방정식 $f(x)=f(a_n)$의 근 중에서 a_n이 아닌 근을 b_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_nb_n}{n^3}=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{5}$



$f(x) = x^3-(3n^2+n)x^2+3n^3x$

$f''(x) = 6x-2(3n^2+n)$

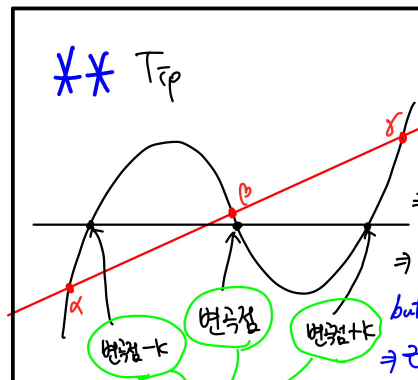
$f'(x) = 3x^2-2(3n^2+n)x+3n^3 = 0 \rightarrow a_n$

$\Rightarrow$ 변곡점 $x=\dfrac{3n^2+n}{3}$

$x = \dfrac{3n^2+n \pm\sqrt{9n^4+6n^3+n^2-9n^3}}{3}$

$a_n = \dfrac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$

** Tip



$\Rightarrow$ 교점의 x좌표 $\Rightarrow$ 빼서 $=0$ 방정식으로 구하기!

$\Rightarrow ax^3+bx^2+(c-m)x+(d-n)=0$

but! 세 교점의 x좌표의 합은

$\Rightarrow$ 근.계수의 관계 $\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$

세 근의 합

$\Rightarrow \boxed{3\times\text{변곡점}}$

** (일차함수는 빼고 삼차함수의 3차, 2차 항의 계수에 영향 X)

$\therefore$ 언제나 삼차.일차의 세 교점의 합은 $\boxed{3\times\text{변곡점}}$ (n중근이면 접점은 n회 count!)

$2a_n+b_n = 3\times$변곡점 $= 3n^2+n$

$b_n = 3n^2+n-2a_n$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cancel{9n^4}+6n^3+n^2-\cancel{9n^4}+3n^3-n^2}{3n(3n^2+n+\sqrt{9n^4-3n^3+n^2})} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{n^2} = 3$

$\therefore \dfrac{1}{2}\times 3 = \dfrac{3}{2}$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

3월 학평 기하는 이차곡선 공부가 충분히 되었다면 못 풀 문제는 없었던 것 같습니다! 이번 시험에서 좋은 점수를 받았다고 해서 절대 안심하지 마시길!!! 다들 수능까지 조금만 더 힘내봅시다 :)

제 2 교시

수학 영역(기하)

5 지 선 다 형

23. 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 두 초점을 F, F′이라 할 때, 선분 FF′의 길이는? [2점] 8

① 6 ② 7 ● 8 ④ 9 ⑤ 10

$$\overline{FF'}=2\sqrt{36-20}$$
$$=2\sqrt{16}=8$$

24. 두 초점이 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$이고 주축의 길이가 8인 쌍곡선의 한 점근선이 직선 $y=\frac{3}{4}x$일 때, 양수 c의 값은? 5 [3점]

● 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

주어진 쌍곡선을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ 라 두면

$2a=8 \Rightarrow a=4$

$\frac{b}{4}=\frac{3}{4} \Rightarrow b=3$

$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=5$

25. 꼭짓점이 점 $(-1, 0)$이고 준선이 직선 $x=-3$인 포물선의 방정식이 $y^2=ax+b$일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점]

16

① 14 ● 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

꼭짓점 $(0,0)$, 준선 $x=-2$ 인

포물선의 방정식 : $y^2=8x$

$\downarrow$ $x:-1$ 평행이동

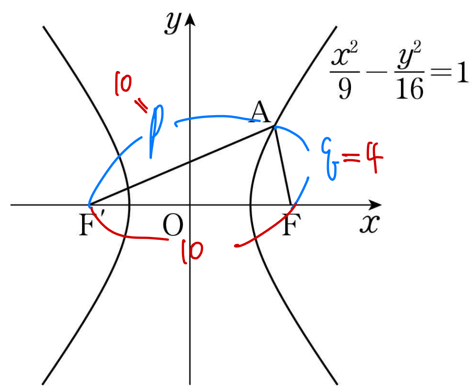
$y^2=8(x+1)$

$=8x+8$

$\therefore a+b=16$

26. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점 F, F′과 쌍곡선 위의 점 A에 대하여 삼각형 AF′F의 둘레의 길이가 24일 때, 삼각형 AF′F의 넓이는? (단, 점 A는 제1사분면의 점이다.) [3점]

$8\sqrt{6}$



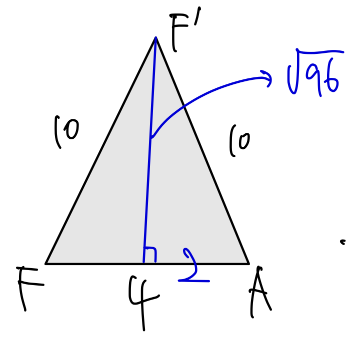
① $4\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{6}$ ③ $8\sqrt{3}$ ● $8\sqrt{6}$ ⑤ $16\sqrt{3}$

i) 쌍곡선의 정의에 의해 $p-q=6$ …①

ii) $\overline{FF'}=2\sqrt{9+16}=10$

iii) $p+q+10=24 \Rightarrow p+q=14$ …②

①,② 에서 $p=10$, $q=4$



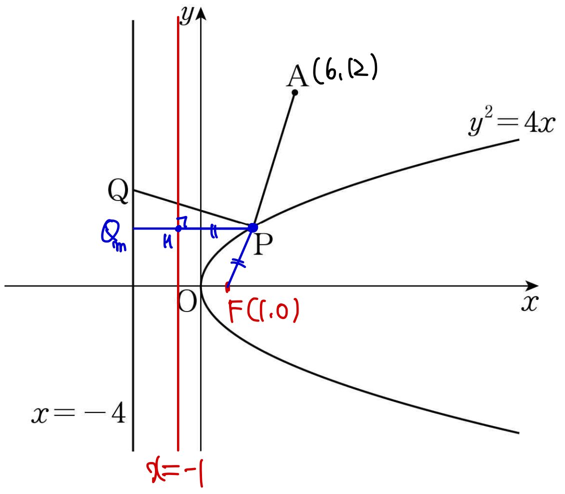
$\therefore \triangle AFF'=2\times\sqrt{96}$

$=2\times4\sqrt{6}$

$=8\sqrt{6}$

27. 점 A(6, 12)와 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P, 직선 $x=-4$ 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은? [3점] 16

① 12 ② 14 ● 16 ④ 18 ⑤ 20



$\triangle PQQ_m$은 직각삼각형이므로

$\overline{PQ} \geq \overline{PQ_m}$ 이다.

$\therefore \overline{AP}+\overline{PQ} \geq \overline{AP}+\overline{PQ_m} = \overline{AP}+\overline{PH}+\overline{HQ_m}$

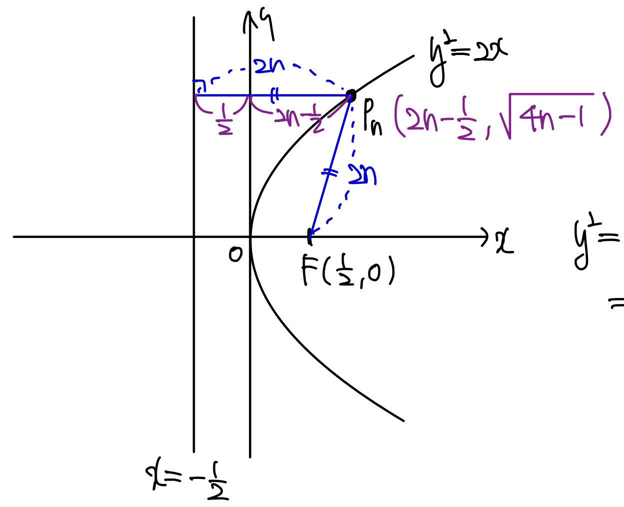
$= \overline{AP}+\overline{PF}+3$

$\underbrace{\geq \overline{AF}+3}_{\text{최소}} = \sqrt{5^2+12^2}+3$

$= 13+3 = 16$

28. 자연수 n에 대하여 초점이 F인 포물선 $y^2=2x$ 위의 점 P_n이 $\overline{\mathrm{FP}_n}=2n$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{8}\overline{\mathrm{OP}_n}^2$의 값은? (단, O는 원점이고, 점 P_n은 제1사분면에 있다.) [4점] 882

① 874 ② 876 ③ 878 ④ 880 ● 882



$y^2 = 2\left(2n-\frac{1}{2}\right)$

$= 4n-1$

$\overline{OP_n}^2 = \left(2n-\frac{1}{2}\right)^2+4n-1$

$= \frac{1}{4}(4n-1)^2+4n-1$

$= \frac{1}{4}\left\{(4n-1)^2+4(4n-1)\right\}$

$= \frac{1}{4}\left(16n^2+8n-3\right)$

$\therefore \sum_{n=1}^{8}\left(4n^2+2n-\frac{3}{4}\right) = 4\cdot\frac{1}{6}\cdot 8\cdot 9\cdot 17+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot(2+16)-8\cdot\frac{3}{4}$

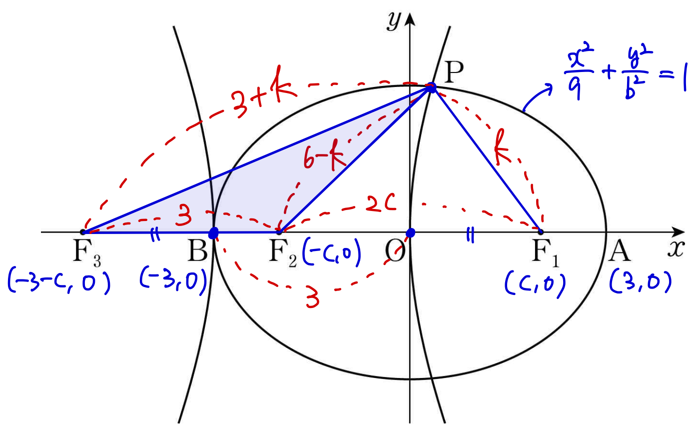
$= 6\cdot 8\cdot 17+4\cdot 18-6$

$= 6\left(8\cdot 17+12-1\right) = 882$

단답형

29. 두 초점이 $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원이 x축과 두 점 $A(3, 0)$, $B(-3, 0)$에서 만난다. 선분 BO가 주축이고 점 F_1이 한 초점인 쌍곡선의 초점 중 F_1이 아닌 점을 F_3이라 하자. 쌍곡선이 타원과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 PF_3F_2의 둘레의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

12



$\overline{PF_1}=k\ (k>0)$라 두면

$\overline{PF_2}+\overline{PF_1}=6$ 이므로 $\overline{PF_2}=6-k$

$\overline{PF_3}-\overline{PF_1}=3$ 이므로 $\overline{PF_3}=3+k$

$\overline{OF_1}=\overline{BF_3}$ 이므로 F_3의 x좌표는 $-3-c$이다.

$\therefore \overline{F_2F_3}=-c-(-3-c)=3$

$\therefore$ $\triangle PF_3F_2$의 둘레의 길이 $=(3+k)+(6-k)+3$
$=12$

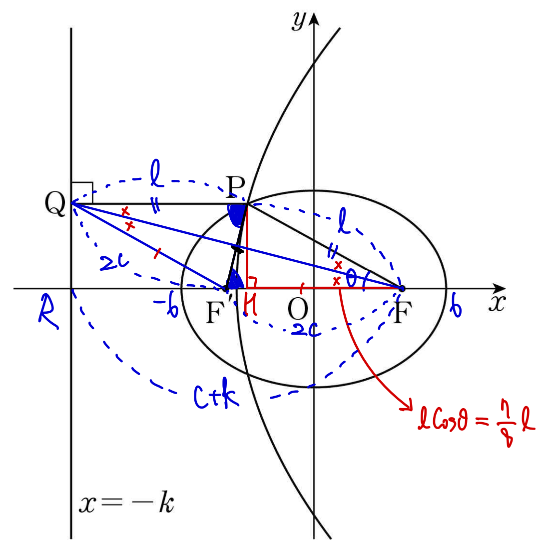
30. 그림과 같이 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$이고 장축의 길이가 12인 타원이 있다. 점 F가 초점이고 직선 $x=-k$ $(k>0)$이 준선인 포물선이 타원과 제2사분면의 점 P에서 만난다. 점 P에서 직선 $x=-k$에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

15

(가) $\cos(\angle F'FP)=\frac{7}{8}$

(나) $\overline{FP}-\overline{F'Q}=\overline{PQ}-\overline{FF'}$

$c+k$의 값을 구하시오. [4점]



$\overline{FP}-\overline{F'Q}=\overline{PQ}-\overline{FF'} \Rightarrow \overline{FQ}=\overline{FF'}$ ⋯①

$\overline{PF'}+\overline{PF}=12 \Rightarrow \overline{PF}=l$이라 두면 $\overline{PF'}=12-l$ $(l<12)$

포물선의 정의에 의해 $\overline{PF}=\overline{PQ}=l$ ⋯②

두 이등변 삼각형 PQF와 FQF'이 선분 QF를 공유하고 $\overline{PQ}\parallel\overline{FF'}$ 이므로

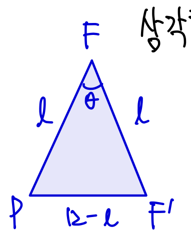
서로 합동이다. 따라서 $\overline{PQ}=\overline{QF'} \Rightarrow l=2c$

P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{FH}=l\cos\theta=\frac{7}{8}l$

직선 $x=-k$와 점 F 사이의 거리가 $c+k$ 이므로

$c+k=\overline{QP}+\overline{HF}=l+\frac{7}{8}l=\frac{15}{8}l$



삼각형 FPF'에서 코사인 법칙에 의해

$(12-l)^2=2l^2-2l^2\cos\theta$

$=2l^2(1-\cos\theta)$

$=2l^2\times\frac{1}{8}=\frac{l^2}{4}$

$\therefore 12-l=\frac{l}{2}$ $(\because l<12) \Rightarrow \frac{3}{2}l=12 \Rightarrow l=8$

$\therefore c+k=\frac{15}{8}\times 8=15$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.