Killer's IDEA - in 수학Ⅱ

YEAR MONTH DAY

#1. 함수의 극한

계산 Tip : 합성함수의 극한은 속함수의 Ⓖ를 직접 그려서 판단한다.

↳ 주의 극한값의 존재는 함숫값과 상관 X. 연속 & 미·가만 함숫값과 상관 O

IDEA) 역함수의 극한 : y, x축을 바꿔서 생각한다.

IDEA) 곱함수의 극한이 항상 0일 필요는 없다. 부호반대의 경우가 있을 수도 있으므로 꼭 쉬운문제라도 lim +/− 쓸 것.

계산 Tip : 수렴하는 것끼리 먼저 계산하고 시작한다 → 낯선 극한식은 대입한 뒤 꼴을 파악한다.

IDEA) 함수끼리의 연산으로도 극한값 구할 수 있다. (보통 두 식의 분모&분자에 소거할 수 있게 출제)

IDEA) 함수의 결정 : 극한값을 물을 땐 극한 성질 이용 >> 다항함수 구하기. 함숫값을 물을 땐 다항함수 구하기 >> 극한 성질 이용

IDEA) $\lim_{x \to a} \frac{x-a}{f(x)} \not\Rightarrow f(a)=0$. $f(a)=0$ // $f(a) \neq 0$ case 분류해야 한다. $\neq \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \rightarrow g(a)=0$ (분모 상관 X 성립) *

IDEA) lim 안에 발산하는 것이 하나라도 있으면 lim 안의 식을 조작한다. ① ∞인 것으로 옮기 ② 수렴하는 것으로 나누기 ($\frac{상수}{\infty}=0$ 이용)

IDEA) $\frac{1}{x}$은 t로 치환한 뒤 Ⓖ개형을 고려해 +/−를 붙인다.

* IDEA) 극한값이 0인 것도 하나의 조건이다. '분자의 0의 개수 > 분모의 0의 개수'로 해석하자.

IDEA) 분수꼴 극한 & 분자·분모에 f'와 f가 존재 : ① 배T sol) just 쓰고 계수비교 ② 현T sol) $(x-a)$로 나누고 인수 1개씩 추가

cf.) 분자·분모에 $(x-a)^2$처럼 제곱 형태의 인수가 있을 때도 ①/②를 사용한다.

(*통합) IDEA) $\frac{0}{0}$꼴에서 극한값이 0인 조건 : ① $\lim_{x \to a} \frac{(x-a)^n}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x)$는 $(x-a)^{n-1}$까지만 인수로 갖는다.

② $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = (x-a)(\cdots\cdots)$ // $f(a)=0$

③ $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow f(x)$는 $(x-a)^{n+1}$까지만 인수로 갖는다.

IDEA) $\frac{일차}{일차}$의 극한 : 항상 유리함수는 X. 유리함수 // 상수로 case 분류해야 한다. 이때 (분모) = 0인 지점은 항상 점근선이므로 정의역 X.

#2. 함수의 연속

계산 Tip : 불연속의심점 찾기 first → 묻는 점이 의심점이 아닐 땐 100% 연속, 의심점이라면 하나씩 처리한다.

↳ 주의 분수꼴의 연속은 (분모) = 0인 점만 주목하면 안된다. 구간함수일 경우 경계에서 just 불연속인 점도 찾기.

IDEA) 합성함수의 연속 : ① if 쉬운 속함수 : just 대입 ② if 어려운 속함수 : 속함수 Ⓖ 그리기.

IDEA) 구간함수의 연속성 : 교점을 연결지점으로. cf.) 구간함수의 미분가능성 : 접점을 연결지점으로.

IDEA) (불연속) × (연속)의 연속성 : (연속)인 함수가 (불연속)인 함수의 불연속점을 근으로 갖는다.

(연속) × (연속)의 연속성 : 100% 연속

(불연속) × (불연속)의 연속성 : 서로의 불연속점을 근으로 갖는다. (cross 계산) ← 실수에 주의! 쌍방이다.

(발산) × (연속)의 연속성 : 분모의 인수의 개수를 조절해 연속성을 판단한다. 기본 start는 분모와 동일한 0의 개수이다.

IDEA) 합성함수의 연속 but 겉함수가 불연속 : ① 배T sol) 겉함수가 문제인 쪽을 구한 뒤 속함수에서 해당 극한값(좌 OR 우)이 안 나오면 (접점이면) 연속 ② 현T sol) 방향성 이용해서 $x \rightarrow g(x) \rightarrow f(x)$를 좌·우극한과 함숫값으로 나눠서 계산.

YEAR MONTH DAY

#3. 함수의 미분

계산 Tip : 미분계수 $f'(a)$ 가 나오면 ① 정의 이용 ② 미분법을 이용한 식 조작 ③ 접선의 기울기 $= \tan\theta$ → 직각 △ 으로 해석한다.

IDEA) 분자가 복잡한 미분계수 : 전체를 통채로 치환하고 대입 / 미분한다.

IDEA) 2차함수와 미·계 : ① 대칭축에 대해 미분계수가 부호만 반대 ② 꼭짓점 → 3차함수의 변곡점 ③ 3차의 (극대) − (극소) ⇐ 넓이공식
↳ 3차함수의 도함수 (= 2차함수) 나오면 대칭 쓸 준비

IDEA) 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소하는 3차함수 : ① 일대일대응 ② 역함수 X ③ 극값 X ⇒ 모든 실수. $f' \geq 0$ OR $f' \leq 0$
→ $f' = 0$ 의 판별식 $D \leq 0$ 이용 / $f(x) = p \cdot (x-a)^3 + q$ 로 식 조작하기

IDEA) $f'(x_1) \times f'(x_2) \leq 0$ → 극값인지 의심 first.

IDEA) 선분 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 원 C → $\overline{AB}$ 를 빗변으로 하는 직각 △

IDEA) 3차함수에서 변곡점을 기준으로 미·계 ⊖ 한 점이 대칭으로 존재 → $f'(a)$ 개수 구할 때 2개씩 셀수 O

IDEA) 곡선 & 곡선. 곡선 & 직선의 교점의 개수 : ① 접할 때 ② 끝점. 첨점. 불연속 ③ 점근선 을 경계로 생각
↳ 대부분 차의 함수 이용

IDEA) 미·가인 f와 g. $f(x)-g(x)$ 가 $x=a$ 에서 M/m ⇒ $x=a$ 에서 극값 ⇒ $f'(a)=g'(a)$. $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 가 $x=a$ 에서 접선 평행.

IDEA) 곡선 & 직선과의 관계에서 x축에 평행한 직선 ⇒ 극점에서 접할 때. / y축에 평행한 직선 ⇒ 극점을 지날때 기준으로 판단.

IDEA) 접선 이용하는 문제 : ① just 접선 구하기 (접점 → 대입) ② 기울기 이용 (& 미·계) ③ 평·변 = 미·계 (특히 공통접선 나올 때 이용)

IDEA) 기함수인 3차함수 : ① $f(x) = ax^3 + bx$ 식 세우기 ② $f(-x) = -f(x)$ ③ 원점에 대해 대칭 → 원점에 대해 대칭인 평행한 직선

IDEA) x값의 합이 일정 → 대칭 → 함숫값 ⊜ ⇒ 직선 $x = \square$ 에 대해 대칭 … $f(a-x) = f(a+x)$. $f(x) = f(2a-x)$ $x=a$ 대칭.
함숫값 ⊕ ⇒ 점 $(\square, \triangle)$ 에 대해 대칭 … $f(a-x) = -f(a+x)$. $f(x) = -f(2a-x)$ $(a, 0)$ 대칭
↳ $f(a-x) + f(a+x) = 2b$. (a, b) 대칭.
x값의 차가 일정 → 주기. … $f(x-p) = f(x+p)$ (→ 주기 $2p$)

IDEA) 유리함수에 접하는 접선의 기울기는 ±1 → 교점의 개수가 불연속인 부분에 공통접선으로 연결하기

IDEA) 함수 부등식 in 미분문제 : Ⓖ의 접점에 대한 문제일 가능성 多 ⇒ $f'(a) = g'(a)$. $f(a) = g(a)$ 인 $x=a$ 구하기

IDEA) G가 항상 지나는 점 (정점) : 한 미지수에 대하여 정리 → 미지수로 묶인 항의 안쪽이 0이 되는 x값 구하기 → 원래식 대입.

IDEA) 역함수를 직접 얻기 어려울 때 : ① $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

IDEA) 방정식의 실근 개수 : 직접 푸는게 X. Ⓖ 그려서 파악하라는 뜻. * if 합성함수 방정식의 실근 개수 : 안쪽함수 치환 first.

IDEA) 2차인 f' 가 $x=a$ 선대칭 → 3차인 f가 (a, c) (변곡점) 에서 점대칭 ⇒ 변곡점에서 접선 기 Max or min.

IDEA) 극대 / 극소는 첨점과 상관X. (다항함수 조건 X → 미계 = 0 이라는 보장 X). G의 증감이 바뀌는 것을 기준으로 극값 판단!

IDEA) $y = \dfrac{f(x) + g(x) \pm |f(x) - g(x)|}{2}$ 꼴처럼 절댓값 & 합·차는 Max/min 함수 → Ⓖ를 그리는 것으로 시작한다.

IDEA) $f(t)x - tf(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(t)}{t}$ OR $f(x) = \dfrac{f(t)}{t} x$ ⇝ 직선의 기울기로 관찰.

IDEA) 차의 함수 $f(x) - g(x)$ 의 인수 : 교점일 때 1개 $(x-a)$, 접점일 때 2개↑ $(x-a)^2$

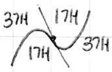
IDEA) 3·4차의 개형추론은 ① 최고차 계수의 부호 ② 극값의 개수 / 대소관계를 고려해 가능한 Ⓖ 개형을 모두 그린 뒤 판단한다.

IDEA) 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여 $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ $(x_1 \neq x_2)$ ⇒ 평·변 > 0 ⇒ 증가.

YEAR MONTH DAY

IDEA) 평균변화율 해석은 ① 기울기 ② (극대.극소가 x값일 경우) 극대 - 극소 차.

IDEA) 3차방정식 $f(x)$가 서로 다른 두 실근 : x축과 한 점에서 접하고 다른 한 점 만남

IDEA) 3차함수에 그은 접선의 개수 : Ⓖ와 변곡접선 기준으로 

& 변곡점은 1개, 변곡접선 위 & Ⓖ 위는 2개

IDEA) 합성함수 방정식 : $f(g(x))=k$ 에서 ① $g(x)=t$ 치환. $f(t)=k$ 에서 $t=\alpha.\beta$ 일 때, ② $g(x)=\alpha.\beta$ 인 x값 구하기 (G / 역추적 / 대응)

IDEA) 3차함수의 근의 합 : (중근은 2번 count) $3\times$(변곡점의 x좌표).

IDEA) 연속함수 조건이 X 함수의 미분가능성 : ① 식에서 함숫값과 미·계 일치 ② Ⓖ에서 불연속. 첨점 여부 check

IDEA) "거리" 나오면 절댓값 먼저 붙이고 시작할 것! → Max / min 함수 각각 구한 뒤 교점 파악

IDEA) 거리의 대소비교 : ① 두 개의 점 : 두 점 이은 선분의 수직이등분선 위의 점이 거리 ⊜ ② 두 개의 직선 : 두 직선의 각의 이등분선 위의 점 "

IDEA) 절댓값 함수의 미분가능은 절댓값 속의 함수로 결정된다. if 불연속 / x축과의 교점 (not 접점) ⇒ 미-불

IDEA) 곱함수의 미분가능성 : 첨점 / 불연속 but 극한 O ⇒ 인수 1개 추가. // 불연속 & 극한값 X ⇒ 인수 2개 추가

IDEA) 합성함수의 미분 : 치환? NO! 나형 미분에서 다룰 수 있는 함수로 바꿀 수 있다는 뜻.

IDEA) 직선구간의 특별항 : $f'(x)\ge a$ 일 때, 특수한 경우인 $f'(x)=a$ 인 직선 생각 first (구간의 두 점 연결했을 때 ㉮ a 일 때 유리)
(① 식이 안주어짐 & ② 특정구간) $a\le f'(x)\le b$ 일때, 기울기가 a인 직선 & b인 직선 그려놓고 경계로 설정.

4. 함수의 적분

IDEA) 적분구간은 스스로 조작 or 쪼개서 ① 넓이 구하기 ② 구해야 하는 것에 맞춰서 조건 쓰기.

IDEA) $f(x)=g(x)$ 인 항등식 : 대입 / 미분 / 적분 모두 가능 ⇒ ① 정적분 $\int_a^b f=\int_a^b g$ ② 부정적분 $F(x)=G(x)+C$.

IDEA) 정적분 포함한 함수 : 정적분 상수 k 취급한 뒤 대입하기.

↗ 예) $\int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{2}f(t)\right|dt=\cancel{2}\cdot\int_0^1\left|\frac{1}{\cancel{2}}f(t)\right|dt$ (∵ ㉮)

IDEA) $\int_a^b |f(x)|dx$: ① f. x축. $[a.b]$ 넓이 ② $f(x)=0$인 x 기준으로 구간 나누기 ③ (Ⓖ관점) 이동거리 → y좌표 계산

IDEA) (k.c) 점대칭 × 선대칭 ⇒ C × 선대칭 : 이때 대칭함수 통째로 소거 가능하다.
cf.) 우함수는 x^2. 기함수는 x로 놓고 차수를 계산해 구간대칭인 경우 기함수 out.

IDEA) f가 (a.b) 점대칭. $\int_{a-p}^{a+p} f(x)dx=2p\times b$ ⇒ 넓이는 $2p\times|b|$ 인 직□

☆ 대칭을 나타내는 함수의 정적분은 그림(Ⓖ)을 통해 확인하는게 더 유리! 특히 2차&4차는 선대칭인지. 3차는 점대칭인지 ㅎ

IDEA) 극한 / 미분 / … & 정적분 : 적분 생각 X. just 함수의 표현으로 인식. 특히 미·계 정의에서는 정적분의 정의를 이용해 표현한다.

IDEA) $\int_a^b f(t)dt$는 변위 OR y좌표의 최초~최종 변화. // $\int_a^b |f(t)|dt$는 이동거리 OR 최초~최종까지 y좌표의 변화의 합

↳ 치환 OR 미적분의 기본정리

↳ 주의 위치 구할 때 첫 위치 (x_0)가 원점인지 아닌지부터 확인 first.
시각 t는 항상 양수이므로 t인 근을 구할 때 음수 out ⇒ 근·계수의 관계 합 > 0. 곱 > 0 도 이용한다. Ⓖ로 할 때도 주의!!

IDEA) 하나의 교점. 하나의 접점이 있고 교점의 x좌표만 알때 : 접점의 x좌표는 근의 합 사용해서 구한다. (단, 접점은 2번 ⊕)

* IDEA) 부정적분 포함한 함수 : ① 항등식 & 부정적분 → 대입 & 미분 ② 단독으로 등장 → f의 부정적분 (∽ 미적분의 기본정리) ③ 넓이변화 관찰

IDEA) $\int_a^x f(t)dt \xrightarrow{\prime} f(x)$ → 주의 $f(t)$가 절댓값 갖고있어도 상관 X.

㉮ 부정적분 $\int_a^x f(t)$는 항상 미분가능!!

㉯ 낯선 Ⓖ 그리기 전 구역 나눠 파악 : 1차 | 3차 | 1차 (a, b)

IDEA) 낯선 정적분 함수 : 미분해서 도함수 구하기가 first.

IDEA) 부등식 & 정적분 : 미분불가능. 함수의 M / m 값으로 간주하고 등호가 성립하는 특수 case를 우선적으로 생각한다.

* IDEA) 부정적분 포함한 함수의 Ⓖ관점 : $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ 에서 ① $f(x)$는 $g(x)$의 도함수 ② $g(a)=0$ (x절편)

YEAR MONTH DAY

IDEA) $\int_a^x |f(t)|dt$ 는 함수 $|f(x)|$의 부정적분, $\left|\int_a^x f(t)dt\right|$는 함수 $f(x)$의 부정적분의 절댓값

IDEA) 부정적분을 포함한 함수는 ① 직접 관찰 — if 복잡해지면 → ② 도함수 ⓖ 개형 ⇒ 원함수 추정

IDEA) 적분방향에 따라 부호 변화 O & f.g 두 함수의 차의 함수 이용 : $\int_0^a f + \int_a^b g$ 를 차의 형태 $\int_0^a f - \int_b^a g$ 로 바꾼 뒤 도함수 $f-g$ 이용

IDEA) $\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$: 미분 X. ① 아래끝 = 위끝인 x 찾고 대소비교 (적분방향 파악 → ⊕/⊖ 판단) ② 직접관찰

IDEA) 적분의 결과가 곱으로 표현되면 사각형으로 받아들여야 한다. (넓이관점)

IDEA) 조건의 역관점 : 조건 p가 $0 \le x \le 2$일때 성립 ⇔ $x>2$, $x<0$에서 성립 X 을 이용할 수 있다.

IDEA) 극대 / 극소의 판별은 ① just 관찰 ② 도함수의 부호변화

IDEA) 변수의 구분 : 적분 상수 t에 관련한 식을 제외한 나머지는 모두 상수 취급한다.

IDEA) 이차함수의 넓이는 넓이공식을 묻기 위한 것. → 주의 이차 2개일 때 최고차 계수 서로 빼주기

cf.) 이차함수 2개가 만나는 두 교점을 잇는 l이 넓이 이등분 ⇒ 최고차 계수는 절댓값 ⊖ 부호 ↔.

IDEA) 거리 상 최솟값 : 두 지점의 수선이 가장 ⇓ → 직각 △ 이용.

IDEA) 곡선 & y축 사이 넓이 : ⓖ 증/감 상관 X. $\int_a^b f^{-1} = (\overset{\text{전체}}{bd} - ac) - \underbrace{\int_c^d f}_{\text{부분}}$

IDEA) $\int_a^b f(x) \cdot dx$ 에서 $f(x)$와 dx는 서로 수직관계이다. 즉, $f(x)=0$ 인 곳에서 $f(x)$까지의 넓이를 $x=a \sim x=b$로 자른 것.

이를 이용해 역함수 넓이 구하듯이 90° 돌려서 해석할 수도 있다.