

〈 2022 수능 수학 표준점수 (평가원 방법)과 (Q점수 방법) 같음 증명 〉

《 목적 》

이 파일 제작과 증명의 목적은 (공통영역)+(선택영역)으로 구성된 2022 수능에서 표준점수 산출 원리를 이해하고, 이를 바탕으로 평가원 제공 방식의 다층 구조 Z점수 활용이 아닌, 직관적이고 빠르게 일반인이 이해할 수 있는 원점수 기반 표준점수 산출을 목표로 합니다.

평가원 표준점수 산출 방법	Q 점수 사용 표준점수 산출 방법
① 공통영역점수 표준화 Z점수 산출 ② 선택영역 조정점수를 구한 후 이를 다시 표준화 Z점수 산출 ③ 이를 다시 비율 적용하여 가중합 산출 ④ 다시 평균 100, 표준편차 20으로 마지막 표준화	① 선택영역 조정점수(선택 조정 원점수) 산출 ② Q 점수 산출 $Q = (\text{공통영역 원점수}) + (\text{선택 조정 원점수}) \times \frac{26}{74}$ ③ Q점수를 평균 100, 표준편차 20으로 표준화
특징 : 이해하기 어렵고, 산출 과정이 직관적이지 않음	특징 : 산출 과정이 직관적이라 이해 가능 왼쪽의 평가원 방법과 같은 결과 산출

이렇게 단순하고, 일반인이 이해할 수 있는 원점수 개념을 사용함으로써, 보다 효율적인 표준점수 산출 원리를 설명하려고 합니다.

예를 들어, (A학생)이 공통영역에서 63점, 선택영역에서 19점을 받았을 때,

① 선택영역 조정점수(선택 조정 원점수)를 계산하여 선택 원점수 19점이 각 집단의 평균과 표준편차에 의해 선택영역 조정점수(선택 조정 원점수) $U = 55.23$ 점으로 변환된다고 하면,

② $(\text{공통영역 원점수}) + (\text{선택 조정 원점수}) \times \frac{26}{74} = Q$ 점수 산출에 근거 이 (A학생)의 Q 점수는

$$Q_A = 63 + 55.23 \times \frac{26}{74} = 82.41 \text{ 로 산출 (편의상 반올림하여 소수 둘째 자리까지 표현)}$$

③ 전국 각 학생의 Q점수를 평균 100, 표준편차 20으로 표준화하면 최종 표준점수가 됩니다.

여기서 바로, $Q_A = 82.41$ 가 공통영역 원점수는 건드리지 않고, 선택영역만 조정해서 합친 최종 변환 원점수가 되는 것입니다.

아래에 있는 증명 과정은 고등학교 ‘확률과 통계’ 교과서에 나오는 평균, 표준편차, 표준화 개념을 이용하여 증명하였으며, $E(aX+b) = aE(X)+b$ 공식을 중간에 많이 사용하였습니다.

* 본 증명에 사용된 기호들입니다. 인쇄하여 옆에 놓고 보면서 증명을 읽으면 도움이 됩니다.

기호	의미	설명	특성
A, B, \dots, C	선택 그룹	<선택과목> 국어 (화법과 작문 / 언어와 매체) 수학 (확률과 통계 / 미적분 / 기하)	
p, q	영역 배점	p = 공통영역 배점 (74점) q = 선택영역 배점 (26점)	$p + q = 100$
x, y	영역별 원점수	x = 공통영역 (74점 중) 획득 원점수 y = 선택영역 (26점 중) 획득 원점수	
m, σ	수험생 전체	m = 전체 학생 공통영역 점수 평균 σ = 전체 학생 공통영역 점수 표준편차	
	선택과목 그룹별	$m_{x_A}, m_{x_B}, \dots, m_{x_C}$: 선택과목별 공통점수 평균 $m_{y_A}, m_{y_B}, \dots, m_{y_C}$: 선택과목별 선택과목점수 평균 $\sigma_{x_A}, \sigma_{x_B}, \dots, \sigma_{x_C}$: 선택과목별 공통점수 표준편차 $\sigma_{y_A}, \sigma_{y_B}, \dots, \sigma_{y_C}$: 선택과목별 선택점수 표준편차	
U	선택과목 조정점수	<선택과목 조정 원점수> $\left(U = m_x + \sigma_x \times \frac{y - m_y}{\sigma_y} \right)$ 선택영역 원점수 y 점을 조정 공식 활용하여 U 점 형태로 변환한 조정점수	$E(U) = m$ $\sigma(U) = \sigma$
S	공통영역 표준화	<공통과목 표준화> $\left(S = \frac{x - m}{\sigma} \right)$ 공통영역 원점수 x 점을 Z점수로 표준화한 S	$E(S) = 0$ $\sigma(S) = 1$
T	선택영역 표준화	< U 점수 표준화> $\left(T = \frac{U - m}{\sigma} \right) \because \begin{cases} E(U) = m \\ \sigma(U) = \sigma \end{cases}$ 선택영역 조정점수 U 점을 Z점수로 표준화한 T	$E(T) = 0$ $\sigma(T) = 1$
V	비율 적용 가중합	< S 와 T 의 배점 비율 적용 가중합> $\left(V = \frac{pS + qT}{100} = 0.74S + 0.26T \right)$ 위의 두 점수 S 와 T 에 배점 비율을 곱하여 더함.	$E(V) = 0$ $\sigma(V) \neq 1$
W	최종 표준 점수	<평가원 제공 최종 표준점수> $\left(W = 100 + 20 \times \frac{V - E(V)}{\sigma(V)} \right)$ 위의 가중합 V 점수를 평균 100, 표준편차 20인 표준점수 W 로 계산한 후, W 를 소수 첫째 자리에서 반올림한 정수가 (최종 표준점수)	$E(W) = 100$ $\sigma(W) = 20$
R	원점수 비율 적용 가중합	<공통 원점수 x 와 선택 조정점수 U 의 가중합> $\left(R = \frac{px + qU}{100} = 0.74S + 0.26T \right)$ 로 증명 과정에서 사용 R 을 평균 100, 표준편차 20으로 표준화하면 W 산출	$E(R) = m$
Q	최종 조정 원점수	<수험생의 조정된 최종 원점수 Q > $\left(Q = x + \frac{q}{p} U = x + \frac{26}{74} U \right)$ 로 선택과목 조정점수가 반영된 최종 원점수 역할을 하는 값. Q 를 평균 100, 표준편차 20으로 표준화하면 W 산출	$E(Q)$ $= \frac{100}{p} E(R)$ $= \frac{100}{74} m$

《 증명 》

선택 과 목	$p+q=100$		선택 과목별 인원	전체 응시 인원	평균			표준편차		
	공통 점수 (p 점 배점)	선택 점수 (q 점 배점)			전체 공통 점수 평균	선택별 공통 점수 평균	선택별 선택 점수 평균	전체 공통 점수 표준편차	선택별 공통 점수 표준편차	선택별 선택 점수 표준편차
A	x_{A_1}	y_{A_1}	i	n	m	m_{x_A}	m_{y_A}	σ	σ_{x_A}	σ_{y_A}
	\vdots	\vdots								
B	x_{B_1}	y_{B_1}	j			m_{x_B}	m_{y_B}		σ_{x_B}	σ_{y_B}
	\vdots	\vdots								
C	x_{C_1}	y_{C_1}	k			m_{x_C}	m_{y_C}		σ_{x_C}	σ_{y_C}
	\vdots	\vdots								

· 전체 응시 인원 $n = i + j + \dots + k$

· 전체 공통점수 평균 $m = \frac{\sum_{l=1}^i x_{A_l} + \sum_{l=1}^j x_{B_l} + \dots + \sum_{l=1}^k x_{C_l}}{n}$

· 전체 공통점수 표준편차 $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^i (x_{A_l} - m)^2 + \sum_{l=1}^j (x_{B_l} - m)^2 + \dots + \sum_{l=1}^k (x_{C_l} - m)^2}{n}}$

〈 평가원 방식 설명 〉

(1) 각 학생별 공통점수 부분 표준화 $\left(S = \frac{x - m}{\sigma} \right)$

$\dots, S_{A_i} = \frac{x_{A_i} - m}{\sigma}, \dots, S_{B_j} = \frac{x_{B_j} - m}{\sigma}, \dots, S_{C_k} = \frac{x_{C_k} - m}{\sigma}$

(2) 각 학생별 선택과목-조정점수(선택 조정 원점수) 산출 $\left(U = m_x + \sigma_x \times \frac{y - m_y}{\sigma_y} \right)$

$\dots, U_{A_i} = m_{x_A} + \sigma_{x_A} \times \frac{y_{A_i} - m_{y_A}}{\sigma_{y_A}}, \dots, U_{B_j} = m_{x_B} + \sigma_{x_B} \times \frac{y_{B_j} - m_{y_B}}{\sigma_{y_B}}, \dots, U_{C_k} = m_{x_C} + \sigma_{x_C} \times \frac{y_{C_k} - m_{y_C}}{\sigma_{y_C}}$

(3) 각 학생별 선택과목 조정점수 U 를 표준화 $\left(T = \frac{U - m}{\sigma} \right)$ ($\because E(U) = m, \sigma(U) = \sigma$)

$\dots, T_{A_i} = \frac{U_{A_i} - m}{\sigma}, \dots, T_{B_j} = \frac{U_{B_j} - m}{\sigma}, \dots, T_{C_k} = \frac{U_{C_k} - m}{\sigma}$

여기서 잠깐, U 점수(선택과목 조정 원점수)의 전체 평균과 표준편차를 구해보자.

$$E(U) = \frac{(U_{A_1} + \dots + U_{A_i}) + (U_{B_1} + \dots + U_{B_j}) + \dots + (U_{C_1} + \dots + U_{C_k})}{n}$$

$$= \frac{i \times m_{x_A} + j \times m_{x_B} + \dots + k \times m_{x_C}}{n} = \frac{\sum_{l=1}^i x_{A_l} + \sum_{l=1}^j x_{B_l} + \dots + \sum_{l=1}^k x_{C_l}}{n} = m$$

또한,

$$\sqrt{\frac{\sum_{l=1}^i (U_{A_l} - m_{x_A})^2}{i}} = \sigma_{x_A} = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^i (x_{A_l} - m_{x_A})^2}{i}} \quad \text{에서} \quad \sum_{l=1}^i U_{A_l}^2 = \sum_{l=1}^i x_{A_l}^2$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{l=1}^j (U_{B_l} - m_{x_B})^2}{j}} = \sigma_{x_B} = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^j (x_{B_l} - m_{x_B})^2}{j}} \quad \text{에서} \quad \sum_{l=1}^j U_{B_l}^2 = \sum_{l=1}^j x_{B_l}^2, \dots$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{l=1}^k (U_{C_l} - m_{x_C})^2}{k}} = \sigma_{x_C} = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^k (x_{C_l} - m_{x_C})^2}{k}} \quad \text{에서} \quad \sum_{l=1}^k U_{C_l}^2 = \sum_{l=1}^k x_{C_l}^2$$

$$\text{그러므로, } \sigma(U) = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^i (U_{A_l} - m)^2 + \sum_{l=1}^j (U_{B_l} - m)^2 + \dots + \sum_{l=1}^k (U_{C_l} - m)^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^i (x_{A_l} - m)^2 + \sum_{l=1}^j (x_{B_l} - m)^2 + \dots + \sum_{l=1}^k (x_{C_l} - m)^2}{n}} = \sigma$$

즉, $E(U) = m$, $\sigma(U) = \sigma$ 이다.

그러므로, (전체 학생)의 (공통점수 평균 m) = (전체 학생)의 (선택조정 원점수 평균 $E(U)$)

(전체 학생)의 (공통점수 표준편차 σ) = (전체 학생)의 (선택조정 원점수 표준편차 $\sigma(U)$)

(4) 각 학생별 <공통:선택> 비율 적용한 표준화 점수의 가중합 계산 $\left(V = \frac{pS+qT}{100} \right)$

(여기서, 공통영역 배점 $p=74$, 선택영역 배점 $q=26$ 이다.)

$$\dots, V_{A_i} = \frac{pS_{A_i} + qT_{A_i}}{100}, \dots, V_{B_j} = \frac{pS_{B_j} + qT_{B_j}}{100}, \dots, V_{C_k} = \frac{pS_{C_k} + qT_{C_k}}{100}$$

여기서, $E(V) = 0$, $\sigma(V) \neq 1$ 이다.

(5) 각 학생별 최종 표준점수 $\left(W = 100 + 20 \times \frac{V - E(V)}{\sigma(V)} \right)$

$\dots, W_{A_i} = 100 + 20 \times \frac{V_{A_i} - 0}{\sigma(V)}, \dots, W_{B_j} = 100 + 20 \times \frac{V_{B_j} - 0}{\sigma(V)}, \dots, W_{C_k} = 100 + 20 \times \frac{V_{C_k} - 0}{\sigma(V)}$

여기서, W 를 소수 첫째 자리에서 반올림한 정수가 최종 표준점수이다. (여기까지 평가원 방법)

[Q 점수 사용 방법이 위와 같음을 증명하는 과정]

(6) 각 학생별 중간 점수 $\left(R = \frac{px + qU}{100} \right)$ 를 만들어 보자.

(여기에서 x 는 공통영역 원점수이고, U 는 선택영역 조정 원점수이다.)

위의 (4)번 $\left(V = \frac{pS + qT}{100} \right)$ 를 정리하면, (V 는 표준화 점수의 가중합이다.)

$$\begin{aligned} V = \frac{pS + qT}{100} &= \frac{p \times \frac{x - m}{\sigma} + q \times \frac{U - m}{\sigma}}{100} = \frac{px + qU - m(p + q)}{100\sigma} \\ &= \frac{px + qU}{100\sigma} - \frac{m(p + q)}{100\sigma} = \frac{R}{\sigma} - \frac{m}{\sigma} \quad (\because \frac{px + qU}{100} = R \text{ 점수로 정의, } p + q = 100) \end{aligned}$$

즉, $V = \frac{1}{\sigma}R - \frac{m}{\sigma}$ 형태가 되어, $E(V) = \frac{1}{\sigma}E(R) - \frac{m}{\sigma}$, $\sigma(V) = \sigma\left(\frac{1}{\sigma}R - \frac{m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \times \sigma(R)$

그런데, $E(V) = 0$ 이므로, $E(V) = \frac{1}{\sigma}E(R) - \frac{m}{\sigma} = 0$ 에서 $E(R) = m$

(여기에서 m 과 σ 는 전체 학생의 공통점수 평균과 표준편차를 각각 의미한다.)

따라서, $W = 100 + 20 \times \frac{V - 0}{\sigma(V)} = 100 + 20 \times \frac{\left(\frac{1}{\sigma}R - \frac{m}{\sigma}\right) - 0}{\frac{1}{\sigma} \times \sigma(R)} = 100 + 20 \times \frac{R - m}{\sigma(R)} = 100 + 20 \times \frac{R - E(R)}{\sigma(R)}$

즉, R 점수를 평균 100, 표준편차 20 인 수능 수학 최종 표준점수 W 로 환산할 수 있다.

(여기에서 R 점수의 의미는 $R = 0.74x + 0.26U$ 의 뜻으로

(공통 원점수)와 (선택조정 원점수)의 가중합이다.)

(7) 각 학생별 최종 조정 원점수 $\left(Q = x + \frac{q}{p}U \right)$ 를 표준화

$$Q = x + \frac{q}{p}U = \frac{px + qU}{p} = \frac{100}{p} \times \frac{px + qU}{100} = \frac{100}{p} \times R \text{ 이므로, } R = \frac{p}{100}Q$$

따라서, $E(R) = \frac{p}{100}E(Q)$, $\sigma(R) = \frac{p}{100}\sigma(Q)$ 이므로,

위의 (6)번에서 $W = 100 + 20 \times \frac{R - E(R)}{\sigma(R)} = 100 + 20 \times \frac{\frac{p}{100}Q - E\left(\frac{p}{100}Q\right)}{\sigma\left(\frac{p}{100}Q\right)} = 100 + 20 \times \frac{Q - E(Q)}{\sigma(Q)}$

즉, Q 점수를 평균 100, 표준편차 20 인 수능 수학 최종 표준점수 W 로 환산할 수 있다.

<참고> R 점수와 Q 점수의 의미 설명

(1) $\left(R = \frac{px + qU}{100}\right)$: 2022 수능 기준 $R = 0.74x + 0.26U$ 로

(공통 원점수 x)와 (선택 조정 원점수 U)의 가중합
학생 입장에서는 ‘ p 점(74점) 만점 중 R 점을 받았다’는 의미로
직관적으로 이해하여 사용하기 적합하지 않은 점수입니다.

R 의 특징은 $E(R) = E\left(\frac{px + qU}{100}\right) = \frac{p}{100}m + \frac{q}{100}E(U) = \frac{p}{100}m + \frac{q}{100}m = m$

(2) $\left(Q = x + \frac{q}{p}U\right)$: 2022 수능 기준 $Q = x + \frac{26}{74}U$ 로

(공통 원점수 x)는 그대로 두고, (선택 조정 원점수 U) $\times \frac{26}{74}$ 를 더한 값

학생 입장에서는 ‘100점 만점 중 Q 점을 받았다’는 의미로,

새롭게 조정된 (최종 원점수) 역할을 합니다. 직관적으로 이해하기 좋습니다.

여기서, (공통 원점수 x)는 p 점(74점) 만점 중 x 를 받은 것,

(선택 조정 원점수 U)는 q 점(26점) 만점 중 y 점 받은 것을 p 점(74점) 만점 형태로 확대 조정한
점수이므로, (선택 조정 원점수 U) $\times \frac{26}{74}$ 이런 과정을 통해 원래대로 q 점(26점) 만점 형태의 비율

로 조정을 하는 것입니다. 그러면, Q 는 100점 만점 형태의 최종 조정된 원점수가 되는 원리입니
다. (Q 의 개념이 실제 100점 만점이라는 뜻 보다는 100점 만점화 된다는 원리입니다.

조정 점수 특성상 U 점수 산출 과정 안에 표준화 과정이 있기 때문에 고득점 수험생은 Q 점수가
100점보다 클 수 있습니다.)

《맺음말》

위의 개인별 R 점수와 Q 점수 둘 다 모두 평균 100, 표준편차 20인 표준화 과정을 거치면
최종 수능 표준점수인 W 점수가 산출되며, 이는 평가원에서 제공한 개인별 최종 표준점수와 일
치합니다. 따라서, 산출 과정에서 표준화 횟수가 적고, 일반인이 직관적으로 이해하기 좋은 Q 점
수(조정된 전체 원점수)를 설명하고 이를 표준화하면 최종 수능 표준점수인 것을 안내하면 산출
과정 이해를 돕는데 좋다고 생각합니다.

작성 