대표저자 황보백 송원학원, 랑데뷰수학

집필진
[김은수 샤인수학학원 010-5687-5722]
[김효경 수학의 정원 010-6369-6416]
[박현주 math플래너 010-4113-4018]
[서영만 다니엘 영수학원 010-9244-0910]
[오세준 오엠 수학교습소 010-8858-9561]
[오은경 오은경수학 010-4534-5129]
[우성근 우성근수학 010-3040-0005]
[유승희 서울 오름학원 010-5298-1393]
[이재호 이재호 수학학원 010-4527-1703]
[이지훈 SY영수학원 010-8598-5284]
[이태형 가토수학과학학원 gatoms@kakao.com]
[이현일 이현일수학 010-2681-9501]
[장선정 오름수학 010-4894-1764]
[장세완 장선생수학 010-2568-0049]
[장정보 장정보 수학교습소 010-9504-5938]
[조필재 샤인수학학원 053-754-3121]
[조남웅 STM수학학원 010-2024-0707]
[최성훈 최성훈 수학교습소 010-2680-5281]
[최재영 셰르파 수학교습소 010-2577-4221]
[최현정 MQ멘토수학 010-2655-9279]
[한정아 한정아 수학교습소 010-7220-6368]
[황수영 JS수학연구소 010-6780-8242]

그림 이현일, 최성훈

[유형 1]
거듭제곱근의 뜻과 성질

출제유형 | 거듭제곱근의 뜻과 성질을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 거듭제곱근의 뜻과 성질을 이용하는 문제를 해결한다.

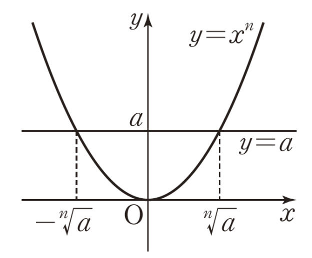
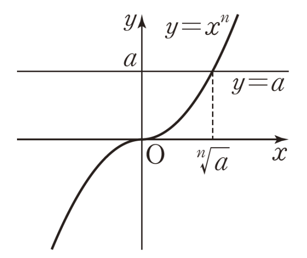
(1) 실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 $x^n=a$를 만족시키는 실수 x, 즉 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

① n이 짝수인 경우

- $a>0$일 때 : $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$로 2개다.
- $a=0$일 때 : 0으로 1개다.
- $a<0$일 때 : 없다.

② n이 홀수인 경우

$\sqrt[n]{a}$로 1개뿐이다.

	
<n이 짝수일 때>	<n이 홀수일 때>

(2) $a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때,

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

1) 2021학년도 6월 평가원

자연수 n이 $2\le n\le 11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은?

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

2)

$\sqrt{25}+\sqrt{\sqrt{81}}+\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$ 의 값을 구하시오.

11)

$3^{-2} \times 9^2$의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

12)

$2^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} \times 10^{\frac{4}{3}}$ 의 값은?

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

13)

$\left(\dfrac{2^{\sqrt{5}}}{4}\right)^{\sqrt{5}+2}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

[유형 5]
로그의 여러 가지 성질

출제유형 | 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 로그의 밑의 변환 공식을 포함한 여러 가지 성질을 이용하여 문제를 해결한다.
$a>0$, $a\neq1$이고 $b>0$일 때

① $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (단, $c>0$, $c\neq1$)

② $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

③ $\log_a b\times\log_b a=1$ (단, $b\neq1$)

④ $\log_a b\times\log_b c=\log_a c$ (단, $b\neq1$, $c>0$)

34) 2021학년도 6월 평가원
두 양수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(2,\ \log_4 a)$, $(3,\ \log_2 b)$를 지나는 직선이 원점을 지날 때, $\log_a b$의 값은? (단, $a\neq1$)

① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{3}{4}$　④ 1　⑤ $\dfrac{5}{4}$

35) 2020학년도 6월 평가원
$\log_2 5=a$, $\log_5 3=b$일 때, $\log_5 12$를 a, b로 옳게 나타낸 것은?

① $\dfrac{1}{a}+b$　② $\dfrac{2}{a}+b$　③ $\dfrac{1}{a}+2b$　④ $a+\dfrac{1}{b}$　⑤ $2a+\dfrac{1}{b}$

[유형 7]
지수함수와 그래프

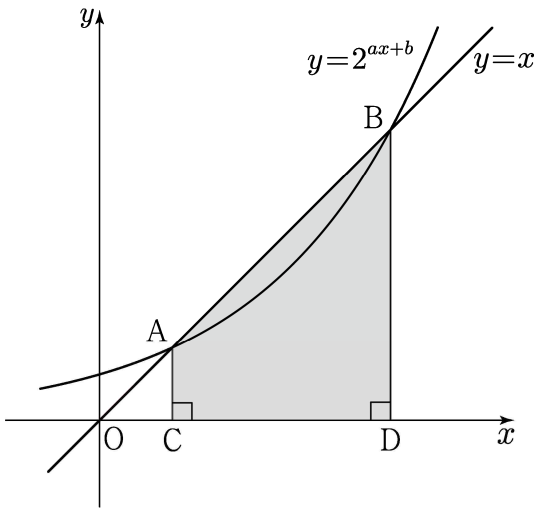
출제유형 | 지수함수의 성질과 그 그래프의 특징을 이해하고 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 지수함수의 밑의 범위에 따른 지수함수의 증가와 감소, 지수함수의 그래프의 점근선, 평행이동과 대칭이동을 이해하여 문제를 해결한다.

50) 2021학년도 9월 평가원

곡선 $y=2^{ax+b}$과 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$



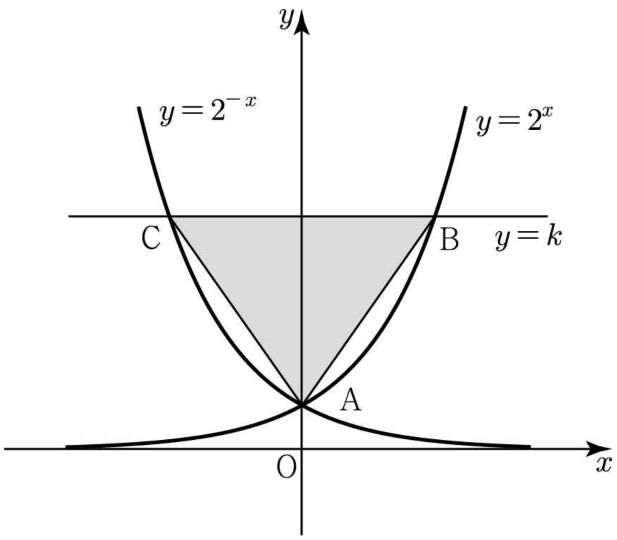
51) 2019학년도 9월 평가원

함수 $f(x)=-2^{4-3x}+k$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않도록 하는 자연수 k의 최댓값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

66)

그림과 같이 두 곡선 $y=2^{x}$, $y=2^{-x}$가 만나는 점을 A라 하고, 직선 $y=k\,(k>1)$이 두 곡선과 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(0,\ 3)$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?



① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

67)

함수 $y=3^{x+a}+b$의 그래프는 점 $(0,10)$을 지나고, 치역이 $\{y\,|\,y>1\}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.랑 (단, a,b는 상수이다.)

68)

두 곡선 $y=a^{x+3}$, $y=a^{x}+b$가 직선 $2x+y-5=0$과 각각 한 점에서 만나고, 이 두 점 사이의 거리가 실수 a의 값에 관계없이 $3\sqrt{5}$으로 일정할 때, 상수 b의 값은?(단, $a>0$, $b<0$)

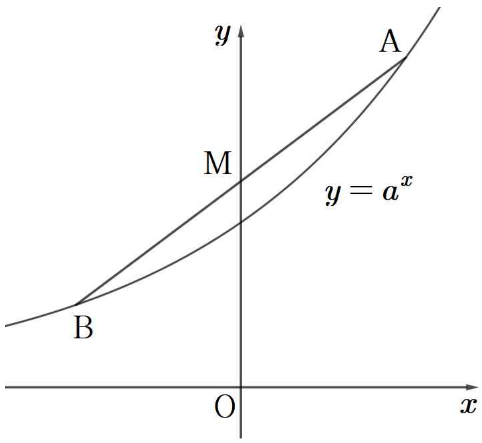
① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

69)

그림과 같이 함수 $y=a^{x}$ $(a>1)$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A,B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 선분 AB의 중점 M은 y축 위에 있다. (나) 두 직선 OA, OB는 서로 수직이다.

선분 AB의 길이가 $\frac{5}{2}$일 때, a의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{11}{6}$

④ 2 ⑤ $\frac{13}{6}$

[유형 9]
로그함수와 그 그래프

출제유형 | 로그함수의 성질과 그 그래프의 특징을 이해하고 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 로그함수의 밑의 범위에 따른 로그함수의 증가와 감소, 로그함수의 그래프의 점근선, 평행이동과 대칭이동의 성질을 이해하여 문제를 해결한다.

90) 2021학년도 11월 수능

$\frac{1}{4}<a<1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-1$이 두 곡선 $y=\log_a x, y=\log_{4a}x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 $a=\frac{1}{2}$이다.

ㄷ. $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{CD}}$이면 $\frac{1}{2}<a<1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

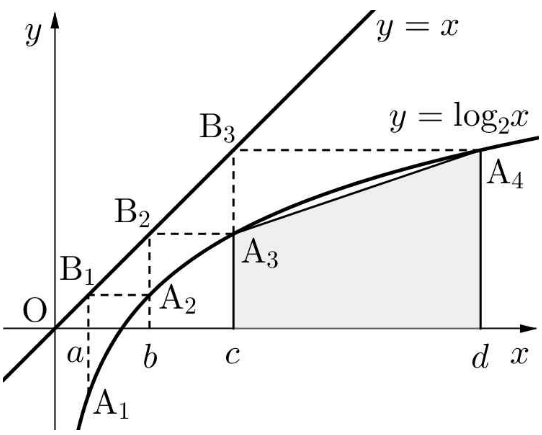
91) 2017학년도 9월 평가원

곡선 $y=\log_2(x+5)$의 점근선이 직선 $x=k$이다. k^2의 값을 구하시오.(단, k는 상수이다.)

100) 2010학년도 6월 평가원

그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 한 점 A_1에서 y축에 평행한 직선을 그어 직선 $y=x$와 만나는 점을 B_1이라 하고, 점 B_1에서 x축에 평행한 직선을 그어 이 그래프와 만나는 점을 A_2라 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 점 A_2로부터 점 B_2와 점 A_3을, 점 A_3으로부터 점 B_3와 점 A_4를 얻는다. 네 점 A_1, A_2, A_3, A_4의 x좌표를 차례로 a, b, c, d라 하자.

네 점 $(c,\ 0)$, $(d,\ 0)$, $(d,\ \log_2 d)$, $(c,\ \log_2 c)$를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 함수 $f(x)=2^x$을 이용하여 a, b로 나타낸 것과 같은 것은?



① $\frac{1}{2}\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)-(f\circ f)(a)\}$

② $\frac{1}{2}\{f(b)-f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$

③ $\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$

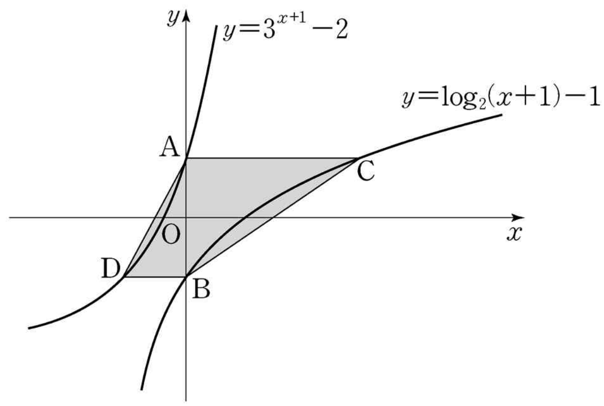
④ $\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)-(f\circ f)(a)\}$

⑤ $\{f(b)-f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$

101) 2015학년도 9월 평가원

그림과 같이 두 곡선

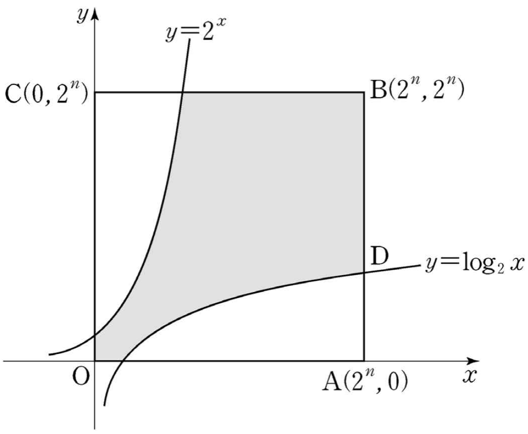
$y=3^{x+1}-2$, $y=\log_2(x+1)-1$이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)-1$과 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=3^{x+1}-2$와 만나는 점을 D라 할 때, 사각형 ADBC의 넓이는?



① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

102) 2014학년도 9월 평가원

좌표평면에서 꼭짓점의 좌표가 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2^n,\ 0)$, $\mathrm{B}(2^n,\ 2^n)$, $\mathrm{C}(0,\ 2^n)$ 인 정사각형 OABC 와 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, n 은 자연수이다.)

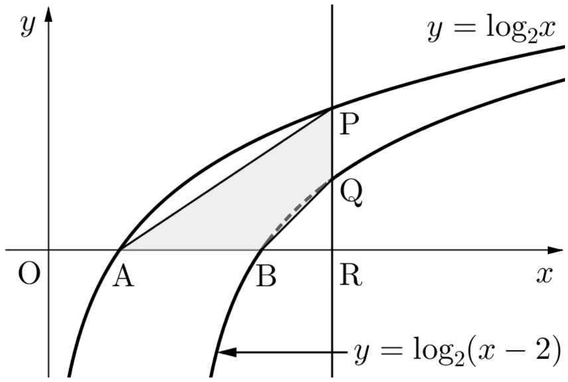


선분 AB 가 곡선 $y=\log_2 x$ 와 만나는 점을 D 라 하자. 선분 AD 를 $2:3$ 으로 내분하는 점을 지나고 y 축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_2 x$ 와 만나는 점을 E, 점 E 를 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y=2^x$ 과 만나는 점을 F 라 하자. 점 F 의 y 좌표가 16 일 때, 직선 DF 의 기울기는?

① $-\dfrac{13}{28}$ ② $-\dfrac{25}{56}$ ③ $-\dfrac{3}{7}$ ④ $-\dfrac{23}{56}$ ⑤ $-\dfrac{11}{28}$

103) 2016학년도 9월 평가원

그림과 같이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$ 의 그래프가 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 직선 $x=k$ $(k>0)$이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, x축과 만나는 점을 R라 하자. 점 Q가 선분 PR의 중점일 때, 사각형 ABQP의 넓이는?



① $\dfrac{3}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

104)

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(2-x)+1$의 그래프의 점근선과 직선 $y=x+4$이 만나는 점의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

지수-로그함수 단원평가

169)

4의 네제곱근 중 양의 실수인 것을 a, k의 여섯 제곱근 중 양의 실수인 것을 b, 7의 세제곱근 중 실수인 것을 c라 하자. $a<b<c$가 성립하도록 하는 자연수 k의 개수는?

① 35 ② 40 ③ 45 ④ 50 ⑤ 55

170)

$\sqrt[3]{125}\times 27^{\frac{1}{3}}\times\sqrt[5]{32}$의 값은?

① 10 ② 15 ③ 25
④ 30 ⑤ 40

171)

$x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$일 때,

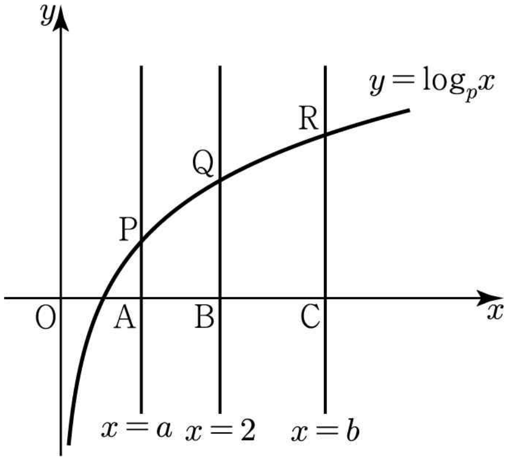
$(5-x^{\frac{2}{3}})(5-x^{-\frac{2}{3}})+(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})^2$의 값을 구하시오.

172)

$(\sqrt{\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{8}})^n$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

193)

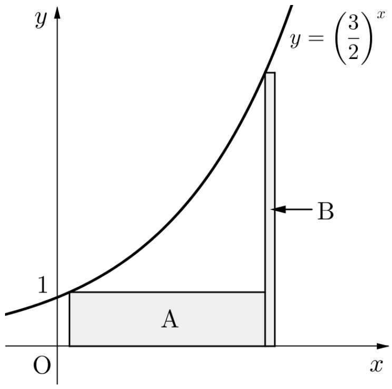
그림과 같이 좌표평면에서 세 직선 $x=a$, $x=2$, $x=b$ $(0<a<2<b)$가 x축과 만나는 점을 각각 A, B, C라 하고 곡선 $y=\log_p x(p>1)$과 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자. $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{CR}}$일 때, $a+\frac{4}{b}$의 최솟값은?



① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 4

194)

그림과 같이 함수 $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$의 그래프 위의 두 점을 각각 한 꼭짓점으로 하는 두 직사각형 A, B가 있다. 직사각형 A의 가로의 길이가 4일 때, 직사각형 A의 넓이가 직사각형 B의 넓이의 4배가 된다고 한다. 이때, 직사각형 B의 가로의 길이는?(단, 두 직사각형의 한 변은 x축 위에 놓여 있고, 한 꼭짓점을 공유한다.)



① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{4}{27}$ ③ $\frac{8}{27}$ ④ $\frac{8}{81}$ ⑤ $\frac{16}{81}$

195)

함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y=f(x)$라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점 중 한 점의 x좌표가 16일 때, 실수 m의 값은?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

[유형 3]
삼각함수의 그래프

출제유형| 삼각함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ 의 그래프의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값이나 삼각함수의 값을 구하는 문제가 출제된다.

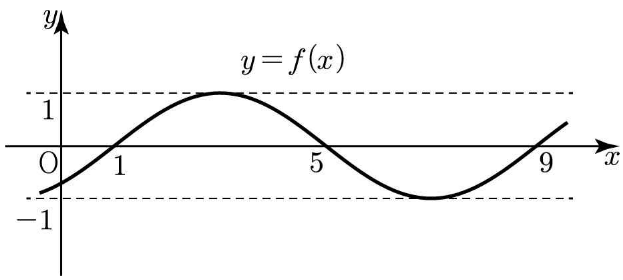
출제유형잡기 | 삼각함수의 그래프에서 삼각함수의 값, 주기, 최댓값과 최솟값, 그래프가 지나는 점을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값이나 삼각함수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

228) 2004학년도 9월 평가원

$0 \le x \le 2\pi$ 일 때, 두 함수 $y=\sin 2x$ 와 $y=\cos 3x$ 의 그래프의 교점의 개수를 구하시오.

229) 2004학년도 6월 평가원

다음은 $f(x)=\sin(ax+b)$ 의 그래프이다.



이때, $f(0)$ 의 값은? (단, $a>0$)

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

④ $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

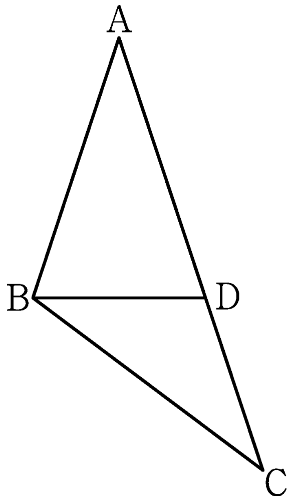
[유형 8]
코사인법칙

출제유형 | 삼각함수의 성질과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이나 각의 크기를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각함수의 성질, 삼각형과 원의 성질 그리고 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이나 각의 크기를 구하는 문제를 해결한다.

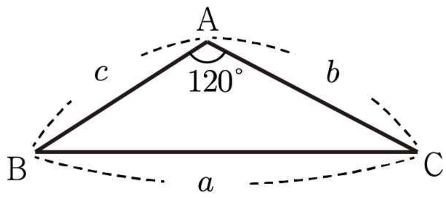
264) 2021학년도 9월 평가원

$\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AC}}=10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}$가 되도록 잡는다. $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오.



265) 1998학년도 11월 수능

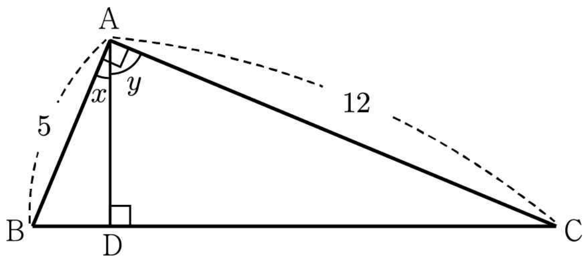
삼각형 ABC에서 $b=8$, $c=7$, $\angle A=120^\circ$일 때, a의 값을 구하시오.



삼각함수 단원평가

277)

그림과 같이 $\angle$A가 직각인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{\text{AB}}=5$, $\overline{\text{AC}}=12$ 꼭짓점 A에서 빗변에 내린 수선의 발을 D라 하자. $\angle\text{BAD}=x$, $\angle\text{CAD}=y$일 때, $\sin x+\sin y=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



278)

$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$일 때, $\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\times\dfrac{1}{\tan\theta}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이다.)

279)

이차방정식 $6x^2-3x-a=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$일 때, a의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\dfrac{9}{4}$　② 2　③ $\dfrac{7}{4}$　④ $\dfrac{3}{2}$　⑤ $\dfrac{5}{4}$

280)

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{4}{3}$일 때, $18\sin\theta\cos\theta$의 값을 구하시오.

363)

수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{49}(1+2ka_{k+1})=149,\ \sum_{k=1}^{50}(2k+1)a_k=160$$

을 만족시킨다, $\sum_{k=1}^{50}a_k$의 값을 구하시오.

364)

$\sum_{k=1}^{100}\sin\frac{k}{3}\pi$의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

365)

$\sum_{i=1}^{100}\tan\frac{i}{3}\pi$의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

366)

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+1)^2=42,\ \sum_{k=1}^{10}a_k(a_k-1)=12$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2$의 값은?

① 10 ② 20 ③ -10 ④ -20 ⑤ 0

413) 2014학년도 9월 평가원

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1=2$ 이고,

$$\log_2 a_{n+1}=1+\log_2 a_n \quad (n\geq 1)$$

을 만족시킨다. $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_8=2^k$ 일 때 상수 k 의 값은?

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

414) 2018학년도 11월 수능

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-1 & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \\ a_n+n & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. a_7의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

415)

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=4$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $(n+3)a_{n+1}=na_n$을 만족시킬 때, a_5의 값은?

① $\frac{1}{35}$ ② $\frac{2}{35}$ ③ $\frac{3}{35}$ ④ $\frac{4}{35}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

416)

함수 $f(x)=\log_2 x$에 대하여 $a_1=1$이고 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $f^{-1}(a_{n+1})-f^{-1}(a_n)=2$을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=a_n$의 해를 b_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}b_n$의 값을 구하시오.

[유형 11]
수학적 귀납법

출제유형 | 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명하는 과정에서 빈칸에 알맞은 수나 식을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 명제를 수학적 귀납법으로 증명하는 과정에서 앞과 뒤의 관계를 파악하여 빈칸에 알맞은 수나 식을 구한다.
자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
(ⅰ) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

419) 2012학년도 6월 평가원
수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=1$ 이고

$$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} a_k \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식으로부터 $a_2=$ $\boxed{(가)}$ 이다.
자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \sum_{k=1}^{n+1} 2^{n+1-k} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2^{n+1-k} a_k + a_{n+1} \\ &= \boxed{(나)} \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} a_k + a_{n+1} \\ &= \boxed{(다)}\, a_{n+1} \end{aligned}$$

이다.
따라서 $a_1=1$ 이고, $n \geq 2$ 일 때

$a_n = \left(\boxed{(다)}\right)^{n-2}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 라 할 때, $p+q+r$ 의 값은?
① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

1) 정답 ①

(i) n이 홀수 일 때,

$x^n=-n^2+9n-18$에서

$x=\sqrt[n]{-n^2+9n-18}$의 값이 음의 실수가 되기 위해서는

$-n^2+9n-18<0$이면 된다.

$n^2-9n+18>0$

$(n-3)(n-6)>0$

$n<3$ 또는 $n>6$

에서 만족하는 홀수는 7, 9, 11이다.

(ii) n이 짝수 일 때,

$x^n=-n^2+9n-18$에서

$x=\pm\sqrt[n]{-n^2+9n-18}$의 값이 존재하기 위해서는

$-n^2+9n-18>0$이면 된다.

$n^2-9n+18<0$

$(n-3)(n-6)<0$

$3<n<6$

에서 만족하는 짝수는 4이다.

(i), (ii)에서 만족하는 모든 n의 합은

$4+7+9+11=31$이다.

2) 정답 10

$\sqrt{25}+\sqrt{\sqrt{81}}+\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$

$=\sqrt{5^2}+\sqrt[4]{3^4}+\sqrt[8]{2^8}=5+3+2=10$

3) 정답 ②

$\sqrt{9}\times\sqrt[3]{27}=3\times3=9$

4) 정답 3

-25의 세제곱근 중 실수인 것은

$x^3=-25$에서 $x=\sqrt[3]{-25}$으로 1개다.

따라서 $a=1$

$\sqrt{23}$의 네제곱근 중 실수인 것은

$x^4=\sqrt{23}$에서 $x=\pm\sqrt[8]{23}$으로 2개다.

따라서 $b=2$

$a+b=3$

5) 정답 ②

$\sqrt[3]{2}\times2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{2}{3}}$

$=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$

$=2^1$

$=2$

[다른 풀이]

$\sqrt[3]{2}\times2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2^2}$

$=\sqrt[3]{2^3}$

$=2$

6) 정답 ②

$(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^3=\left(\sqrt{2\cdot2^{\frac{2}{3}}}\right)^3=\left(2^{\frac{5}{6}}\right)^3=\sqrt{32}$

이때, $5=\sqrt{25}<\sqrt{32}<\sqrt{36}=6$이므로

$(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은 6이다.

7) 정답 ④

$\sqrt[3]{n^m}=n^{\frac{m}{3}}$에서 $n^{\frac{m}{3}}$이 자연수가 되는 경우는

$n=1$ 인 경우에 $m=1,2,3$

$2\le n\le7$인 경우에 $m=3$

$n=8$인 경우에 $m=1,2,3$

따라서 순서쌍 (m,n)의 개수는

$3+6+3=12$

8) 정답 30

$a^6=3$에서 $a=3^{\frac{1}{6}}$

$b^5=7$에서 $b=7^{\frac{1}{5}}$

$c^2=11$에서 $c=11^{\frac{1}{2}}$

이므로

$(abc)^n=\left(3^{\frac{1}{6}}\cdot7^{\frac{1}{5}}\cdot11^{\frac{1}{2}}\right)^n$

이 때, $\left(3^{\frac{1}{6}}\cdot7^{\frac{1}{5}}\cdot11^{\frac{1}{2}}\right)^n$이 자연수가 되도록 하는 최소의 자연수 n은 $6,5,2$의 최소공배수이므로 30이다.

438) 정답 40

$a_{n+1}=\dfrac{n+3}{n+1}a_n$에서

$n=1$일 때, $a_2=\dfrac{4}{2}a_1=\dfrac{4}{2}\times 8=16$

$n=2$일 때, $a_3=\dfrac{5}{3}a_2=\dfrac{5}{3}\times 16=\dfrac{80}{3}$

$n=3$일 때, $a_4=\dfrac{6}{4}a_3=\dfrac{6}{4}\times\dfrac{80}{3}=40$

$\therefore\ a_4=40$

439) 정답 5

$a_2=p-2$

$a_3=(p-2)+4=p+2$

$a_4=(p+2)-6=p-4$

$a_5=(p-4)+8=p+4$

$a_6=(p+4)-10=p-6$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제6항까지의 합은

$p+(p-2)+(p+2)+(p-4)+(p+4)+(p-6)=6p-6$

$6p-6=24$에서 $p=5$

440) 정답 ③

(ⅰ) $a_1=1$이므로 $a_1<2$을 만족시킨다.

(ⅱ) $n=m\ (m\geq 2)$일 때, $a_m<2m^2$이 성립한다고 가정하자.

$$a_m<m^2+\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1}a_k \text{ 이므로}$$

$m=2$일 때, $a_2<2^2+\dfrac{1}{2}<8$로 성립한다.

$$2(m+1)^2-a_{m+1}$$

$$>2(m+1)^2-\left\{\boxed{(m+1)^2}+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}a_k\right\}\to(\text{가})$$

$$=(m+1)^2-\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}a_k$$

$$>(m+1)^2-\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}\boxed{2k^2}\to(\text{나})$$

$$=(m+1)^2-\frac{1}{m+1}\times\frac{m(m+1)(2m+1)}{3}$$

$$=(m+1)^2-\boxed{\frac{m(2m+1)}{3}}\to(\text{다})$$

$$=\boxed{\frac{1}{3}m^2+\frac{5}{3}m}+1>0$$

따라서 $n=m+1$일 때도 성립한다.

(ⅰ),(ⅱ)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

따라서 $f(m)=(m+1)^2$, $g(k)=2k^2$,

$h(m)=\dfrac{m(2m+1)}{3}$이므로

$f(3)+g(3)+h(3)=16+18+7=41$