By) Essentials in orbi.

제 2 교시

수학 영역(가 형)

홀수형

5지선다형

1. $\sqrt[3]{9}\times 3^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $3^{\frac{1}{2}}$ ③ 3 ④ $3^{\frac{3}{2}}$ ⑤ 9

$3^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}$

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2+2n+1}-2n}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\frac{\sqrt{4n^2+1}+2n}{2n+1}$

3. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\sin\theta=\frac{\sqrt{21}}{7}$ 일 때, $\tan\theta$의 값은? [2점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\to t<0.$

$S=\frac{\sqrt{14}}{n}$

$C=-\frac{\sqrt{28}}{n}$

4. 두 사건 A, B에 대하여

$$P(B\mid A)=\frac{1}{4},\quad P(A\mid B)=\frac{1}{3},\quad P(A)+P(B)=\frac{7}{10}$$

일 때, $P(A\cap B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{1}{11}$

$\to \frac{B}{4}=\frac{A}{3} \to A=\frac{3}{4}B$

$\to \frac{7}{4}B=\frac{7}{10} \to B=\frac{4}{10}$

$\to A\cap B=\frac{1}{10}$

5. 부등식 $\left(\frac{1}{9}\right)^x < 3^{21-4x}$ 을 만족시키는 자연수 x 의 개수는? [3점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

$3^{-2x} < 3^{21-4x}$

$x < 10.5$

6. 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 5^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 16 인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$ 라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X}) + \sigma(\overline{X})$ 의 값은? [3점]

① $\frac{83}{4}$　② $\frac{85}{4}$　③ $\frac{87}{4}$　④ $\frac{89}{4}$　⑤ $\frac{91}{4}$

$20 + \frac{5}{4}$

7. 함수 $f(x) = (x^2 - 2x - 7)e^x$ 의 극댓값과 극솟값을 각각 a, b 라 할 때, $a \times b$ 의 값은? [3점]

① -32　② -30　③ -28　④ -26　⑤ -24

$f' = e^x(x^2 - 2x - 7 + 2x - 2)$

$= e^x(x^2 - 9)$

$x = \pm 3$

$\rightarrow (9 - 6 - 7) = -4$

$(9 + 6 - 7) = 8$

8. 곡선 $y=e^{2x}$과 x축 및 두 직선 $x=\ln\frac{1}{2}$, $x=\ln 2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{15}{8}$ ③ $\frac{15}{7}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

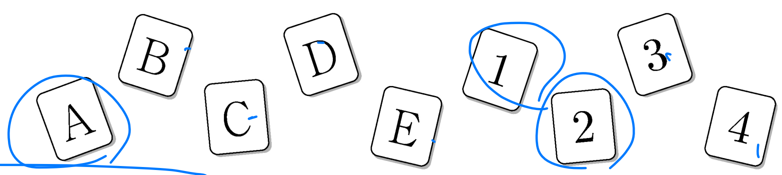
$\int e^{2x}$

$\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2}$

$= \frac{4-\frac{1}{4}}{2}$

9. 문자 A, B, C, D, E가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드와 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 있다. 이 9장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 문자 A가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 각각 숫자가 적혀 있는 카드가 놓일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{12}$



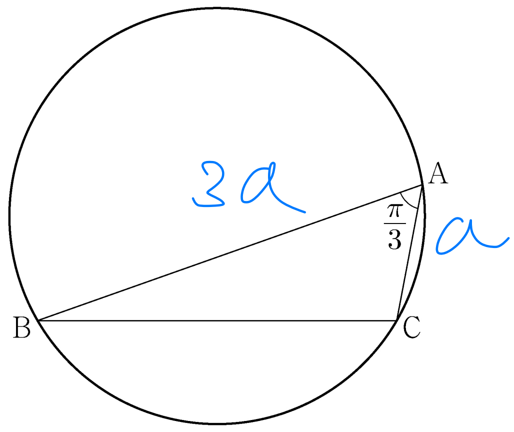
숫 A 숫

$\rightsquigarrow \frac{{}_4C_2 \times 2 \times 7!}{9!}$

$= \frac{12}{9\cdot 8}$

10. $\angle A=\frac{\pi}{3}$이고 $\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{22}$ ④ $\sqrt{23}$ ⑤ $2\sqrt{6}$



① $\frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=14 \rightarrow \overline{BC}=7\sqrt{3}$

② $49\times 3 = 10a^2 - 3a^2$

$\rightarrow a^2 = 21$

11. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3n}{3n+k}}$ 의 값은? [3점]

① $4\sqrt{3}-6$　② $\sqrt{3}-1$　③ $5\sqrt{3}-8$
④ $2\sqrt{3}-3$　⑤ $3\sqrt{3}-5$

$\frac{1}{n}\sum\sqrt{\frac{3}{3+\frac{k}{n}}}$

$\sqrt{3}\int_0^1 (3+x)^{-\frac{1}{2}}$

$\sqrt{3}\left[2(3+x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1$

$2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$

12. 확률변수 X는 평균이 8, 표준편차가 3인 정규분포를 따르고, 확률변수 Y는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다. 두 확률변수 X, Y가

$$\mathrm{P}(4\le X\le 8)+\mathrm{P}(Y\ge 8)=\frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $\mathrm{P}\left(Y\le 8+\frac{2\sigma}{3}\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8351　② 0.8413　③ 0.9332
④ 0.9772　⑤ 0.9938

4　8　　8

$\frac{4-8}{3}=-\frac{4}{3}$

$\sigma\ \frac{4}{3}=\frac{8-m}{\sigma}$

$m=8-\frac{4}{3}\sigma$

$\frac{8+\frac{2}{3}\sigma-m}{\sigma}$

$\frac{2\sigma}{\sigma}=2$

13. $\frac{1}{4}<a<1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

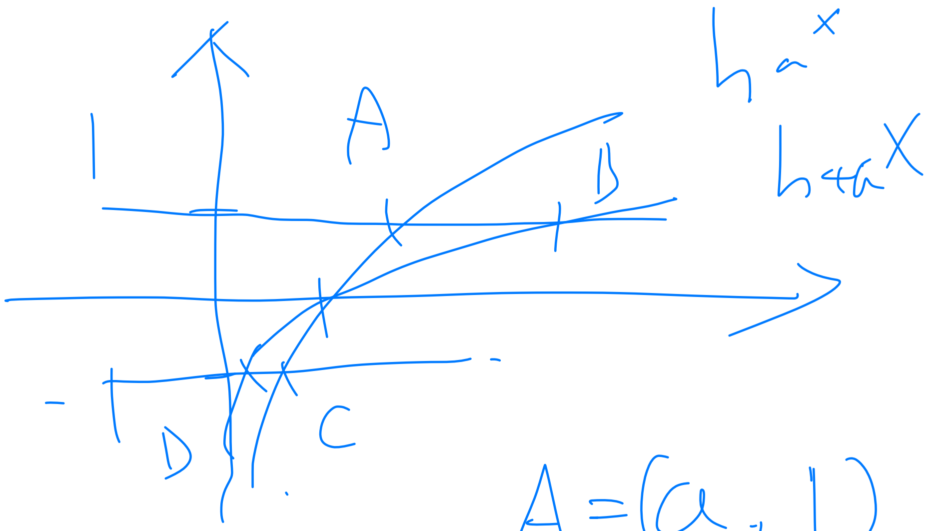
<보 기>

ㄱ. 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 $a=\frac{1}{2}$이다.

ㄷ. $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{CD}}$이면 $\frac{1}{2}<a<1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



$A=(a,1)$
$B=(4a,1)$

ㄱ: ○

ㄴ: □ → $x_B=x_C,\ x_A=x_D$

→ $a=\frac{1}{4a}$ → $a=\frac{1}{2}$

○

ㄷ: $3a<\frac{3}{4a}$

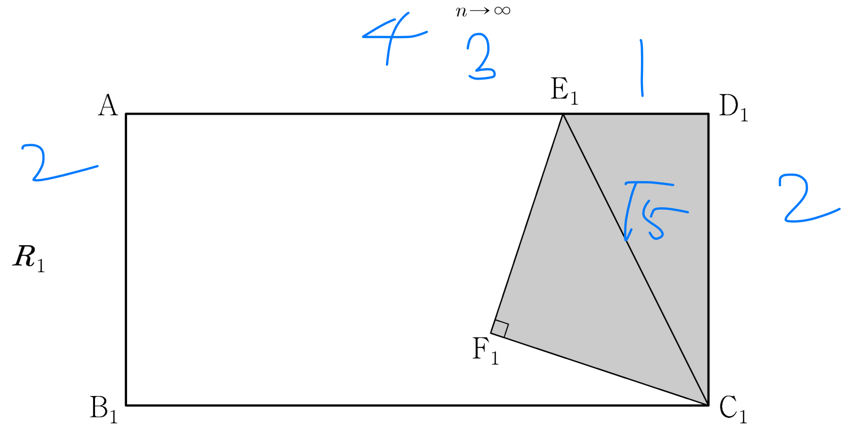
→ $a^2<\frac{1}{4}$

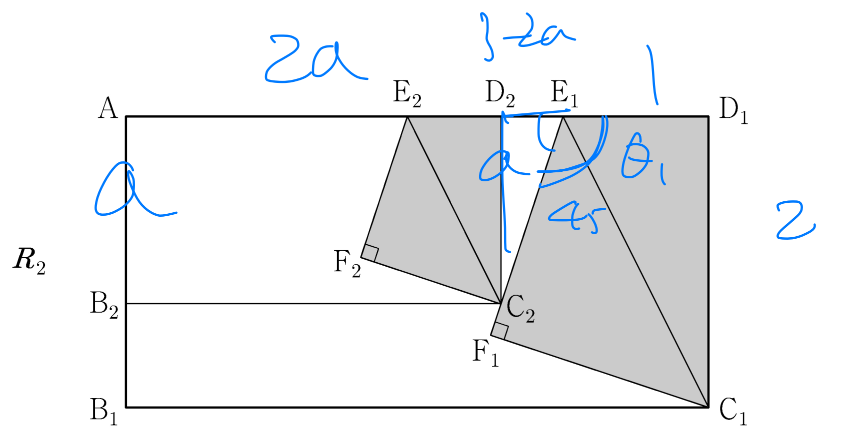
X

14. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB_1}}=2$, $\overline{\mathrm{AD_1}}=4$인 직사각형 $\mathrm{AB_1C_1D_1}$이 있다. 선분 $\mathrm{AD_1}$을 $3:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{E_1}$이라 하고, 직사각형 $\mathrm{AB_1C_1D_1}$의 내부에 점 $\mathrm{F_1}$을 $\overline{\mathrm{F_1E_1}}=\overline{\mathrm{F_1C_1}}$, $\angle\mathrm{E_1F_1C_1}=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고 삼각형 $\mathrm{E_1F_1C_1}$을 그린다. 사각형 $\mathrm{E_1F_1C_1D_1}$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 $\mathrm{AB_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$, 선분 $\mathrm{E_1F_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$, 선분 $\mathrm{AE_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{AB_2}}:\overline{\mathrm{AD_2}}=1:2$인 직사각형 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$에 삼각형 $\mathrm{E_2F_2C_2}$를 그리고 사각형 $\mathrm{E_2F_2C_2D_2}$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]





⋮ ⋮

① $\frac{441}{103}$ ② $\frac{441}{109}$ ③ $\frac{441}{115}$ ④ $\frac{441}{121}$ ⑤ $\frac{441}{127}$

S_1: $1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$

$\tan\theta_1=2$ → $\tan(\theta_1+45)$: $\frac{1+2}{1-2}=-3$

→ $\frac{a}{3-2a}=3$ → $a=\frac{9}{7}$

→ 2 → $\frac{9}{7}$ → $\frac{9}{14}$ → $\frac{81}{196}$ → $\frac{115}{196}$

→ $\frac{196}{115}\cdot\frac{9}{4}$

15. $x>0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=2-\frac{3}{x^2},\quad f(1)=5$$

이다. $x<0$에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-3)$의 값은? [4점]

(가) $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=f'(-x)$이다.
(나) $f(2)+g(-2)=9$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

① $g'(x) = 2 - \frac{3}{x^2} = f'(x) = f'(-x)$

② $f(x) = 2x + \frac{3}{x} + C \to 2x + \frac{3}{x}$

$\to f(1) = 5 = 5 + C \to C = 0$

③ $g(x) = 2x + \frac{3}{x} + C'$

$f(2) = 4 + \frac{3}{2}$

$g(-2) = 3 + \frac{1}{2} = -4 - \frac{3}{2} + C'$

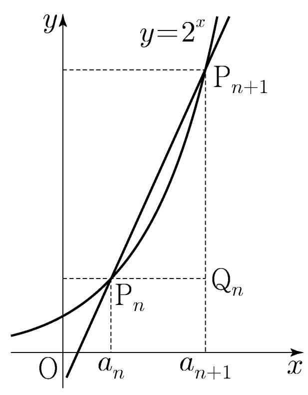
$\to C' = 9$

$\to g(-1) = -6 - 1 + 9 = 2$.

16. 상수 $k(k>1)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$이고 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}_n(a_n, 2^{a_n})$, $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1}, 2^{a_{n+1}})$을 지나는 직선의 기울기는 $k\times 2^{a_n}$이다.

점 P_n을 지나고 x축에 평행한 직선과 점 P_{n+1}을 지나고 y축에 평행한 직선이 만나는 점을 Q_n이라 하고 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이를 A_n이라 하자.



다음은 $a_1=1$, $\frac{A_3}{A_1}=16$일 때, A_n을 구하는 과정이다.

두 점 P_n, P_{n+1}을 지나는 직선의 기울기가 $k\times 2^{a_n}$이므로
$2^{a_{n+1}-a_n}=k(a_{n+1}-a_n)+1$
이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n$은 방정식 $2^x=kx+1$의 해이다.
$k>1$이므로 방정식 $2^x=kx+1$은 오직 하나의 양의 실근 d를 갖는다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=d$이고, 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열이다.
점 Q_n의 좌표가 $(a_{n+1}, 2^{a_n})$이므로
$A_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)(2^{a_{n+1}}-2^{a_n})$ $= \frac{1}{2} d 2^{a_n}(2^d - 1)$
이다. $\frac{A_3}{A_1}=16$이므로 d의 값은 (가) 2 이고, $= 2^{a_3 - a_1} = 2^{2d} = 16$, $d = 2$
수열 $\{a_n\}$의 일반항은
$a_n=$ (나) $2n-1$
이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $A_n=$ (다) 이다. $\to \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2^{2n-1}\cdot 3 = 2^{2n-1}\cdot 3$

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p+\frac{g(4)}{f(2)}$의 값은? [4점]

① 118 ② 121 ③ 124 ④ 127 ⑤ 130

$2 + \frac{3\cdot 2^7}{3}$

17. 좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

$\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}$

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하이면 점 P를 x축의 양의 방향으로 3만큼, 3 이상이면 점 P를 y축의 양의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

이 시행을 15번 반복하여 이동된 점 P와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은? [4점]

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

$\frac{1}{3}$: X $\frac{2}{3}$: 15 - X

~> P = (3X, 15 - X)

→ $X = \frac{|9X+60-4X|}{5} = X+12$

~> E(X) = E(X+12)

E(X) = $15 \cdot \frac{1}{3} = 5$

E(X) = 5+12

18. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}$$

라 하자. $(f\circ f)(1)=\frac{5}{4}$가 되도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

$f(1) = \frac{a}{4}$ ~> $f\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{5}{4}$.

① $\frac{a}{4} > 1$ or $\frac{a}{4} < -1$

→ $\frac{(a-2)\frac{a}{\cancel{4}}}{3} = \frac{5}{\cancel{4}}$ → $a^2-2a=15$.

$a = 5, -3$

→ $a=5$

② $-1 < \frac{a}{4} < 1$

→ $2X = \frac{5}{4}$ → $\frac{a}{2} = \frac{5}{4}$ ~> $a = \frac{5}{2}$

③ $\frac{a}{4} = 1$

→ $\frac{a-2}{4} = \frac{5}{4}$ → X

④ $\frac{a}{4} = -1$

→ $\frac{2-a+2}{4}$ ~> X

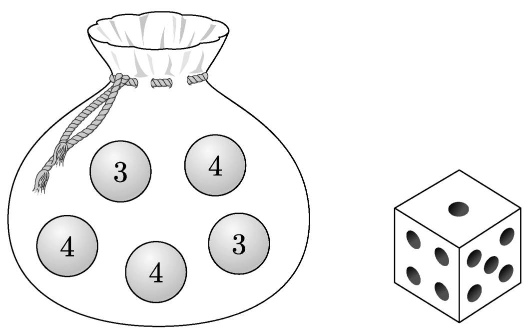
→ $5, \frac{5}{2}$

19. 숫자 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어
> 꺼낸 공에 적힌 수가 3이면 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합을 점수로 하고,
> 꺼낸 공에 적힌 수가 4이면 주사위를 4번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합을 점수로 한다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 10점일 확률은? [4점]

① $\frac{13}{180}$ ② $\frac{41}{540}$ ③ $\frac{43}{540}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{47}{540}$



3 → $\frac{2}{5}$

4 → $\frac{1}{5}$

3 : $\frac{2}{5} \times \frac{27}{6\cdot 6\cdot 6}$ $= \frac{1}{20}$

6 31 22 — 6, 3
5 41 32 — 6, 6
4 42 33 — 3, 3
27

4 : $\frac{3}{5} \times \frac{80}{6\,6\,6\,6}$ $= \frac{1}{27}$

6 211 → 12
5 311 221 — 12, 12
4 411 321 222 — 6, 24, 4
3 331 322 — 4, 6
80

→ $\frac{1}{20} + \frac{1}{27}$

20. 함수 $f(x) = \pi \sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0, 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

> 함수 $h(x) = f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
> $$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 2, \quad \int_{-1}^{1} x h(x)\,dx = -\frac{1}{32}$$
> 이다.

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

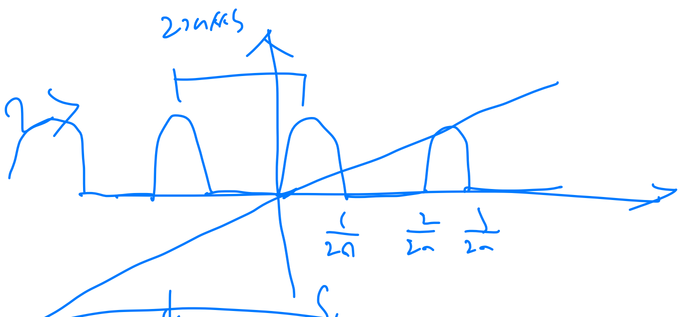
$f(nx) =$ 기함수 $s = \frac{1}{n}$ 넓이

$\frac{1}{n}$ ~→ 0~1 까지 n번 반복

$\pi \sin 2\pi n x$ → $[-\frac{1}{2n} \sim]$ → $\frac{1}{n}$

$\int_{-1}^{1} h = 2$ → $2 \times \frac{1}{n} \times n$ → $f>0$ 은 모두 $g(x)=1$, $f<0$ 은 모두 $g(x)=0$

$\int_{-1}^{1} xh$ 구상



$\Sigma -(x+\frac{1}{2n})f$ $\Sigma x\cdot f$

$\Sigma -\frac{f}{2n} = -\frac{1}{2n}\cdot$ 넓이

× n번 반복

→ $-\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{n}\cdot n = -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}$ → $n = 16$

21. 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
>
> (나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_8 - a_{15} = 63$일 때, $\dfrac{a_8}{a_1}$의 값은? [4점]

① 91　② 92　③ 93　④ 94　⑤ 95

$a_2 = a_2 \cdot a_1 + 1$

$\rightarrow a_2 = \dfrac{1}{1-a_1}$

$a_4 = a_2^2 + 1$

$a_8 = a_2(a_2^2+1)+1 = a_2^3 + a_2 + 1$

$a_3 = a_2\ a_1 - 2$

$a_7 = a_2^2 a_1 - 2a_2 - 2$

$a_{15} = a_2^3 a_1 - 2a_2^2 - 2a_2 - 2$

$\rightsquigarrow 63 = \underbrace{a_2^3(1-a_1)}_{a_2^2} + 2a_2^2 + 3a_2 + 3$

$\rightsquigarrow 60 = 3a_2^2 + 3a_2 \rightarrow a_2 = 4$ or -5

$\rightarrow 0 < a_1 < 1$

$\rightarrow a_2 = \dfrac{1}{1-a_1} > 0$

$\rightarrow a_2 = 4$

$\rightarrow a_1 = \dfrac{3}{4}$

$\dfrac{\cancel{64+4+1}\ 23}{\rightsquigarrow \frac{\cancel{3}}{4}} = a_2$

단답형

22. $\left(x + \dfrac{3}{x^2}\right)^5$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하시오. [3점]

4 1

15

5 · 3

23. 함수 $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 6}{x-1}$에 대하여 $f'(0)$의 값을 구하시오. [3점]

8

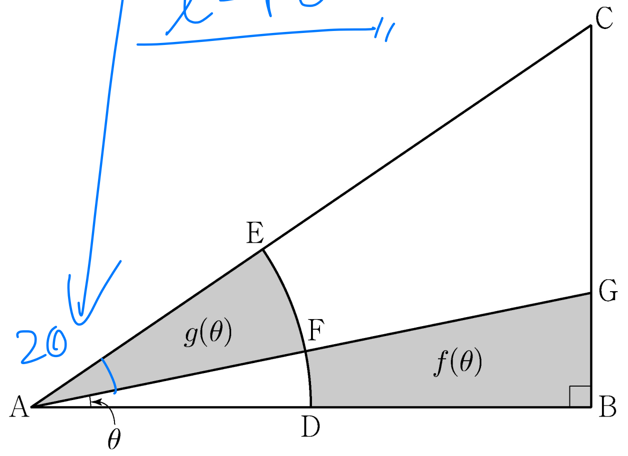
$x - 1 + \dfrac{-7}{x-1}$

$\rightarrow f' = 1 + 7(x-1)^{-2}$

24. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\angle \mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC 에서 중심이 A, 반지름의 길이가 1인 원이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자.
호 DE의 삼등분점 중 점 D에 가까운 점을 F라 하고, 직선 AF가 선분 BC와 만나는 점을 G라 하자.
$\angle \mathrm{BAG}=\theta$라 할 때, 삼각형 ABG의 내부와 부채꼴 ADF의 외부의 공통부분의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 AFE의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $40\times\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$ 의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) [3점]

60

$l=r\theta$



$f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2t-\pi\cdot\frac{\theta}{2\pi}=2t-\frac{\theta}{2}$

$g(\theta)=\pi\cdot\frac{2\theta}{2\pi}=\theta$

$\rightsquigarrow 40\cdot\frac{2t-\frac{\theta}{2}}{\theta}$ $\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$

25. 첫째항이 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}a_k=55$일 때, $\sum_{k=1}^{5}k(a_k-3)$의 값을 구하시오. [3점]

160

$\frac{5}{2}(3+a_5)=55 \rightarrow a_5=19$

$\rightarrow d=4$

$\rightarrow a_k=4k-1$

$\rightsquigarrow \sum_{1}^{5}4(k^2-k)$

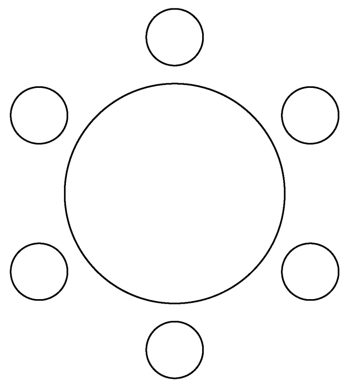
$\rightsquigarrow 4\left(\frac{5\cdot6\cdot11}{6}-\frac{5\cdot6}{2}\right)$

$\rightsquigarrow 4(55-15)$

26. 세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다.
이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

(가) A와 B는 이웃한다.
(나) B와 C는 이웃하지 않는다.

36



AB ○○○○

(가): $2\times4!$

(가)∩(나)^c = ABC ○○○

$2\times3!$

→ 가∩나 = $2\cdot4!-2\cdot3!$

27. $\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_2\sqrt{n}$ 의 값이 40 이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점]

13

$\frac{1}{2} + \log_2 n - \frac{1}{4}\log_2 n$

$= \frac{3\log_2 n + 2}{4} \leq 40$

$\rightsquigarrow \log_2 n \leq \frac{158}{3} = 52.xx$

1) $n =$ 자연수.

2) $\frac{3\log_2 n + 2}{4} =$ 자연수 $\rightarrow \log_2 n =$ 정수

1+2) $\log_2 n = \frac{b}{a}$ ($a, b =$ 정수)

$\rightarrow 2^{\frac{b}{a}} = n =$ 자연수 $\rightsquigarrow n = 2^{\text{자연수}}$.

$\rightarrow \log_2 n =$ 자연수.

4) $\frac{3x+2}{4} \leq 40$ 자연수

$2, 6, 10 \ldots 50$

$2+4\times 0$ $2+4\times 12$

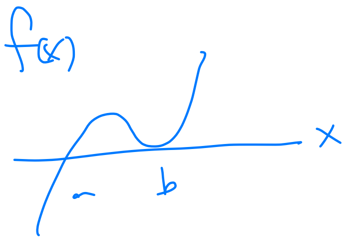
28. 두 상수 a, b $(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = (x-a)(x-b)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x) = x^3 + x + 1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x) = (f \circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

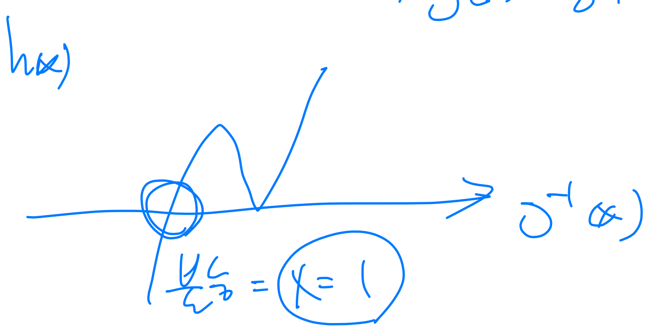
(가) 함수 $(x-1)\lvert h(x)\rvert$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (나) $h'(3) = 2$

72



(가): $h(x) \rightarrow g(x) =$ 증가함수

$\rightarrow g^{-1}(x) =$ 증가함수



$\rightsquigarrow g^{-1}(1) = a. \rightsquigarrow g(a) = 1$

$\rightarrow a = 0$.

(나): $h'(x) = f'(g^{-1}(x)) \cdot (g^{-1}(x))'$

$= \frac{f'(g^{-1}(x))}{g'(g^{-1}(x))}$

$\rightarrow h'(3) = \frac{f'(g^{-1}(3))}{g'(g^{-1}(3))}$ $g^{-1}(3) = k$. $\rightarrow k^3+k+1=3$ $\rightarrow k=1$

$\rightarrow \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{(1-b)^2 + 2(1-b)}{4} = 2$ $x(x-b)^2$ $\rightarrow (x-b)^2 + 2x(x-b)$

$\rightarrow (1-b) = 2, -4 \rightarrow b = 5$ ($b > a$)

$\rightarrow f(x) = x(x-5)^2$

29. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은색 모자 6개와 흰색 모자 6개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 모자끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

> (가) 각 학생은 1개 이상의 모자를 받는다.
> (나) 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4 이상이다.
> (다) 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생은 A를 포함하여 2명뿐이다.

검 > 흰

201

① A B C D
검 5 1 0 0
흰 '0' '1' '1'

$\to \underbrace{3}_{검_B} \times \underbrace{1}_{(다)} \times {}_3H_4 = 45$

② A B C D
4 1 1 0
(0~3) '0' '1' '1'

$\to \underbrace{3}_{검_0} \times \underbrace{2}_{다} \times ({}_3H_4 - \underbrace{1}_{흰_A=4})$
('다'조건 위배)

$\to 6 \times 14 = 84$

③ A B C D
4 2 0 0
(0~1) '0 or 1' '1' '1'

$\to \underbrace{3}_{B} \times \underbrace{1}_{다} \times (\underbrace{{}_3H_4 - 1}_{B=0} + \underbrace{{}_3H_3}_{B=1})$

$\to 3 \times (14 + 10) = 72$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x) = f(\sin^2 \pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$g'(x)$: + → −

> (가) $0 < x < 1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2) = a + b\sqrt{2}$일 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

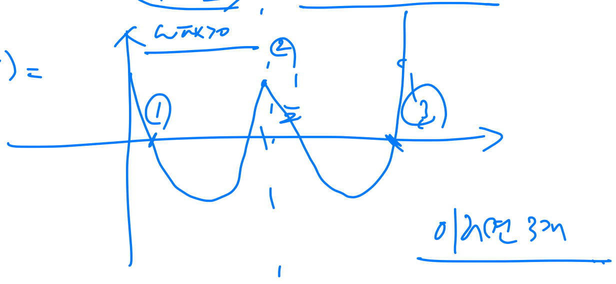
29

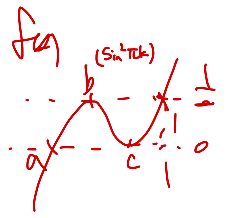
$g'(x) = f'(\sin^2 \pi x) \cdot 2 \cdot \sin \pi x \cdot \cos \pi x \cdot \pi$

0 → 1 → 0   (+)   (+) → (−)

$x = \frac{1}{2}$ $\cos \pi x < 0$

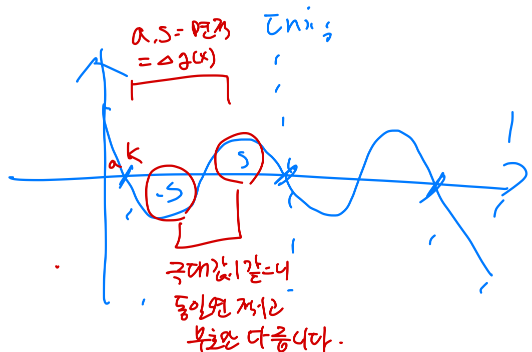
$f'(x) =$ → $f'(\sin^2 \pi x) =$



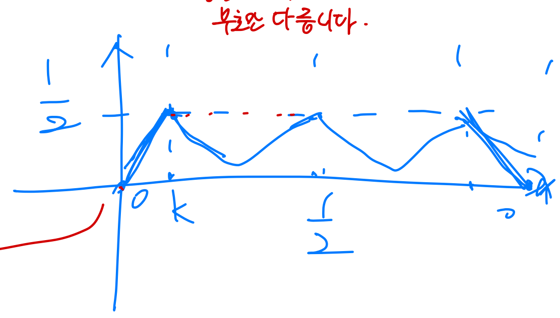


$h(x) = (x-a)(x-c)$
$\to b = \frac{2a+c}{3}$
$\to h(b) = 4\left(\frac{a-c}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}$
$\to \frac{a-c}{3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - a \cdot c = \frac{3}{2\sqrt{2}}$
$\to 2a = 2c - 3$
$\to b = c - 1 < 0 \to$ 모순
$\to$ 극솟 $\neq 0 \to f(0) = 0$

$\to g'(x) =$



$\to g(x)$



$\to$ ① $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = f(1)$ ③ $g(k) = \frac{1}{2}$, $g'(k) = 0$

② $g(0) = g(1) = 0 = f(0)$

$\to f(x) = (x-1)(x - \sin^2 \pi k)^2 + \frac{1}{2}$

$\to f(0) = -(\sin^2 \pi k)^2 + \frac{1}{2} = 0 \to (\sin^2 \pi k)^2 = \frac{1}{2} \to \sin^2 \pi k = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\to f(x) = (x-1)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$

$\to f(2) = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} = 5 - 2\sqrt{2}$

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.