EBS FINAL 가형 선별 43제
by 파급효과

수학1 수능특강 p105 예제 2번

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$을 만족시킨다. $a_1<a_2$이고 $a_6=72$일 때, a_4의 값을 구하시오.

문제 Comment
$a_1=a$, $a_2=b$라고 두면 $a_6=5b+3a$가 나올 것이다. 'a, b가 각각 자연수임'을 이용하면 a, b를 특정하는 것이 가능할 것이다.

수학1 수능특강 p110 1번

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{2n} = a_n \\ a_{2n+1} = a_n + 1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. 100 이하의 자연수 k에 대하여 $a_k = 2$인 모든 자연수 k의 개수는?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

문제 Comment

n에 자연수를 대입하며 귀납적으로 규칙성을 찾는다. 약간의 정수론을 생각하면 편하다.

먼저, $a_k = 2$가 만족하는 k로 $k = 2^m + 1$을 찾아낼 수 있고,

이에 더해 $a_{2n} = a_n$을 이용하면 $a_k = 2$를 만족하는 모든 k를 찾아낼 수 있다.

수학1 수능특강 p110 2번

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 5$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3 - \dfrac{5}{a_n} & (a_n\text{이 정수인 경우}) \\ 2a_n - 3 & (a_n\text{이 정수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

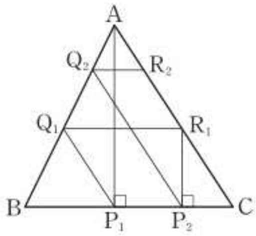
를 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{50} a_n$의 값을 구하시오.

문제 Comment

끈기를 갖고 n에 자연수를 대입해가며 귀납적으로 규칙성을 찾자. 주기성이 보일 것이다.

수학1 수능특강 p110 3번

그림과 같이 예각삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 $\mathrm{P_1}$이라 할 때, $\overline{\mathrm{AP_1}}=1$이고, $\mathrm{P_1}$은 선분 BC를 3:4로 내분하는 점이다.



자연수 n에 대하여 세 점 Q_n, R_n, P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 선분 BC위의 점 P_n을 지나고 직선 AC에 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 Q_n이라 한다.

(나) 선분 AB위의 점 Q_n을 지나고 직선 BC에 평행한 직선이 선분 AC와 만나는 점을 R_n이라 한다.

(다) 점 R_n에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 P_{n+1}이라 한다.

선분 $\mathrm{R}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 길이를 l_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여

$$l_{n+1}=pl_n+q$$

가 성립한다. l_1+p+2q의 값은?

① $\frac{10}{7}$ ② $\frac{11}{7}$ ③ $\frac{12}{7}$ ④ $\frac{13}{7}$ ⑤ 2

문제 Comment

닮음비를 열심히 활용하고 l_1, l_2, $\cdots$ 을 일일이 구하는 것보다

주어진 그림에서 $\overline{\mathrm{R_1P_2}}=l_n$, $\overline{\mathrm{R_2P_3}}=l_{n+1}$이라 가정하고 관계식을 찾는 것이 편하다.

확률과 통계 수능특강 p12 1번

그림과 같이 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8개의 공이 있다.

이 8개의 공을 일정한 간격을 두고 원형으로 나열할 때, 서로 마주 보는 두 공에 적힌 수가 모두 서로소인 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① 860 ② 864 ③ 868 ④ 872 ⑤ 876

문제 Comment
1부터 8까지의 자연수 중 6과 서로소인 자연수는 1, 5, 7 밖에 없다.
6을 기준으로 case 분류를 하면 보다 효율적인 문제 풀이가 가능하다.

확률과 통계 수능특강 p12 4번

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$A \cup B = U,\ n(A \cap B) = 2$$

를 만족시키는 두 집합 A, B의 모든 순서쌍 (A, B)의 개수는?

① 1792 ② 1820 ③ 1848 ④ 1876 ⑤ 1904

문제 Comment

집합 관련 확통 문제가 나오면 벤 다이어그램을 그리고 경계선으로 나누어지는 각 영역을 labeling하자.

이후 함수 문제를 풀 듯이 풀면 된다.

확률과 통계 수능특강 p13 7번

좌표평면 위의 점 P는 한 번 이동할 때마다 다음 네 가지 중 한 가지 방법으로 이동한다.

(가) x축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.
(나) x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한다.
(다) y축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.
(라) y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한다.

원점 O에서 출발한 점 P가 5번 이동한 후에 처음으로 점 $(2, 1)$에 도착하는 경우의 수는?

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

문제 Comment

5번 이동하여 x축 방향으로 2, y축 방향으로 1 이동하려면

$\{(가), (나), (다), (라)\}$ 구성으로 $\{3, 1, 1, 0\}$, $\{1, 0, 2, 1\}$만 가능하다.

확률과 통계 수능특강 p26 1번

흰 공 9개, 검은 공 9개, 파란 공 9개 중에서 9개의 공을 택하여 세 상자 A, B, C에 각각 3개씩 넣을 때, 상자 A와 상자 B에 넣은 파란 공의 총 개수가 4이고, 상자 C에 넣은 흰 공의 개수가 상자 A에 넣은 파란 공의 개수와 같은 경우의 수는? (단, 같은 색의 공은 구분하지 않는다.)

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

문제 Comment

올해 29번 확통 트렌드와 유사한 문제이다. 파란색 공을 기준으로 하면 보다 쉬운 문제 풀이가 가능하다.

확률과 통계 수능특강 p26 2번

같은 종류의 빵 7개와 같은 종류의 음료수 3개를 세 사람에게 남김없이 나누어 줄 때, 아무것도 받지 못하는 사람이 생기지 않도록 나누어 주는 경우의 수는?

① 227 ② 247 ③ 267 ④ 287 ⑤ 307

문제 Comment
올해 29번 확통 트렌드와 유사한 문제이다. 음료수 개수가 적으므로 음료수를 기준으로 하면 보다 쉬운 문제 풀이가 가능하다.

확률과 통계 수능특강 p26 3번

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f 중 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는?

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \geq f(x_2)$이다. (나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 4 이하이다.

① 121　② 122　③ 123　④ 124　⑤ 125

문제 Comment

부분 여사건을 이용하면 쉽다. $(나)^C$는 '함수 f의 치역의 원소의 개수는 5이다.'이기 때문이다.

부분 여사건을 이용한다는 것은 $(가)\cap(나)$를 구하기 위해 $(가)-\{(가)\cap(나)^C\}$를 이용하는 것이 편하다는 의미이다. 관련하여 대표적인 기출은 17학년도 가형 27번, 20학년도 수능 나형 29번이 있다. 이를 좀 더 학습하고 싶다면 https://orbi.kr/00028063419 의 pdf 쪽수 기준으로 10~23쪽을 참고하자.

확률과 통계 수능특강 p28 3번

3개의 문자 x, y, z에서 중복을 허락하여 10개를 택해 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수는?

(가) x와 y는 한 번만 서로 이웃한다.
(나) y와 z는 한 번만 서로 이웃한다.
(다) z와 x는 한 번만 서로 이웃한다.

① 500 ② 504 ③ 508 ④ 512 ⑤ 516

문제 Comment
x가 배치되는 구역을 X, y가 배치되는 구역을 Y, z가 배치되는 구역을 Z라 하자.
조건을 만족하기 위한 구역 배치로는 $XYZX$, $XZYX$, $YZXY$, $YXZY$, $ZXYZ$, $ZYXZ$가 있다.
각 구역에 해당 문자를 적어도 한 개를 나열해야 하고 각 구역에 나열한 문자의 개수의 총합인 10이다.

확률과 통계 수능특강 p40 6번

집합 $U=\{1, 2, 3\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합 중에서 임의로 서로 다른 두 부분집합 A, B를 택할 때, $A \subset B$일 확률은?

① $\frac{1}{7}$　　② $\frac{2}{7}$　　③ $\frac{3}{7}$　　④ $\frac{4}{7}$　　⑤ $\frac{5}{7}$

문제 Comment
21학년도 9월 평가원 가형 19번이 연계된 문제이다. 집합 관련 확통 문제가 나오면 벤 다이어그램을 그리고 경계선으로 나누어지는 각 영역을 labeling하자.

확률과 통계 수능특강 p41 1번

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$를 정의역과 공역으로 하고 다음 조건을 만족시키는 함수 f 중에서 임의로 하나를 택할 때, 택한 함수 f 의 치역의 원소의 개수가 2일 확률은?

$f(1)+f(2)+f(3)=7$

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{5}{12}$　⑤ $\frac{1}{2}$

문제 Comment
자연수 분할을 꼼꼼히 한 후에 조건에 맞는 함수 개수를 찾자.

확률과 통계 수능특강 p41 3번

서로 다른 세 주머니에는 숫자 $1, 2, 3, 4, 5$가 하나씩 적힌 5개의 공이 각각 들어 있다. 갑이 서로 다른 세 주머니에서 각각 공을 한 개씩 임의로 꺼낸 후, 을도 서로 다른 세 주머니에서 각각 공을 한 개씩 임의로 꺼낸다. 갑이 꺼낸 3개의 공에 적힌 숫자를 크기순으로 a_1, a_2, a_3 $(a_1 \le a_2 \le a_3)$이라 하고 을이 꺼낸 3개의 공에 적힌 숫자를 크기순으로 b_1, b_2, b_3 $(b_1 \le b_2 \le b_3)$이라 할 때, $a_i \ne b_i$인 i $(i = 1, 2, 3)$이 존재할 확률은? (단, 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{193}{200}$ ② $\frac{97}{100}$ ③ $\frac{39}{40}$ ④ $\frac{49}{50}$ ⑤ $\frac{197}{200}$

문제 Comment
여사건을 이용하면 편리하다.

확률과 통계 수능특강 p54 5번

좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 2 이하이면 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, 나온 눈의 수가 3 이상이면 점 P를 y축의 방향으로 1만큼 이동시키기로 한다. 한 개의 주사위를 6번 던져서 차례대로 점 P를 이동시킬 때, 점 P가 점 $(1, 2)$를 지나서 점 $(3, 3)$으로 이동될 확률은?

① $\frac{4}{81}$ ② $\frac{2}{27}$ ③ $\frac{8}{81}$ ④ $\frac{10}{81}$ ⑤ $\frac{4}{27}$

문제 Comment
독립시행을 얼마나 자유자재로 사용할 수 있는가를 물어보는 문제이다. 관련 기출로는 20학년도 수능 가형 20번이 있다. 잘 안 풀린다면 https://orbi.kr/00028507131 를 참고해보자.

확률과 통계 수능특강 p55 2번

세 개의 주사위를 동시에 한 번 던질 때, 나온 모든 눈의 수의 합을 4로 나눈 나머지가 2일 확률은?

① $\frac{13}{54}$　② $\frac{53}{216}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{55}{216}$　⑤ $\frac{7}{27}$

문제 Comment
세 개의 주사위를 던져 나온 숫자를 각각 4로 나눈 나머지를 각각 a, b, c라고 하자.
세 수의 합을 4로 나눈 나머지가 2가 되기 위한 (a, b, c)의 후보는 $(2, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(3, 3, 0)$, $(3, 2, 1)$, $(2, 2, 2)$이다.

확률과 통계 수능특강 p71 1번

이산확률변수 X가 갖는 값은 $1, 2, 3, 4, 5$이고 이산확률변수 Y가 갖는 값은 $1, 3, 5, 7, 9$이다. 상수 a에 대하여 $P(Y=2i-1)=a\times P(X=i)+a \quad (i=1, 2, 3, 4, 5)$이고 $E(X)=\frac{10}{3}$일 때, $E(9Y+5)$의 값은?

① 45 ② 47 ③ 49 ④ 51 ⑤ 53

문제 Comment

$E(Y)=\sum_{i=1}^{5}(2i-1)P(Y=2i-1)$를 이용하자.

$E(Y)$, $V(Y)$를 정의대로 $\sum$ 식으로 표현할 줄 알아야 한다.

확률과 통계 수능특강 p85 2번

m, σ가 자연수일 때, 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X와 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르는 확률변수 Z가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $P(32 \le X \le 35) > P(35 \le X \le 38)$
(나) $P(32 \le X \le 35) > P(29 \le X \le 32)$
(다) $P(0 \le Z \le 1) < P(33 \le X \le 35) < P(0 \le Z \le 2)$

$P(30 \le X \le 34)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.4	0.1554
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.1554 ② 0.1915 ③ 0.3413 ④ 0.4332 ⑤ 0.4772

문제 Comment
정규분포곡선의 대칭성을 활용하기 위해 그래프를 그려보자.

확률과 통계 수능특강 p97 1번

모집단의 확률변수 X가 갖는 값은 $2,\ 4,\ a$이고, 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$가 갖는 값은 $2,\ 3,\ 4,\ 5,\ b,\ a$이다. $P(\overline{X}=2)=\dfrac{1}{64}$, $P(\overline{X}=3)=\dfrac{5}{32}$일 때, 두 상수 $a,\ b$에 대하여 $ab\times P(X=4)$의 값은? (단, $a>b>5$)

① 6 ② 12 ③ 18 ④ 24 ⑤ 30

문제 Comment

$P(30\leq\overline{X}\leq 34)$와 같이 연속확률변수에서만 $\overline{X}$를 보다가 $P(\overline{X}=2)$와 같이 이산확률변수에서 $\overline{X}$를 보니 어떻게 문제를 풀어야 할지 모르겠는가? 표본평균 $\overline{X}$의 의미를 제대로 파악 못 한 것이다. https://orbi.kr/00031284810/ 를 보면 단시간에 표본평균 $\overline{X}$의 의미를 깨닫고 관련 문제를 암기로 풀 필요가 없을 것이다.

미적분 수능특강 p14 2번

자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $P(n,\ n^3)$과 원점 O를 지나는 원 C가 있다. 곡선 $y=x^3$ 위의 점 P에서의 접선 l과 원 C 위의 점 P에서의 접선 m이 서로 수직일 때, 원 C의 중심의 x좌표를 a_n 이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

문제 Comment

$l \perp m$이므로 직선 l 위에 원의 중심이 있음을 알 수 있다. 따라서 직선 l과 $\overline{\mathrm{OP}}$와 수직이면서 $\overline{\mathrm{OP}}$의 중점 M을 지나는 지석 n과의 교점이 원의 중심이다.

미적분 수능특강 p14 3번

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+2x+1}{x^{2n}+1}$과 일반항이 $a_n=\begin{cases}p & (n=1)\\ qn+r & (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)\end{cases}$ 인 수열 $\{a_n\}$이

$$\lim_{x\to 1}[f(x)\{f(x-n)+a_n\}]=f(1)\{f(1-n)+a_n\}$$

을 만족시킬 때, $p+q+r$의 값은? (단, p, q, r는 상수이다.)

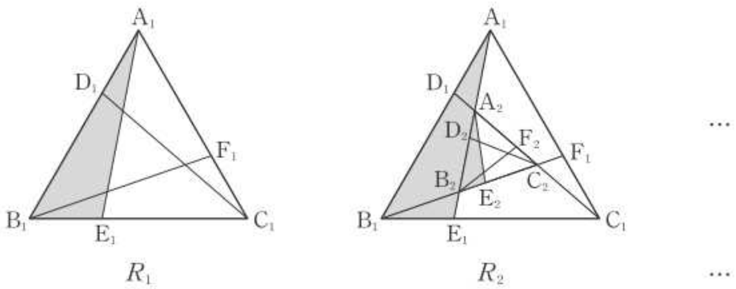
① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

문제 Comment

x의 범위에 따라 $f(x)$를 구해보자. 그 후 n에 자연수를 대입하며 문제를 해결하자.

미적분 수능특강 p24 8번

그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 세 변 A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 을 1 : 2로 내분하는 점을 각각 D_1, E_1, F_1 이라 하고, 삼각형 $A_1B_1E_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 두 선분 A_1E_1, C_1D_1의 교점을 A_2, 두 선분 A_1E_1, B_1F_1의 교점을 B_2, 두 선분 B_1F_1, C_1D_1의 교점을 C_2라 하고, 삼각형 $A_2B_2C_2$에 대하여 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



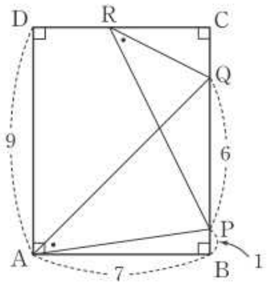
① $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{19\sqrt{3}}{24}$ ③ $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ④ $\frac{7\sqrt{3}}{8}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{12}$

문제 Comment

$\overline{B_nC_n}=3a$라 하면 코사인법칙에 의하여 $\overline{B_nF_n}=\sqrt{7}a$이다. 두 닮은 삼각형 $B_nC_nF_n$, $B_nB_{n+1}E_n$에서 $a:\overline{E_nB_{n+1}}=\sqrt{7}a:a$, $3a:\overline{B_nB_{n+1}}=\sqrt{7}a:a$를 뽑아내면 가볍게 문제가 풀린다.

미적분 수능특강 p51 2번

그림과 같이 $\overline{AB}=7$, $\overline{AD}=9$인 직사각형 $ABCD$가 있다. 선분 BC 위의 두 점 P, Q와 선분 CD 위의 한 점 R가 다음 조건을 만족시킬 때, $\overline{AR}^2$의 값을 구하시오.



(가) $\overline{BP}=1$, $\overline{PQ}=6$ (나) $\angle PAQ = \angle PRQ$

문제 Comment

$\overline{RC}=k$라 두고, 두 직각삼각형 QAB, PRC에서 tan 덧셈정리를 이용하면 쉽게 문제가 풀린다.

미적분 수능특강 p81 1번

$x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(t,\ f(t))$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 점 P 이외의 점에서는 만나지 않을 때, 실수 t의 최댓값은?

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

문제 Comment
$y=f(x)$의 그래프 개형은 미분없이도 쉽게 그릴 수 있다. 미분없이 그래프 개형을 그리는 법은 https://orbi.kr/00030484846 에서 자세히 소개되어 있다. 점 P에서의 접선이 변곡접선임을 쉽게 알 수 있을 것이다.

미적분 수능특강 p81 3번

양의 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=2(\ln x)^2-6\ln x$, $y=kx^2-3$의 서로 다른 교점의 개수가 2일 때, k의 값은? $\left(\text{단, } \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0\right)$

① $\frac{3}{e^6}$ ② $\frac{6}{e^6}$ ③ $\frac{3}{e^4}$ ④ $\frac{6}{e^4}$ ⑤ $\frac{3}{e^2}$

문제 Comment

$y=2\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2-\frac{6\ln x}{x^2}+\frac{3}{x^2}$, $y=k$의 그래프 개형은 미분없이도 쉽게 그릴 수 있다. 미분없이 그래프 개형을 그리는 법은 https://orbi.kr/00030484846 에서 자세히 소개되어 있다.

미적분 수능특강 p81 4번

자연수 n에 대하여 곡선 $y=n(1-x)^n\ (0<x<1)$위의 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하자. 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값을 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

① $\frac{1}{4e}$ ② $\frac{1}{2e}$ ③ $\frac{1}{e}$ ④ 1 ⑤ e

문제 Comment

e의 정의를 잊지 말자. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$이다.

미적분 수능특강 p82 3번

함수 $f(x)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-|x|}\sin x$와 양의 실수 k에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수를 $g(k)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $f'(0)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

ㄴ. $g(e^{-\pi})=2$

ㄷ. $e^{-\frac{5}{2}\pi}\le k\le 2$에서 함수 $g(k)$가 불연속인 k의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 Comment

$f(x)$는 기함수이다. $f(x)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-|x|}\sin x$의 $e^{\frac{\pi}{4}-|x|}$ 부분으로 인해 $x\to\infty$ 또는 $x\to-\infty$으로 갈수록 $f(x)$의 진폭은 작아진다.

미적분 수능특강 p94 1번

$x>0$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, n은 자연수이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x}dx = \ln 2$

ㄴ. $x-\frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$

ㄷ. $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x+\ln(x+1)}dx > \frac{1}{2}\ln 2$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 Comment
ㄱㄴㄷ flow를 잘 따라가자.

미적분 수능특강 p94 2번

양수 a에 대하여 함수 $f(x)=(ax-2)e^{a(-x+2)}$은 $x=b$에서 최댓값을 갖는다. 함수 $g(a)=\int_0^b |f(x)|dx$가 $a=k$에서 최솟값을 가질 때, k의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{6}$

문제 Comment

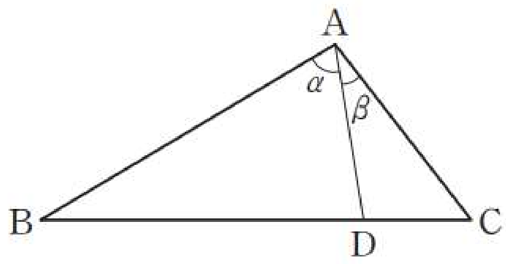
변수, 상수 구분을 잘하자. $f(x)=(ax-2)e^{a(-x+2)}$에서 a는 상수이지만 $g(a)=\int_0^b |f(x)|dx$에서 a는 상수가 아닌 변수이다.

수능완성 가형 p32 34번

그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 BC를 $3:1$로 내분하는 점을 D라 하고,

$\angle DAB=\alpha, \angle CAD=\beta$라 하자. $\sin\beta=\frac{8}{15}\sin\alpha$일 때, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



문제 Comment

중등 기하로 충분히 해결할 수 있는 문항이다. 삼각형의 넓이공식인 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$를 활용하자. 두 삼각형 ABD, ACD의 높이가 같으므로 넓이 비는 $\overline{BD}:\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{AD}\sin\alpha:\frac{1}{2}\overline{AC}\,\overline{AD}\sin\beta$ 임을 활용하자.

수능완성 가형 p93 16번

실수 전체의 집합에서 미분가능하고 도함수 $f'(x)$가 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{-1}^{1} xf(2x)dx = 4, \int_{-2}^{2} x^2 f'(x)dx = 40$$

일 때, $\int_{-1}^{1} f'(2x)dx$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

문제 Comment

$\int_{-1}^{1} xf(2x)dx = 4, \int_{-2}^{2} x^2 f'(x)dx = 40$에서 각각 부분적분을 이용하여 $\int_{-1}^{1} f'(2x)dx$를 유도하자.

수능완성 가형 p93 17번

열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x) = \tan x$의 역함수를 $g(x)$라 하자.
$\int_0^1 x\cos^2 g(x)dx$의 값은?

① $\frac{1}{2}\ln 2$ ② $\ln 2$ ③ $\frac{3}{2}\ln 2$ ④ $2\ln 2$ ⑤ $\frac{5}{2}\ln 2$

문제 Comment
$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$를 활용하자. $\tan(g(x)) = x$에서 $1+\tan^2(g(x)) = \sec^2(g(x)) = 1+x^2$이므로
$x\cos^2(g(x)) = \frac{x}{\sec^2(g(x))} = \frac{x}{1+x^2}$로 해석이 가능하다. $\frac{x}{1+x^2}$의 적분은 치환적분을 이용해도 좋고, 기출 파급 미적분 (하) chapter 11의 내용을 충분히 익혔다면 $\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)' = \frac{x}{1+x^2}$인 것이 눈에 익었을테니 이를 이용해도 좋다.
기출 파급 미적분 (하) chapter 11은 https://orbi.kr/00030484846 에도 공개되어 있다.

수능완성 가형 p94 21번

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}dt$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$

ㄴ. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}dt$

ㄷ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 Comment

기출 파급 미적분 (하) chapter 11에 나오는 대칭 적분 꼴이다. 관련 기출로는 16년 3월 교육청 가형 28번이 있다. 기출 파급 미적분 (하) chapter 11은 https://orbi.kr/00030484846 에도 공개되어 있다.

수능완성 가형 p97 29번

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=(x-1)e^x$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $\int_0^{e^2} \frac{x}{g(x)e^{g(x)}}dx$의 값은?(단, 방정식 $(x-1)e^x=e^2$을 만족시키는 x의 값은 2뿐이다.)

① 1 ② $\frac{e}{2}$ ③ e ④ $\frac{e^2}{2}$ ⑤ e^2

문제 Comment

전형적인 역함수의 부분적분 문제이다. $\int_0^{e^2} \frac{x}{g(x)e^{g(x)}}dx$에서 $x=f(t)$로 치환하자. 이 문제는 특이하게 $f(x)=(x-1)e^x$의 우변 식을 직접적으로 활용한다.

수능완성 가형 p111 29번

집합 S=$\{x|1 \le x \le 20, x$는 정수$\}$와 집합 S의 부분집합 A가 있다. 부분집합 A가 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, 부분집합 A의 개수를 a_k라 하자.

(가) $n(A)=3$
(나) 집합 A의 임의의 두 원소 x, y에 대하여 $\|x-y\| \ge k$가 성립한다.

$\sum_{k=1}^{9} \frac{a_k}{10-k}$의 값을 구하시오.

문제 Comment

귀납적으로 규칙성을 찾아도 좋지만 a_k로 바로 일반화시키는 연습을 해두면 어려운 경우의 수 문제를 다룰 때 용이하다.

수능완성 가형 p112 33번

두 집합 A={1, 2, 3, 4, 5, 6}, B={0, 1, 2, 3}에 대하여 함수 $f : A \to B$가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 f의 개수는?

(가) 집합 A의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.
(나) $f(x) = 2$인 x가 집합 A에 적어도 2개 있다.

① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

문제 Comment
해설지의 풀이는 발상적인 부분이 어느정도 있으므로 부분 여사건을 활용하자. 조건 (가)를 만족시키는 사건의 경우의 수를 구하고, 조건 (가)를 만족시키면서 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수를 구하여 두 경우의 수의 차를 구하자.

수능완성 가형 실전편 1회 19번

모든 항이 음이 아닌 정수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 0또는 짝수인 경우}) \\ \frac{1}{2}(a_n-1) & (a_n\text{이 홀수인 경우})\end{cases}$ 이다.

(나) 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n \neq 0$을 만족시키는 항의 개수는 5이다.

$\sum_{k=1}^{10} a_k = 47$일 때, a_1+a_5의 값은?

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

문제 Comment

$a_n=0$이면, $a_{n+1}=0$인 것을 알면 조건 (나)가 의미하는 바가 무엇인지 깨달을 수 있을 것이다.
그 후에 귀납적으로 정의된 수열을 나열하여 문항을 해결하자.

수능완성 가형 실전편 1회 21번

정의역이 $\{x \mid 0 \leq x \leq 4\pi\}$인 함수 $f(x)=x+\sin x-1$에 대하여 함수 $g(x)$를
$g(x)=\int_{f(x)}^{f(x)+2}\{(t-x)^4+(t-x)^2\}dt$라 할 때, 함수 $g(x)$의 최솟값을 m이라 하자.
$0 \leq x \leq 4\pi$일 때, x에 대한 방정식 $g(x)=m$의 서로 다른 실근의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

문제 Comment
해설의 다른 풀이를 주목하자. 수식으로 해결하지 말고, 그래프와 연결하여 유기적으로 사고하자.
그래프를 발상하는 것은 선택적 절차가 아니라 필수적 절차임을 다시금 명심하자.

수능완성 가형 실전편 2회 21번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)\times e^{f(x)-|f(x)|}$이라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)+1}{x}=0$

(나) 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값을 작은 값부터 크기순으로 모두 나열한 것을 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{n}x_k=5$이다.

$f(-1)\times f(1)$의 값은?

① $\frac{33}{4}$ ② 9 ③ $\frac{39}{4}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{45}{4}$

문제 Comment

조건 (나)의 표현이 익숙했어야 한다. 18학년도 수능 30번에 사용된 표현이다. $f(x)-|f(x)|$를 x의 값의 범위가 아닌 $f(x)$의 값의 범위로 나눠서 표현해보자.

수능완성 가형 실전편 2회 30번

함수 $f(x)=2e^{2x}+3e^{-x}-4$와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $g(x)$가 있다. 실수 k에 대하여 함수 $h(x)$를 $h(x)=|g(x+k)-f(x)|$라 할 때, $h(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=0$에서 최솟값 $g(k)$를 갖는다.

(나) 닫힌구간 $[-1,1]$에서 최댓값 $\dfrac{2e^3-e+3}{e}$를 갖는다.

$g'\left(k-\dfrac{2}{3}\right)$의 값을 구하시오.

문제 Comment
추억의 18학년도 9월 평가원 가형 30번이다. 기출 변형이 티나지만 넣어봤다.

수능완성 가형 실전편 3회 20번

함수 $f(x)=x\ln x$와 실수 t $\left(-\frac{1}{e}<t<0\right)$에 대하여 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 두 실근을 각각 $g(t)$, $h(t)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $A(g(t), f(g(t)))$, $B(h(t), f(h(t)))$에서의 접선을 각각 l_1, l_2라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, $g(t)<h(t)$, $\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0$)

< 보 기 >

ㄱ. $g(t)<\frac{1}{e}<h(t)$

ㄴ. $f'(g(t)) \times f'(h(t))<0$

ㄷ. 두 직선 l_1, l_2의 교점의 x좌표는 $-\frac{g(t)\times h(t)}{t}$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 Comment
함수 $x\ln x$의 그래프 개형을 그려서 직선과 교점이 두 개가 생기는 구간을 찾아보자. 다른 함수로의 확장 가능성이 뛰어난 문항으로 판단하여 선별하였다.

수능완성 가형 실전편 3회 21번

두 양의 상수 a, b와 함수 $f(x)=a(x+b)\sin x\ (x \geq 0)$에 대하여 두 함수 $F(x)$, $G(x)$를
$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt\ (x \geq 0)$, $G(x)=\int_0^x |f(t)|\,dt\ (x \geq 0)$이라 하면 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[3\pi, 4\pi]$에서 $G(x)=-F(x)+24$
(나) 닫힌구간 $[6\pi, 7\pi]$에서 $G(x)=F(x)+60$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값은?

① 1　　② $\frac{3}{2}$　　③ 2　　④ $\frac{5}{2}$　　⑤ 3

문제 Comment
17학년도 수능 가형 21번 문항과 같이 풀어보자. 절댓값 함수의 정적분과 함수의 정적분을 비교하는 문항은 이미 기출에 나온 소재이므로, 발전 가능성이 무궁무진한 소재이다.

수능완성 가형 실전편 3회 30번

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) > 0$이다.
(나) 함수 $f(x)$는 $x=p$, $x=q$, $x=r$ $(p<q<r)$에서 각각 극소, 극대, 극소이며 $f(p)=f(r)$이다.
(다) $f(x)=f(q)$를 만족시키는 q가 아닌 x의 값은 α, β $(\alpha<\beta)$이다.

모든 실수 t에 대하여 함수 $h(t)$를 다음과 같이 정의하자.

$h(t)$는 닫힌구간 $[t, s]$에서 함수 $\dfrac{1}{f(x)}$의 최댓값과 최솟값의 차를 $g(s)$라 할 때, 구간 (t, ∞)에서 함수 $g(s)$의 미분가능하지 않은 점의 개수이다.

함수 $h(t)$가 $t=a$, $t=1$, $t=b$, $t=5$ $(a<1<b<5)$에서만 불연속일 때, $(b-a)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

문제 Comment

첫 번째 박스에서 $f(x)$의 그래프를 쉽게 유추할 수 있고 이를 바탕으로 $h(t)$, $g(s)$의 그래프 개형을도 그려낼 수 있다.

페이지	답	페이지	답	페이지	답	페이지	답	페이지	답
1	표지	11	5	21	5	31	13	41	7
2	28	12	2	22	4	32	4	42	5
3	4	13	2	23	4	33	1	43	3
4	136	14	2	24	90	34	5	44	8
5	4	15	5	25	4	35	3		
6	2	16	3	26	1	36	476		
7	1	17	2	27	2	37	5		
8	4	18	4	28	3	38	2		
9	4	19	5	29	5	39	4		
10	3	20	5	30	1	40	5		

EBS는 이 자료에 있는 43문제만 푼다면 21학년도 수능 EBS 연계 대비로 충분합니다.
올 한해도 수고 많으셨습니다. 2020년 12월 3일에 가감 없이 본인 실력을 발휘하길 기원합니다.
-파급효과 올림-