제 2 교시

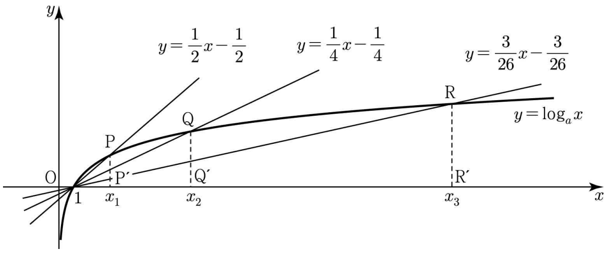
수학 영역(가형&나형)

1,2번 ⇨ 수1
3,4번 ⇨ 확통
5,6번 ⇨ 수2
7,8번 ⇨ 미적분
→ 가형은 전문항 풀기, 나형은 1번~6번까지 풀기

5지선다형	단답형

1. 그림과 같이 로그함수 $y=\log_a x\ (a>1)$의 그래프와 세 직선 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$, $y=\frac{3}{26}x-\frac{3}{26}$가 점 $(1,\ 0)$ 이외의 서로 다른 세 점 P, Q, R에서 각각 만나고, 세 점 P, Q, R에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P}'(x_1,\ 0)$, $\mathrm{Q}'(x_2,\ 0)$, $\mathrm{R}'(x_3,\ 0)$이라 하자. x_1, x_2, x_3는 이 순서대로 공비가 3인 등비수열을 이룰 때, $x_1+x_2+x_3$의 값은? [4점]

[랑데뷰수학]



① 35 ② 37 ③ 39 ④ 41 ⑤ 43

2. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = -2n^2 + cn \quad (c\text{는 자연수})$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 각 항 중에서 3의 배수가 아닌 수를 큰 것부터 크기순으로 모두 나열하여 얻은 수열을 $\{b_n\}$이라 하자. $b_{30}=1$가 되도록 하는 모든 c의 값의 합을 구하시오. [4점]

[랑데뷰수학]

3. 빨간 공 5개, 노란 공 9개, 파란 공 9개 중에서 9개의 공을 택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않는다.)[4점] [랑데뷰수학]

4. 세 정수 0, 2, 4 중에서 중복을 허락하여 다섯 개의 수를 택해 다음 조건을 만족하는 자연수를 만든다.

(가) 5의 배수가 아닌 다섯 자리의 자연수가 되도록 배열한다. (나) 2끼리는 서로 이웃하지 않도록 배열한다.

조건을 만족하는 자연수 중 하나를 뽑을 때, 뽑힌 수의 일의 자리 숫자가 2일 확률은? [4점] [랑데뷰수학]

① $\frac{9}{22}$ ② $\frac{14}{33}$ ③ $\frac{29}{66}$ ④ $\frac{5}{11}$ ⑤ $\frac{31}{66}$

5. 사차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근 가질 때, 사차함수

$$f(x)=k(x-1)(x-2)(x-a)(x-a-1)\ (k>0)$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 불연속인 모든 t의 값의 합이 2일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점] [랑데뷰수학]

6. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

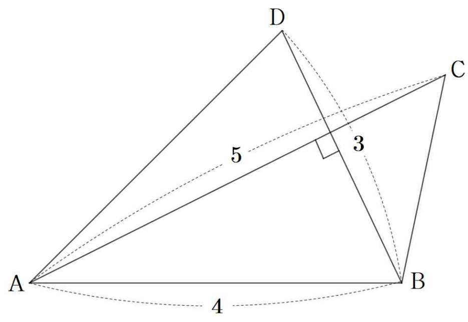
(가) 두 집합 $\mathrm{A}=\{f(x)\,|\,f(x)\geq f(t)\}$, $\mathrm{B}=\{x\,|\,x>k\}$에 대하여 $\mathrm{A}-\mathrm{B}=\{k\}$가 되도록 하는 실수 t의 값은 0, a이다. (단, k는 상수이고 $a>0$)

(나) $f'\left(\dfrac{a}{3}\right)=4$, $f'(a)=0$

[랑데뷰수학]

$f(-1)-f(1)$의 값을 구하시오. [4점] [랑데뷰수학]

7. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=5$, $\overline{\mathrm{BD}}=3$이고 선분 AC와 선분 BD가 수직인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 두 삼각형 ABC, ABD의 넓이의 합이 최대일 때, $\tan(\angle\mathrm{BAC})$의 값은? (단, $0<\angle\mathrm{BAC}<\frac{\pi}{2}$)[4점] [랑데뷰수학]



① 1　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{5}{3}$　④ 2　⑤ $\frac{7}{3}$

8. $f(x)=x^2-2x+2$에 대하여 $g(x)=\ln f(x)$이다. 양수 t $(0<t\le 1)$에 대하여 방정식 $g(x)=t$을 만족시키는 두 실근 x값의 합을 $h(t)$라 하고 $g'(x)=t$을 만족시키는 두 실근 중 크지 않은 것을 α라 할 때, $\int_0^1\{h(t)-\alpha\}dt$의 값은 [4점] [랑데뷰수학]

① ln2　② ln5　③ 2　④ 3　⑤ ln10

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

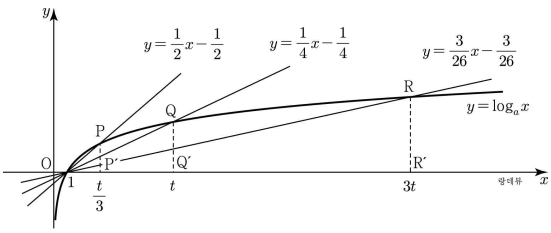
랑데뷰 쉬사준킬 제164회 해설

1	2	3	4
③	354	45	②
5	6	7	8
128	12	③	①

출제
대구 송원학원 황보백 선생님

1) 정답 ③
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

x_1, x_2, x_3는 이 순서대로 공비가 3인 등비수열이므로 $x_2 = t$라 두면 $x_1 = \frac{t}{3}$, $x_3 = 3t$이다.



세 점 P, Q, R을 지수함수 $y=\log_a x\ (a>1)$위의 점이라 생각하면 y좌표가 각각
$\log_a\left(\frac{t}{3}\right)$, $\log_a t$, $\log_a 3t$이고 이 수열은 등차수열($\because$ 등차중항 성질) 이므로
세 점 P, Q, R을 세 직선 위의 점으로 볼 때 각각 $\frac{1}{6}t-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}$, $\frac{9}{26}t-\frac{3}{26}$
이고 이 세 수는 등차수열을 이룬다. 따라서

$$2\left(\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{6}t-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{9}{26}t-\frac{3}{26}\right)$$
$$\to \frac{1}{2}t-\frac{1}{2}=\frac{13t+27t}{78}-\frac{13+3}{26}$$
$$\to \frac{1}{2}t-\frac{1}{2}=\frac{40}{78}t-\frac{16}{26}$$
$$\to \frac{39-40}{78}t=\frac{-16+13}{26}$$
$$\to -\frac{1}{78}t=-\frac{3}{23}$$
$$\therefore\ t=9$$

따라서 $x_1+x_2+x_3=\frac{13}{3}t=39$

2) 정답 354
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (-2n^2+cn)+2(n-1)^2-c(n-1) \\ &= -4n+2+c \end{aligned}$$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $c-2$이고 공차가 -4인 등차수열이다. c가 자연수이므로 수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 정수이다.
정수인 항들을 공차가 -4가 되도록 나열할 때

(i) 첫째항이 $3k-1$꼴일 때,
예를 들어 98, 94, 90, 86, 82, 78, …을 45번째항까지 나열하고 3의 배수가 아닌 항들을 차례대로 b_n, 3의 배수인 항들을 차례대로 c_n이라 하자.

a_1	a_2	a_3	a_4	…	a_{44}	a_{45}
98	94	90	86	…		
b_1	b_2	c_1	b_3		b_{30}	c_{15}

45개의 수 중 3의 배수가 15개 있으므로 3의 배수가 아닌수는 30개 있다.
a_{44}항이 b_{30}이 된다.

(ii) 첫째항이 $3k-2$꼴일 때,
예를 들어 97, 93, 89, 85, 81, 77, …을 45번째항까지 나열하고 3의 배수가 아닌 항들을 차례대로 b_n, 3의 배수인 항들을 차례대로 c_n이라 하자.

a_1	a_2	a_3	a_4	…	a_{44}	a_{45}
97	93	89	85	…		
b_1	c_1	b_2	b_3		c_{15}	b_{30}

45개의 수 중 3의 배수가 15개 있으므로 3의 배수가 아닌수는 30개 있다.
a_{45}항이 b_{30}이 된다.

(iii) 첫째항이 $3k$꼴일 때,
예를 들어 99, 95, 91, 87, 83, 79, …을 45번째항까지 나열하고 3의 배수가 아닌 항들을 차례대로 b_n, 3의 배수인 항들을 차례대로 c_n이라 하자.

a_1	a_2	a_3	a_4	…	a_{44}	a_{45}
99	95	91	87	…		
c_1	b_1	b_2	c_2		b_{29}	b_{30}

45개의 수 중 3의 배수가 15개 있으므로 3의 배수가 아닌수는 30개 있다.
a_{45}항이 b_{30}이 된다.

(i), (ii), (iii)에서 공차가 -4인 등차수열에서 a_n에서 3의 배수를 제외한 수열 b_n은 $a_{45}=b_{30}$\{(ii), (iii)\}이거나 $a_{44}=b_{30}$\{(i)\} 임을 알 수 있다.

$a_n = -4n+2+c$이고 $a_{44} = -174+c$에서 $a_{45} = -178+c$이므로
b_{30}은 $-174+c$ 또는 $-178+c$이 가능하다.
$-174+c=1$에서 $c=175$
$-178+c=1$에서 $c=179$
그러므로
$\therefore\ 175+179=354$

[랑데뷰팁]

등차수열의 항들을 3으로 나눈 나머지로 분류할 때, 3의 배수를 제외한 항들의 수가 30이면 총 항의 수는 45항 또는 44항 일 수 밖에 없다.

3) 정답 45

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

3종류의 공 중에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_9 = {}_{11}\mathrm{C}_9 = {}_{11}\mathrm{C}_2 = 55$
빨간 공을 6개 이상 택하는 경우의 수는 빨간 공을 6개 택한 후 3종류의 공 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = 10$
따라서 구하는 경우의 수는 $55-10=45$

4) 정답 ②

(가) 조건에 의해 일의 자리 수는 2 또는 4이다.
(i) 일의 자리수가 2일 때
① 최고자리 수가 2일 때,
$\boxed{2}\ \boxed{a_1}\ \boxed{a_2}\ \boxed{a_3}\ \boxed{2}$
2가 올 수 있는 자리는 a_2뿐이다.
a_2에 2가 오는 경우는 $2\times1\times2=4$
a_2에 2가 아닌 수가 오는 경우는 $2\times2\times2=8$
따라서 $4+8=12$

② 최고자리 수가 4일 때,
$\boxed{4}\ \boxed{a_1}\ \boxed{a_2}\ \boxed{a_3}\ \boxed{2}$
a_1에 2가 올 때, $1\times2\times2=4$
a_1에 2가 아닌 수가 오고 a_2에 2가 올 때, $2\times1\times2=4$
a_1에 2가 아닌 수가 오고 a_2에 2가 아닌 수가 올 때, $2\times2\times2=8$
따라서 $4+4+8=16$

그러므로 $12+16=28$

(ii) 일의 자리수가 4일 때,

① 최고자리 수가 2일 때,
$\boxed{2}\ \boxed{a_1}\ \boxed{a_2}\ \boxed{a_3}\ \boxed{4}$
a_2에 2가 오는 경우는 $2\times1\times2=4$
a_3에 2가 오는 경우는 $2\times2\times1=4$
2가 모두 오지 않는 경우 $2\times2\times2=8$
따라서 $4+4+8=16$

② 최고자리 수가 4일 때,
$\boxed{4}\ \boxed{a_1}\ \boxed{a_2}\ \boxed{a_3}\ \boxed{4}$
a_1에 2가 올 때, $1\times2\times3=6$
a_2에 2가 올 때, $2\times1\times2=4$
a_3에 2가 올 때, $3\times1\times2=6$
a_1, a_3에 모두 2가 올 때, $1\times2\times1=2$
2가 모두 오지 않는 경우 $2\times2\times2=8$
따라서 $6+4+6-2+8=22$

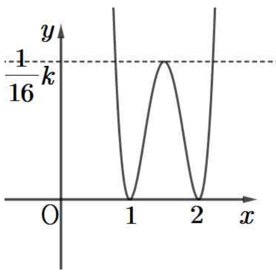
그러므로 $16+22=38$

(i), (ii)에서
조건을 만족하는 자연수 중 하나를 뽑을 때, 뽑힌 수의 일의 자리 숫자가 2일 확률은 $\dfrac{28}{28+38}=\dfrac{28}{66}=\dfrac{14}{33}$이다.

5) 정답 128

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

사차방정식
$k(x-1)(x-2)(x-a)(x-a-1)=0$이 서로 다른
두 실근만을 가지기 위해서는 $a=1$이다.
따라서 $f(x)=k(x-1)^2(x-2)^2\ (k>0)$
곡선 $y=f(x)$는 $x=1$과 $x=2$에서 x축에 접하고(극솟값 0), $x=\dfrac{3}{2}$에서 극댓값을 갖는 그래프이다.



$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=k\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}k$
따라서 $y=f(x)$와 $y=t$가 만나는 개수 $g(t)$는
$t<0$일 때, $g(t)=0$
$t=0$일 때, $g(0)=2$
$0<t<\dfrac{1}{16}k$일 때, $g(t)=4$
$t=\dfrac{1}{16}k$일 때, $g(t)=3$
$t>\dfrac{1}{16}k$일 때, $g(t)=2$
따라서 함수 $g(t)$가 불연속인 t의 값은 $t=0$과 $t=\dfrac{1}{16}k$이다.

$0+\dfrac{1}{16}k=2$이므로 $k=32$이다.
따라서
$f(x)=32(x-1)^2(x-2)^2$
$\therefore\ f(3)=32\times4=128$

6) 정답 12
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

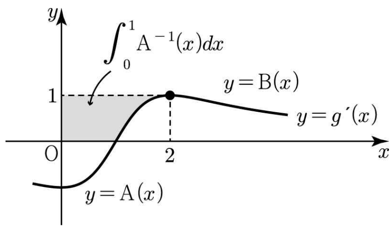
$\mathrm{B}=\{x\,|\,x>k\}$이므로 $\mathrm{A}-\mathrm{B}=\{k\}$이기 위해서는 $\mathrm{A}=\{x\,|\,x\geq k\}$이다.
(나)에서 $f'(a)=0$이므로 사차함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값 k를 갖거나
$x=a$에서 변곡점이 되는 함수이다.
즉, $f(x)=x^2(x-a)^2+k$, $f(x)=x(x-a)^3+k$
(나)에서 $f'\left(\dfrac{a}{3}\right)=4>0$이므로 사차함수 비율관계에서
$f(x)=x^2(x-a)^2+k$이다.
$f'(x)=2x(x-a)^2+2x^2(x-a)$
$\quad=2x(x-a)(2x-a)$
$f'\left(\dfrac{a}{3}\right)=2\times\dfrac{a}{3}\times\left(-\dfrac{2}{3}a\right)\left(-\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{4}{27}a^3=4$
따라서 $a^3=27$에서 $a=3$이다.
$f(x)=x^2(x-3)^2+k$이므로
$f(-1)=16+k$, $f(1)=4+k$
$f(-1)-f(1)=12$이다.

7) 정답 ③
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$\angle\mathrm{BAC}=\theta$라 하면
삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times5\times4\times\sin\theta=10\sin\theta$
선분 AC와 선분 BD의 교점을 E라 하면
$\overline{\mathrm{AE}}=4\cos\theta$이다.
따라서
삼각형 ABD의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{AE}}=\dfrac{1}{2}\times3\times4\cos\theta=6\cos\theta$
두 삼각형 ABC, ABD의 넓이의 합을 $f(\theta)$라 할 때,
$f(\theta)=10\sin\theta+6\cos\theta$이고
$f'(\theta)=10\cos\theta-6\sin\theta=0$
$10\cos\theta=6\sin\theta$
$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{10}{6}=\dfrac{5}{3}$
$f(\theta)$는 $\tan\theta=\dfrac{5}{3}$일 때, 극대이자 최댓값을 가지므로
$\tan(\angle\mathrm{BAC})=\dfrac{5}{3}$

8) 정답 ①
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$f(x)=(x-1)^2+1$ 이므로 $f(x)$는 $x=1$에 대칭이다.
따라서 $g(x)=\ln(x^2-2x+2)$도 $x=1$에 대칭이고
$g(1)=0$이므로 $t>0$에 대해
$g(x)=t$을 만족하는 실근은 두 개다.
두 실근의 합은 항상 2이다.
$\therefore\ h(t)=2$
또한 $g'(x)=\dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}$이고
증감표를 작성하여 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



$g'(x)=\begin{cases}A(x) & (0\leq x\leq 2)\\ B(x) & (2\leq x)\end{cases}$라 하자.
$A(x)=t$의 실근을 α, $B(x)=t$의 실근을 β라 두면 $\alpha\leq\beta$
$A(\alpha)=t\ \rightarrow\ \alpha=A^{-1}(t)$
따라서
$\int_0^1\{h(t)-\alpha\}dt=\int_0^1\{2-A^{-1}(t)\}dt=2-\int_0^1 A^{-1}(t)\,dt$
한편 $\int_0^1 A^{-1}(t)\,dt=2-\int_1^2 g'(t)\,dt$이고
$\int_1^2 g'(t)\,dt=[g(t)]_1^2=g(2)-g(1)=\ln2$
$\therefore\ \int_0^1\{h(t)-\alpha\}dt=2-(2-\ln2)=\ln2$