제 2 교시

수학 영역(가형&나형)

1,2번 ⇨ 수1

3,4번 ⇨ 확통

5,6번 ⇨ 수2

7,8번 ⇨ 미적분

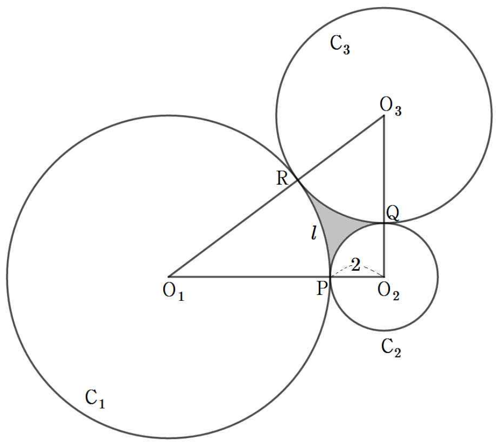
→ 가형은 전문항 풀기, 나형은 1번~6번까지 풀기

5지선다형	단답형

1. 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 세 항 a_3, a_k, a_{15}은 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 항 a_1, a_2, a_k는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. $k \times a_1$의 값은? [4점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

2. 그림과 같이 넓이가 24이고 $\angle \mathrm{O_1O_2O_3} = 90°$인 직각삼각형 $\mathrm{O_1O_2O_3}$가 있다. 중심이 $\mathrm{O_1}$인 원 $\mathrm{C_1}$과 중심이 $\mathrm{O_2}$인 원 $\mathrm{C_2}$가 선분 $\mathrm{O_1O_2}$위의 한 점 P에서 만나고, 원 $\mathrm{C_2}$와 중심이 $\mathrm{O_3}$인 원 $\mathrm{C_3}$이 선분 $\mathrm{O_2O_3}$위의 한 점 Q에서 만나고 두 원 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_3}$이 선분 $\mathrm{O_1O_3}$위의 한 점 R에서 만난다. $\overline{\mathrm{O_2P}} = 2$, $\overset{\frown}{\mathrm{PR}} = l$일 때, 세 원의 원주로 둘러싸인 도형 PQR의 넓이를 l에 관한 식으로 나타낸 것은? [4점]



① $24-4\pi-\frac{4}{3}l$ ② $24-3\pi-\frac{5}{3}l$ ③ $24-5\pi-\frac{5}{3}l$

④ $24-3\pi-\frac{4}{3}l$ ⑤ $24-6\pi-\frac{4}{3}l$

3. 확률변수 X가 정규분포 $N\left(m, \frac{16}{(4m+1)^2}\right)$를 따른다고 한다. $P(X \le 10) = 0.9938$일 때, 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 $4m$의 값을 구하시오. (단, $m > 0$) [4점]

표준정규분포표

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

4. 학생 A_1, A_2, A_3, A_4을 포함한 20명의 학생이 있는 반이 있다. 점심시간 좌석번호가 1번부터 20번까지 있는 급식실에 앉는 좌석번호를 정할 때, 학생 A_1, A_2, A_3, A_4의 좌석번호를 a_1, a_2, a_3, a_4라 한다. $a_1 - a_2 \ge 4$, $a_2 - a_3 \ge 4$, $a_3 - a_4 \ge 4$ 을 만족시키도록 좌석번호를 정하는 모든 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4)의 개수는? [4점]

① 56 ② 126 ③ 186 ④ 260 ⑤ 330

5. 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1} & (x\neq 1)\\ 2 & (x=1)\end{cases}$$

이 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [4점]

① 4 ② 2 ③ 1 ④ -1 ⑤ -2

6. 함수 $g(x)=-4x^2+4x$에 대하여 함수 $f(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & (0\le x<1)\\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^n g(x-2n+1) & (2n-1\le x<2n)\\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^n g(x-2n) & (2n\le x<2n+1)\end{cases}\quad (\text{단, } n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

자연수 n에 대하여 $S_n=\displaystyle\int_{2n-1}^{2n+1}f(x)dx$이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{20}S_n$의 값은? [4점]

① $2-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2^{19}}+\dfrac{1}{3^{20}}\right)$ ② $1-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2^{19}}+\dfrac{1}{3^{20}}\right)$

③ $1-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2^{20}}+\dfrac{1}{3^{19}}\right)$ ④ $1-\left(\dfrac{1}{2^{19}}+\dfrac{1}{3^{20}}\right)$

⑤ $1-\left(\dfrac{1}{2^{20}}+\dfrac{1}{3^{20}}\right)$

7. x에 대한 방정식 $x^2 e^{\frac{x}{n}+2} = k$ 가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 $f(n)$이라 하자. $\sum_{n=1}^{5} f(n)$의 값을 구하시오. (단, n은 자연수이고 $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{\frac{x}{n}+2} = 0$) [4점]

8. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표는 $(t, 0)$이다. 곡선 $y = xe^{-x}$위의 점 $Q(x, y)$는 점 P와 거리를 $\sqrt{2}\,e$를 유지하며 움직인다. 다음 중 옳은 것을 고른 것은? [4점]

| 보 기 |

ㄱ. $t = \sqrt{2}\,e$일 때 $\frac{dy}{dx} > 0$인 Q의 좌표는 $(0, 0)$이다.

ㄴ. $\frac{dy}{dx} < 0$인 Q가 두 개 존재하기 위한 t범위는 $t > \frac{\sqrt{2e^4 - 1}}{e}$이다.

ㄷ. $t = e - 1$일 때, $\frac{dy}{dx} > 0$인 점 Q의 속도는 $\left(\frac{1}{2e+1}, \frac{2e}{2e+1}\right)$이다. (단, Q의 x좌표는 정수이다.)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

랑데뷰 쉬사준킬 제70회 해설

1	2	3	4
①	③	39	⑤
5	6	7	8
④	②	175	③

출제
대구 송원학원 황보백 선생님

1) 정답 ①
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

등차중항의 성질에 의해 $a_k = a_9$이다. 따라서 $k=9$
따라서 $a_2 = a_1 + 4$, $a_9 = a_1 + 32$
등비중항의 성질에 의해
$(a_1+4)^2 = a_1 \times (a_1+32)$
$a_1^2 + 8a_1 + 16 = a_1^2 + 32a_1$
$24a_1 = 16$
따라서 $a_1 = \frac{2}{3}$
$k \times a_1 = 9 \times \frac{2}{3} = 6$

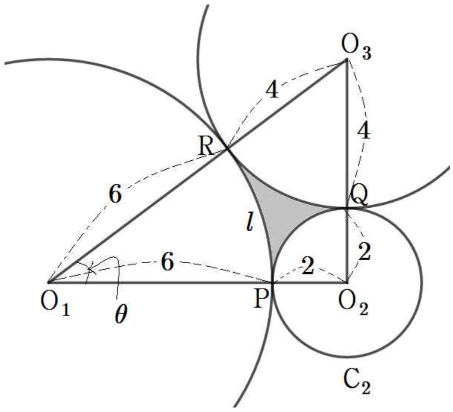
2) 정답 ③
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$\overline{O_1P} = a$, $\overline{O_3Q} = b$라 두면 $\overline{O_1O_3} = a+b$이다.
직각삼각형 $O_1O_2O_3$의 넓이가 24이므로
$24 = \frac{1}{2} \times (a+2) \times (b+2)$
$\therefore$ $(a+2)(b+2) = 48$ $\cdots$㉠
직각삼각형 $O_1O_2O_3$에서 피타고라스 정리에 의해
$(a+2)^2 + (b+2)^2 = (a+b)^2$이 성립하므로
$\therefore$ $2a + 2b + 4 = ab$ $\cdots$㉡

㉠을 정리하면 $ab = -2a - 2b + 44$이고 ㉡에 대입하면
$2a + 2b + 4 = -2a - 2b + 44$
$a + b = 10$
$b = -a + 10 \cdots$㉢

㉢을 ㉠에 대입하면
$(a+2)(-a+12) = 48$
$a^2 + 10a - 24 = 0$
$(a-4)(a-6) = 0$
따라서 $a=4$, $b=6$ 또는 $a=6$, $b=4$이다.

두 경우 모두 도형 PQR의 넓이는 같으므로
$a=6$, $b=4$라 하자.



도형 PQR의 넓이를 S라 하면
$S = \triangle O_1O_2O_3 -$부채꼴 $O_1PR -$부채꼴 $O_3RQ -$사분원 O_2PQ
이다.

부채꼴 O_1PR의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times l = 3l$이고

한편, 부채꼴 O_1PR에서 $\angle RO_1P = \theta$라 하면 $a\theta = l$에서 $\theta = \frac{l}{6}$이므로
부채꼴 O_3RQ에서 $\angle RO_1P + \angle RO_3Q = \frac{\pi}{2}$이므로
$\angle RO_3Q = \frac{\pi}{2} - \frac{l}{6}$
따라서 부채꼴 O_3RQ의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4^2 \times \left(\frac{\pi}{2} - \frac{l}{6}\right) = 4\pi - \frac{4}{3}l$
사분원 O_2PQ의 넓이는 $\frac{1}{4} \times \pi \times 2^2 = \pi$이다.
따라서
$S = 24 - 3l - \left(4\pi - \frac{4}{3}l\right) - \pi$
$\quad = 24 - 5\pi - \frac{5}{3}l$

3) 정답 39
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$\mathrm{P}(\mathrm{X} \le 10) = 0.9938 = 0.5 + 0.4938$
$\qquad = \mathrm{P}(\mathrm{X} \le m) + \mathrm{P}(m \le \mathrm{X} \le 10)$
표준정규분포표를 이용하면
$\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5) = 0.4938$이므로
$\dfrac{10-m}{\sqrt{\dfrac{16}{(4m+1)^2}}} = \frac{5}{2}$이다.

$\dfrac{(10-m)(4m+1)}{4}=\dfrac{5}{2}$

$\rightarrow -4m^2+39m+10=10$

$\rightarrow -4m\left(m-\dfrac{39}{4}\right)=0$에서

$m=\dfrac{39}{4}$이다.

따라서 $4m=39$

4) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

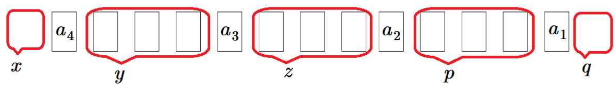
숫자를 적을 수 있는 카드 20개에서 4개를 골라 순서대로 빈 공간이 있도록 나열한다.

왼쪽부터 a_1, a_2, a_3, a_4 표기를 한다.

$a_1 \geq a_2+4$, $a_2 \geq a_3+4$, $a_3 \geq a_4+4 \cdots$㉠이므로

a_1과 a_2사이에 3개의 카드를 넣고 마찬가지로 a_2과 a_3사이에, a_3와 a_4사이에 3개의 카드를 넣으면 ㉠조건을 만족한다. 그럼 $4+9=13$개의 카드를 사용했고 7개의 카드가 남아 있다.

7개의 카드가 들어갈 수 있는 공간은 다음 그림과 같이 5곳이고 거기에 들어가는 카드의 개수를 x, y, z, p, q라 하면



$x+y+z+p+q=7$, $0 \leq x, y, z, p, q \leq 7$이다.

따라서 공간에 넣는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_7$ 이다.

${}_5\mathrm{H}_7={}_{11}\mathrm{C}_7={}_{11}\mathrm{C}_4=\dfrac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1}=330$이다.

나열된 카드에 순서대로 1,2,3,$\cdots$,20을 적으면 a_1, a_2, a_3, a_4 표기를 한 카드의 숫자가 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4)이 된다.

따라서 330개다.

5) 정답 ④

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=2 \quad \cdots$㉠

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$에서

$b=-a-1 \quad \cdots$㉡

㉠, ㉡에서

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-(a+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+a+1)=a+2$$

$a+2=2$에서 $a=0$, $b=-1$이므로

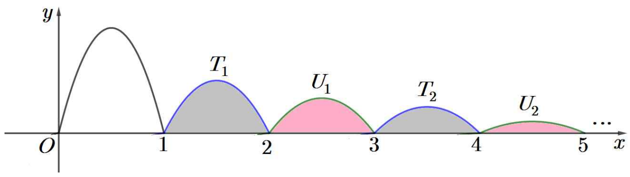
$a+b=-1$

6) 정답 ②

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

함수 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n g(x-2n+1)$의 그래프는 함수 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $2n-1$ 만큼 평행이동한 것이고

함수 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n g(x-2n)$의 그래프는 함수 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $2n$ 만큼 평행이동한 것므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$S=\displaystyle\int_0^1(-4x^2+4x)dx=\left[-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_0^1=\frac{2}{3}$

닫힌구간 $[2n-1, 2n]$ 에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 T_n 이라 하고 닫힌구간 $[2n, 2n+1]$ 에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 U_n이라 하면 $S_n=T_n+U_n$이다.

T_n은 $T_1=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$이고 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열의 합을 이루고

U_n은 $U_1=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$이고 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열의 합을 이룬다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{20}S_n=\sum_{n=1}^{20}T_n+\sum_{n=1}^{20}U_n$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{2}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}+\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right\}$$

$$=1-\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2^{19}}+\frac{1}{3^{20}}\right\}$$

7) 정답 175

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

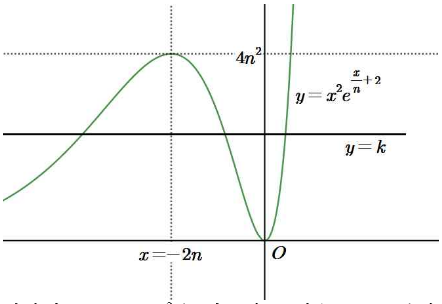
$g(x)=x^2e^{\frac{x}{n}+2}$ 라 하면

$$g'(x)=2xe^{\frac{x}{n}+2}+\frac{1}{n}x^2e^{\frac{x}{n}+2}$$

$$=xe^{\frac{x}{n}+2}\left(2+\frac{x}{n}\right)$$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-2n$과 $x=0$일 때 극값을 갖는다.
증감표로 조사해 보면
$x=-2n$일 때 극댓값 $4n^2$, $x=0$일 때 극솟값 0을 갖는다.

따라서 $0<k<4n^2$일 때 $y=x^2e^{\frac{x}{n}+2}$와 $y=k$는 서로 다른 세 점에서 만난다.

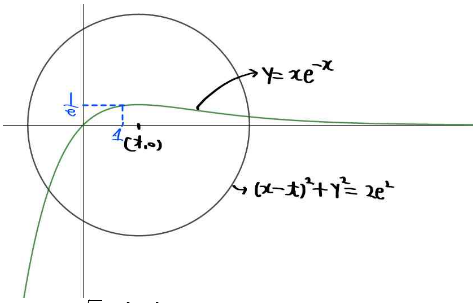


따라서 $0<k<4n^2$을 만족하는 정수 k는 1부터 $4n^2-1$까지이므로 $f(n)=4n^2-1$이다.

$$\sum_{n=1}^{5}f(n)=\sum_{n=1}^{5}(4n^2-1)$$
$$=4\sum_{n=1}^{5}n^2-5$$
$$=4\times\frac{5\times6\times11}{6}-5=220-5=215$$

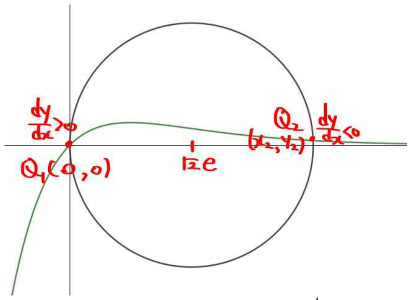
8) 정답 ③
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

점 Q가 $y=xe^{-x}$과 $(x-t)^2+y^2=2e^2$을 만족한다.
그래프로 나타내면 다음과 같다.



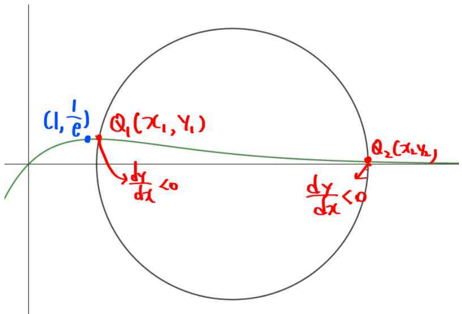
ㄱ. $t=\sqrt{2}e$일 때
$y=xe^{-x}$와 $(x-\sqrt{2}e)^2+y^2=2e^2$의 교점을
$Q_1(0,0)$, $Q_2(x_2,y_2)$라 하면 다음 그림과 같이 $\frac{dy}{dx}>0$인 경우는 $Q_1(0,0)$일 때다. (참)

ㄴ. $\frac{dy}{dx}<0$인 Q가 두 개 존재한다는 뜻은 $y=xe^{-x}$와 $(x-t)^2+y^2=2e^2$의 교점이
$y=xe^{-x}$의 감소 구간에서 두 개 존재한다는 의미이다.
$y=xe^{-x}$의 극대점은 $\left(1,\frac{1}{e}\right)$이므로 $(x-t)^2+y^2=2e^2$에 대입하면



$(1-t)^2+\frac{1}{e^2}=2e^2$ ⇨ $(t-1)^2=\frac{2e^4-1}{e^2}$

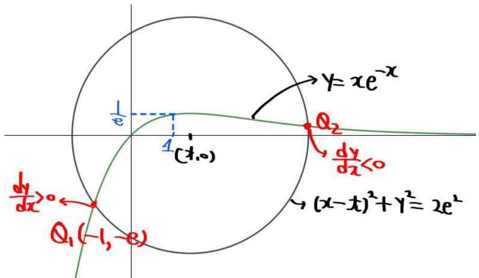
$t>1$이므로 $t-1=\frac{\sqrt{2e^4-1}}{e}$에서 $t=1+\frac{\sqrt{2e^4-1}}{e}$



따라서 교점이 모두 극대점의 x좌표 1보다 큰 쪽에 존재해야 하므로 $t>1+\frac{\sqrt{2e^4-1}}{e}$이다. (거짓)

ㄷ.
$y=xe^{-x}$와 $(x-\sqrt{2}e)^2+y^2=2e^2$을 한 식으로 정리하면
$(x-t)^2+x^2e^{-2x}=2e^2$에서
$(e^{-2x}+1)x^2-2tx+t^2=2e^2$이다.
음함수 미분하면
$\{-2x^2e^{-2x}+2x(e^{-2x}+1)\}\frac{dx}{dt}-2x-2t\frac{dx}{dt}+2t=0\cdots㉠$이다.

$t=e-1$일 때 $\frac{dy}{dx}>0$인 점은 Q_1이고 Q_1의 x좌표가 정수이므로 $(x-t)^2+x^2e^{-2x}=2e^2$에 대입해서 구하면 $x=-1$이므로 $Q_1(-1,e)$이다.



따라서 대입하면 ㉠에 $x=-1$, $t=e-1$을 대입하면
$(-2e^2-2e^2-2)\frac{dx}{dt}+2-2(e-1)\frac{dx}{dt}+2(e-1)=0$

$-2e(2e+1)\frac{dx}{dt}=-2e$

$\therefore\ \frac{dx}{dt}=\frac{1}{2e+1}$

한편 $y=xe^{-x}$을 t에 관해 음함수 미분하면

$\frac{dy}{dt}=e^{-x}(1-x)\frac{dx}{dt}$ 이므로

$\frac{dy}{dt}=2e\times\frac{1}{2e+1}=\frac{2e}{2e+1}$ 이다.

따라서 $t=e-1$일 때, Q의 속도는 $\left(\frac{1}{2e+1}, \frac{2e}{2e+1}\right)$이다. (참)